溶接構造物のき裂健全性評価（初版）

健全な応力集中場からの疲労き裂発生・成長寿命と脆性破壊強度評価の一貫システム

き裂のない状態から発生して連続的に成長する疲労き裂成長曲線を定量的に推定することに成功した世界唯一のアルゴリズム（FLARP）

S-N 曲線を用いないで、せん断き裂から開口型き裂に遷移する間も含めたランダム荷重下での疲労き裂成長を予測できる世界初のアルゴリズム

FLARP を進化させ、局所的塑性域場に存在する非貫通き裂に対するき裂結合モデルにより、実働荷重下で任意の大きさのき裂になる寿命とその時点の COD＆要求 CTOD を理論的に与える ADSTIC

疲労限設計が成立しないのはなぜかを解説
その対処方法も提言

2014 年　9 月

豊貞雅宏（九州大学名誉教授）

Fatigue Life Assessment by RPG load
(Re-tensile Plastic Zone Generating Load)

Advanced Design system for STructural Integrity against Cracking

目　次

溶接構造物のき裂健全性評価

序

機械や構造物は外力応答の結果作用する部材応力を、許容応力以下にするよう設計されてきた。すなわち、「試設計→外力の設定→応答解析→各部材における作用応力（詳細設計）→作用応力が許容応力以下であることを確認」という基本的な流れで設計がなされてきた。外力と許容応力は独立事象である◎が、損傷を引き起こす応力の閾値が明確にされていない現状と、風、波、地震など自然が引き起こす外力が統計量であるため生涯に渡って受ける荷重の最大値が決定論的に求められないという２つの事象が存在するため、損傷実績を介して外力と許容応力の間にはあたかも相関性があると錯覚しているような取扱がなされてきた。当然、許容応力と密接に関連する損傷を引き起こす応力状態の閾値には全体強度だけでなく、疲労き裂や脆性破壊に関わる物理量の影響を受ける。したがって当初、許容応力は部材毎に異なるのが本来の姿であると考えられていた。

不安定破壊防止研究の成果として、結晶粒微細化技術や不純物元素の低減などにより従来より大幅に靭性が改善された材料で構成された構造が出現したので、損傷を引き起こす応力状態の閾値は大きくなっているはずである。しかし、これら設定外力、許容応力、材料物性は損傷実績という観点から互いに相関を有しているかのような錯覚に陥っていることもある。ただし、このような錯覚を起こさせていることが経験工学が機能している証拠なのかも知れない。したがって、現在の材料を出発点として、経験工学で許容応力を設定すると、現時点より大きな許容応力に落ち着くのではないかと考えられる。言い換えれば、経験工学に基づく現在の設計技術レベルでは過去に比べて飛躍的に良くなった材料の性能を十分引き出して使用するのに非常に大きな時間のずれを要さざるを得ない。

ところで、信頼性工学ならびにコンピュータの発展により、計測された外力スペクトルの整備や、応力応答解析が手軽に行えるようになりつつあるとともに、材料物性のばらつきなど、信頼性設計が行える環境が整備されつつある。これらに呼応して、構造設計の世界的趨勢はこれまでのルールによる仕様設計から、解析による性能設計に移行しつつある。性能設計では〇〇年後に〇〇の水準までの性能を保証することを要求され、上記３つは独立事象として取扱うことになる。

したがって、時刻歴に応じて変化する物理量を設計時に評価することが必要となる。外力に関しては、確率・統計学の進歩と荷重スペクトルの計測手法などの発達ならびにコンピュータの発達により、荷重時刻歴を妥当に与えることが可能となってきた。

構造物の損傷としては、崩壊、座屈、疲労き裂、脆性破壊、磨耗・衰耗などがある。崩壊、座屈、磨耗・衰耗に関しては、全体的な応力状態で議論でき、時系列での板厚変化も設定可能となっ

◎ 作用応力の閾値と許容応力は、材料物性を介して相関がある。また、外力と作用応力の間には板厚や剛性などの設計変数を介してある関係を有する。しかし、外力の最大値は、構造に働く応力によらずに、その形状ならびに設置環境に依存する。

ている。しかし、疲労き裂発生に関しては、一定荷重振幅と破断寿命の関係を図示した S-N 曲線を用いて照査されているが、そこではき裂の大きさの情報は一切含まれていない。さらに、実働荷重が作用する場合について、線形被害則で求められている疲労被害度 D と実際の疲労き裂の大きさとの間には、有意な相関すら得られていない。疲労き裂に関しては、負荷の時系列に応じて進展していくので、時々刻々のき裂変化を追えることが出来なければ性能設計は機能しないと考えられる。

我が国の土木業界では、逸早く性能設計の一つである限界状態設計法に移行している。当然 S-N 曲線を用いて疲労寿命が照査されており、そこでは土木構造物に疲労き裂を生じさせないと考えた設計をしている。しかし、繰返し負荷が作用すると、疲労限以下の荷重振幅であっても、塑性ひずみは発達する。そして一定荷重振幅下では、1サイクルで生じる塑性ひずみ増分は荷重振幅に対応するある大きさに収斂するが、0 とはならず常に塑性ひずみは発達することが観測されている[1)](この状態ではせん断き裂が生じており、低い一定振幅荷重下では停留している可能性があるが、荷重振幅が変動する場では停留しない可能性が大である)。したがって、繰返し負荷が作用する場合、疲労き裂を生じさせないことが可能か否かは未だ議論できない状態である。工学的に疲労き裂が生じないための D の閾値を設定しても、実働荷重下では疲労限設計が成立しなかった損傷事故が数多く存在するので意味をなさず、実際には、道路橋にもそこかしこに疲労き裂が生じている（塑性ひずみが進行することは、構造に何らかの時系列変化が生じていることの表れであり、構造が建造時のままを保っていないことに他ならず、このことによる変化によって引き起こされる現象を明確にしないで、安全性を議論するのは無理がある。)。

鋼構造の歴史を振り返ると、産業革命後鉄鋼構造物の設計・建造技術の発展にともない、リベット接合から溶接継手で構成された構造物が出現した。そして 1940 年代初頭から 1990 年代半ばまで脆性破壊事故を経験し、その防止のため高破壊靭性値となる鋼材、溶接材料ならびに溶接施工法が開発され、その適用拡大が図られた。その結果、高強度・高靭性材料で構成された溶接構造が出現し、脆性破壊事故は激減した。そのため、高い許容応力下での設計要求が高まり、局部的にはかなり大きな塑性変形を許容する設計に”恐る恐る”手をそめつつある。すなわち、局部的にも塑性変形を許容しない設計から、残留応力が働いていない状態でも局部的にはある程度の塑性変形を許容する設計を模索しつつある。

局部的にも塑性変形を許容しない設計において、溶接構造物の脆性破壊事故を防止するための定量的指標（小規模降伏条件下の破壊力学における破壊靭性値 K_c 、K_{ca} など）は明確であり、これが材料開発の先導的役割を果たしてきた。しかし局部的にはある程度の塑性変形を許容する設計では、き裂がなくても局部的に塑性域が生じ、その場に塑性域よりも十分小さなき裂が入っている、いわゆる大規模降伏条件下での破壊を防止するための定量的評価法の確立が必要となる。

大規模降伏条件下の破壊力学として、き裂前方に生じる塑性域をき裂の一部と仮想し、この仮

想のき裂部分にはき裂上下面間に降伏点レベルの結合力が働くと仮定したき裂結合力モデルで得るき裂開口変位（COD: Crack Opening Displacement)の実き裂先端位置の値(CTOD: Crack Tip Opening Displacement)が材料固有の値になったときに破壊するという COD 仮説がある。そして、局部的塑性域中の非板厚貫通き裂に関し、き裂前縁線に沿う K 値の内の最大値と同じ大きさの K 値を有する板厚貫通き裂に置き換え、CTOD 設計曲線（下記パラグラフ参照）で外力が作用した時の CTOD を求め、これが材料固有の限界 CTOD 値以下になれば、脆性破壊は生じないというき裂安全性評価法が Burdekin によって提案され、これをもとにした大規模降伏条件下の脆性破壊評価法が規格化され、ある程度の実績を有するまでになっている。

この手法は一様応力が作用する場に存在する板厚貫通き裂問題を、無理やり構造物に存在する表面き裂問題に適用したもので、安全側という配慮は随所に見られるものの、物理的意味の異なるパラメタを同一視するなど、問題点が多々存在する。すなわち、中央貫通き裂付引張試験片でき裂を挟んだ標点間距離間の変位を標点間距離で除した”ひずみ”を無限遠標点間距離に外挿して得られる”over-all strain”と CTOD の関係（これを CTOD 設計曲線と名づけている）から、構造物の局所的塑性域に存在する非板厚貫通き裂の CTOD を与えている。そこでは、局所的塑性域内に働くき裂垂直方向の平均的ひずみが”over-all strain”と同じであると仮定している。また CTOD もき裂先端から±45 度の線を引き、それとき裂面との上下交点間の間隔を測定したものと定義し直されている。しかも、非貫通き裂の CTOD を一応推定しているものの、表面き裂では実測可能なマウス部の COD を推定出来ないという欠点を有している。すなわち、評価された CTOD 値がどの程度の安全率を有しているかが感覚的にも理解できないものとなっている。

この背景には、一様応力場に存在するき裂を対象として非線形破壊力学が発展してきたという事情がある。また、K 値はき裂が存在しない場合には定義できず、き裂の存在しない状態からのき裂成長は破壊力学では取扱えないという思い込みが存在する。健全な構造物でのき裂発生から、大きなき裂に成長し、不安定破壊に至るこれまでの損傷を定量的に評価するアルゴリズムの開発を上記２者が妨げてきたものと考えられる。

破壊力学はき裂の挙動を取扱うための学問体系であり、巨視的な取扱いでき裂問題を定量的に評価する手法として発展してきた。小規模降伏条件下では弾性論的な重ね合わせが成立し、塑性挙動という複雑な挙動を考慮しなくても、き裂からの不安定破壊を定量的に論じ得てきた。また、き裂が存在する場からの疲労き裂成長を ΔK で推定できることが明らかにされてきた。しかし、き裂が大きくなるということは、新しい破面が生じることであり、非可逆的な現象が生じていることになり、何らかの形で塑性変形を考慮しなければ破壊問題を論理的に論じることは出来ない。

塑性域を上下面間に降伏点レベルの結合力が作用しているき裂と仮想するき裂結合力モデルで

は、この仮想のき裂は開口し、その開口変位は活固有変位※を表していることが明確になってきた。そして切欠を有する平面問題においては、無き裂状態（き裂長が 0）でもき裂結合力モデルが成立することが明らかとなっている。固有変位はその後降伏しない限りは、その大きさを保持することと、切欠底から発生したせん断き裂は最初の結晶粒界に達するまでは引張荷重も分担し、その後き裂開口モードが生じだすと仮定したアルゴリズムで、き裂発生と伝播問題を区別することなく疲労き裂発生寿命が妥当に評価できることを著者は明らかにしてきた。

さらに、構造に入ったき裂の成長過程におけるき裂寸法と K 値変化を無限板中の板厚貫通き裂に再現する等価分布応力（EDS：Equivalent Distributed Stress）という仮想的な応力分布下でのき裂結合力モデルに発展させた。そして、その座標上でのき裂開閉口モデルにより、ブロック荷重が作用して溶接構造物に入る表面き裂の発生・伝播曲線が妥当に評価されていることを示した。疲労で取扱う外力レベルは低いため、固有変位が小さく、その結果として EDS 上のき裂結合力モデルが有効な評価手段となっているとも考えられるが、論理的には上記 Burdekin が提案した CTOD 設計曲線を用いる大規模降伏条件件下での脆性破壊手法の欠点を解決できる、高ひずみ集中場における非貫通き裂からの破壊を論じ得る学問体系となる可能性を秘めている（これらは第 4 編で説明する)。

この結果近い将来、実働荷重下で構造的応力集中場から疲労き裂が発生・成長し、いつ脆性破壊に転化するかを破壊靭性値との関連で評価できるシステムが完成するものと期待される。これが完成すれば、荷重スペクトルデータと結びつけて、許容応力が机上で計算できるようになり、構造設計のパラダイム・シフトが実現でき、経験工学を超えた設計が可能となり、経済的に優れた安全・安心な構造が実現できるようになるものと期待される。

そこで本書では、産業革命以降の産業や社会の出来事と力学理論の発見の歴史関係を概観するとともに、現在構造設計分野を取り巻く各種技術についてまず触れている。さらに、現在の疲労設計に到った歴史を概観している。そして、実働荷重が作用する場合の応力集中場におけるき裂長 0 の状態からの疲労き裂成長曲線を推定できる評価法の理解のため、その基礎から現代にいたる発展について古典破壊力学として説明している。そして、これまでの疲労き裂発生現象解明の取り組みとは異なった観点から打ち立てた疲労き裂発生寿命予測法（健全な切欠底から最初の結晶粒界に達するまでの寿命予測法）について説明している。さらにこれを発展させた実働荷重を受ける実構造に関して、疲労き裂発生から、板厚貫通き裂、脆性破壊発生にいたる挙動をシミュレートできる今後の展開について解説している。

なお、本書を書き進めて著者の頭を整理する過程で、疲労限設計を機能させるためには、実際に生じるであろう最大応力振幅よりも大きな過大振幅荷重を積極的に与える必要があるという結論

※ き裂線に垂直な線上に沿うき裂線垂直方向の塑性ひずみを積分した線分にき裂結合力が弾性的に作用して得られる線分の長さ。

に至った。これに関しては第４編 3.3 章に記載している。すなわち、疲労限以下の一定荷重振幅下では、長時間繰返し負荷を受けるとき裂は発生するが停留き裂になる。そして、時系列的に苛酷となる負荷が作用する場合（苛酷な負荷といっても疲労限よりも小さい負荷しかかからないことを前提としている）、き裂は進展する。補強をすれば、作用応力振幅は小さくなるので寿命を延ばすことにはなるが（腐食が生じなくても）、いつかは壊れることになる。すなわち、いくら補強をしたとしても、時代とともに苛酷になる負荷が作用すると（これが疲労限以下であっても）、停留していたき裂は進展し、いずれ破損にいたることが予測され、疲労限設計は成立しないという結論にいたった。そして、き裂を伝播させないようにするには、供用前に疲労限程度の大きな荷重振幅を与えることであるという結論に至った。ただし、この考察を検証するには、長時間の実験研究を必要とする。

現在、社会インフラが老朽化し、その対策に多くの資源が投入されている。特に首都高速道路では、疲労き裂の存在が社会問題化し、補強対策に追われているが、なぜ多くの箇所で疲労き裂が生じたのかの根本原因を明確にできないまま、ただ設計時に想定していたより苛酷な負荷がかかったためという結論で作用応力を下げるための補強を行っているが、これでは根本的解決にはならないのでは、また現在行われているほど多大な費用をかけなくても、有効な対策が打てるのではないかという考えを持つに至った。

上記は著者の長年の研究を推し進めてきた流れの線上での考察であり、理論的に正しいとの自負はあるが、多くの人に理解いただくには、緻密な疲労実験が必要となる。疲労の研究は 160 年以上前から行われてきており、多大な資金がつぎ込まれてきている。疲労損傷を経験し、その防止のため作用応力を低減させることを繰返した歴史をもとに、経験工学的に許容応力が設定されてきたものと考えられる。その結果、疲労損傷は少なくはなってきていることと、長年研究されてきたので、疲労という学問分野の根本問題は解明され、疲労は成熟学問分野という位置づけがなされている。また、丸棒試験片を用いた多段多重試験結果では、過大応力は疲労寿命を短くするという、先に下線で示した著者の考察と真反対の実験結果がある [2)]。そのため、著者の考えに疑問をもたれる疲労の専門家が多いと思われる。丸棒では塑性域が試験片断面全体に広がり、弾性域で囲まれた拘束された状態でないことが、先に著者が述べた疲労限程度の過大荷重をかけて疲労限設計を成立させ得るという主張と真反対の傾向を生じる原因であるが、疲労の専門家は S-N 曲線をバイブル的に用いることに慣れ親しんでいるため、なかなか受け入れにくい考え方であろう。

しかし、首都高速道路の疲労き裂対策のために膨大な費用がつぎ込まれている現状と、他のインフラが設計寿命に近づき、延命対策を真剣に設定する時間的余裕もなくなりつつある現在、上記著者の考えが正しいか否かの決着を早急につけなければならないであろう。これには、多くの研究機関が一同に会し、緻密な実験計画を作成し、多くの疲労専門家の合意をとりつけた後、分担を決めて多くの試験設備を用いて、実験を遂行する必要がある。

著者は2007年に九州大学を退職し、社会人教育のため同大学に非常勤で雇われている身であり、後進のために、これまで研究してきたことを残そうとして執筆したが、その過程で上記のような重大な結論にたどり着いた。したがって、著者が旗をふって上記の検証を行うだけのバックボーンがない。そこで、本書に記載したことを多くの方が理解され、どなたかが音頭を取り上記の機運が早急に盛り上がることを期待して、本書の序としたい。

なお、著者と連絡をとりたい方は、以下までEメールいただければ幸いである。

2014年8月末

九州大学名誉教授

豊貞雅宏

Eメール : fl.toyosada@gmail.com

参考文献

1) 菊川、城野、宋 : 繰返し塑性ひずみと累積疲労損傷（疲労限以下の応力による疲労損傷)、材料 21巻、227,(1972),p.753-758

2) 日本材料学会疲労部門委員会座談会記録 : 実働荷重による材料の疲労に関する座談会、材料試験、Vol.8，No.72，(1959)，p.726-761

第１編　溶接構造設計の変遷と
き裂破壊評価法に関する研究歴史

まえがき

構造設計は世界的趨勢として「仕様設計」から「性能設計」に向かっている。我が国の土木業界では性能設計の範疇に入る「限界状態設計法」にすでに移行しており、部材が安全性を失う終局限界状態、使用性を失う使用限界状態、材料の疲労によって破壊にいたる疲労限界状態の３つが設定されている。このように限界状態設計法では目的に合わせて、複数の限界状態が設定される。

一般の溶接鋼構造物の歴史を振り返ると、溶接が構造物建造に使われるようになった 1940 年代から最近まで、何の前触れもなく一瞬にして破壊する脆性破壊を経験した。その防止対策に傾注した結果、1980 年代後半を境に脆性破壊事故は激減している。しかし、「疲労に対して長い研究と対策の歴史があるにもかかわらず、現代でも、金属疲労が原因の事故・損傷が後をたたない」という報告 [1]から分かるように、実働荷重下での疲労寿命を評価する術が存在しない。すなわち、160 年以上も続けられてきた研究と損傷経験の結果として結実している現行の疲労設計は、疲労現象とまともに向き合っておらず、真の疲労損傷防止対策には寄与していないと云える。

疲労寿命には応力振幅、平均応力が大きな影響を与えることは事実であるが、応力出現順序も影響を与えることが判明している。しかし、複数の試験体を用意し、それに各々負荷レベルの異なる一定振幅荷重を与えて得られる応力振幅と破断寿命の関係、いわゆる S-N 曲線を用いた設計法では、荷重順序の影響は全く無視され、しかもき裂の大きさに関する情報も全く含まれていない。

この現状で疲労限界状態を照査する場合、一生の間に構造物が受ける累積応力頻度分布と S-N 曲線を用いて、疲労被害度 D を求め、これをある値以下とするという手法を採用せざるを得ない。しかし D と具体的な疲労き裂の大きさとの間には、ほとんど優位な関係は見い出せていない [2]。また、疲労き裂を生じさせないことを目論んだ疲労限設計も機能しなかった例が過去に多く認められる [3),4]。これは、応力集中場において、応力の出現順序の影響も考慮できる疲労き裂発生寿命を推定する手法が未だ確立していないためと考えられる。そのため、疲労き裂が発見されれば、き裂を除去し補修するという対処療法的手法しか採用できず[*]、性能設計で取扱う事象とは程遠いものとなっている。

「性能設計」では、○○年後に、○○の水準までの性能を保証することが要求され、具体的な物理的変化が現われる時点の確率を明確化しなければならない。すなわち、経験工学によって設定されてきた「許容応力（度）法」に替わって、各種限界状態の破壊確率をある設定した値以下（あるいは信頼性指標を設定されたある大きさ以上）にすることで、構造物の安全性が担保されることになる。

そこで本編では、構造設計を巡る国際動向ならびにその鍵をにぎる信頼性設計の概要を説明する

---

[*] 疲労き裂が発見された場合に、該当部の応力解析を実施し、補強対策などを検討することが良く行われている。この場合は、荷重スペクトルは損傷前と同じであり、少々の補強では構造物の剛性は殆ど変化しないので、該当部の作用応力を下げることで寿命を延ばすことが出来る（ただし根本的対策とはなっていない）。しかし、構造要素に働く荷重スペクトルは、構造物の設置状態や使われ方で異なる。これが疲労寿命に影響を与えると考えられる。

とともに、溶接構造物での最大関心事であった脆性破壊防止対策が力学的観点からではなく、破壊靭性値の優れた構造が材料面ならびに溶接施工法の発展により機能していることを解説する。さらに、今にいたった疲労設計法の背景を疲労設計の歴史から考察し、現状の技術からは疲労限界状態設計法が機能しないであろうことを説明する。

1.　溶接構造物に関する設計の動向

1.1　構造設計法を巡る国際的動向

構造工学という学問が誕生する以前から、構造物は造られており、それは経験的知識とその伝承によって支えられていた。そこでは、成功と失敗を繰返しながら、機能性、経済性、安全性などのバランスした最適解を、ゆっくり時間をかけて見い出していた。それは”技術”というより”技能”に近いものであったと思われる [5)]。

1769 年 James Watt が往復運動しか出来なかった蒸気機関を､回転運動を可能とするものに改良した。これがイギリスでの工場の動力源として広く普及し、産業革命の起爆剤となった。そして鋼を利用する技術が必要となり、数学と結びついた材料力学に発展した。表 1.1 は産業革命後の製鉄技術と力学関連理論の歴史年表であり、産業革命の時代には弾性力学の法則がたくさん発表され、Bernoulli や Euler などの数学者の貢献が大きい。弾性力学は、機械や建造物などを機能的に使用し、安全性を担保する許容応力設計法の誕生を支えることとなった。

「許容応力設計法」は、通常の荷重が作用する状態を想定し、手計算が可能な弾性応力解析による応力が、許容応力を超えないことを照査する手法である。当初許容応力は、材料の降伏点に近い値に設定されていたと考えられるが、崩壊・座屈さらにはき裂破壊などを経験し、それらの防止のために、どんどん低くなっていき、構造種類毎に若干の差はあるが、概略降伏点の 2/3 か引張強さの 1/2 のうちの低い方という現行レベルに落ち着いてきた。この設計法での満足すべき指標は明快であるが、安全率の根拠や意味が明示的でなく、達成される構造物の余裕度が分からないなどの短所がある。

一方、まれにしか現われない大きな荷重が作用する場合、部材の塑性化を許容するが、崩壊や座屈を生じさせないことが重要である。これを目論んだ設計法として「終局耐力設計法」がある。この設計法では、作用荷重に荷重係数を乗じた終局荷重が常時作用しても、部材の応答応力・変形が終局強度・変形能力を超えないことを照査することになる。終局的な破壊に対する安全性が検証でき、構造の破壊過程や崩壊モードを理解しやすい反面、非線形解析が必要となる短所がある。

上記 2 つの設計法では、構造物に作用する荷重は既知のものと仮定して、設計荷重などが設定される。そしてこれらの設計法は「仕様設計」に分類されマニアルどおりにやれば失敗なく、作業も速くなるなど大量生産に適している反面、画一的になり新技術・新工法への対応が困難という側面がある。

しかし、構造物に作用する外力は統計量で与えられ、さらには部材強度も構成材料や工作精度などによりバラつきを有し統計量であるとの認識から、確率論を用いた信頼性設計が生まれた。この一つとして「限界状態設計法」が生まれ、構造物の破壊確率が許容破壊確率以下となることを照査

表 1.1　18 世紀以降の製鉄技術と構造力学の歴史年表（文献 5 の年表を間引きならびに斜文字で付加）

産業・社会の出来事

1735 Derby II 世が石炭高炉を操業（鋳鉄の工業生産、英）
1769 *Watt が往復運動しかできない蒸気機関を回転運動をできるものに改良（英）*
1779 アイアンブリッジ（世界初の鉄橋、英）
1784 Cort がパドル法を発明（錬鉄の工業生産、英）
1796 亜麻工場（鋳鉄による工場建築架構、英）
1824 Aspdin がポルトランドセメントを発明（英）
1825 Stephenson が蒸気機関車を完成（英）
1825 Gaunless 橋（世界初の鉄道用橋、錬鉄と鋳鉄、英）
1831 Faraday が電磁誘導を発見（電動機の原理、英）
1832 Chance が板ガラスの連続圧延製造法を発明（英）
1837 Euston 駅（錬鉄、英）
1851 Crystal 宮殿（錬鉄、英）
1856 Bessemer が転炉法を発明（鋼の工業生産、英）
1858 大島高任が洋式高炉の操業に成功（釜石）
1864 Siemens と Martin が平炉法を発明（鋼の工業生産、英、仏）
1866 英国海軍艇庫（世界初のラーメン構造、錬鉄）
1867 Monier が鉄筋コンクリートの特許（仏）
1870 頃　Simemens と Gramme が電動機を完成（独）
1874 Eads 橋（世界初の鋼橋、米）
1877 軍艦アイリス号進水（世界初の鋼船、英）
1880 電動エレベーターの発明（独）
1885 Home Insuran ビル（世界初の鋼製高層建築、Chicago, 米）
1887 Benardos がアーク溶接法を発明（露）
1889 エッフェル塔（錬鉄、仏）
1894 秀英印刷工場（日本初の鋼製鉄骨造建造物、輸入鋼材使用）
1899 Héroult が電炉法を発明（仏）
1901 官営八幡製鉄所が操業開始
1901 US スチール設立（米）
1911 Ford が自動車生産（米）
1912 Strauss が 18-8 ステンレス鋼を発明（独）
1913 Woolworth ビル（鋼製鉄骨造、242m、NY、米）
1923 関東大震災
1939 三井本館（国産の鋼による本格的鉄骨造）
1931 Empire State ビル（381m、NY、米）
1938 Wilson が高力ボルト接合実験（米）
1950 代 連続鋳造法の実用化
1951 Lake Shore Drive Apartments（CHI、米）
1954 Comet 機疲労き裂により空中爆発（英）
1956 第 1 回世界地震工学会議（Berkeley, CAL, 米）
1958 東京タワー
1961 Universal 圧延による H 形鋼（日）
1968 霞ヶ関ビル（日本初の超高層、147m）
1973 World Trade Center ビル（417m、NY、米）
1974 Sears タワー（米最高の超高層、442m）
1983 *TMCP 鋼実用化（日）*
1993 横浜 Landmark タワー（日本最高の超高層、296m）
1995 阪神・淡路大震災
1997 Petronas タワー（20 世紀最高の超高層建築、RC、452m、マレーシア）
1998 明石海峡大橋（20 世紀最長の吊橋、中央スパン 1,990m）
2011 *東日本大震災、福島第一原発水素爆発*
2012 *東京*Skytree*（電波塔・観光施設として開業、634m）*

力学理論の発見

1678 Hooke の法則（英）
1705 Bernoulli の梁理論（仏）
1744 Euler 座屈（独）
1744 Euler のたわみ曲線の方程式（独）
1807 Young 率（英）
1822 Cauchy の応力～ひずみテンソル（仏）
1823 Navier の単純支持板の解（仏）
1828 Green のひずみエネルギー関数（英）
1829 Poisson 比（仏）
1837 Saint-Venant の原理（仏）
1839 Poncelet の金属疲労（仏）
1840 頃 Clapeyron のエネルギー保存則（仏）
1843 Neumann の光弾性（独）
1850 Kirchhoff の平板理論（独）
1854 Zhuravsky の梁のせん断応力（露）
1855 Saint-Venant のねじり（仏）
1860 Lüder の降伏線（独）
1860 Wöhler の S-N 曲線（独）
1863 Airy の応力関数（英）
1864 Maxwell の相反作用の定理（英）
1864 Tresca の降伏条件（仏）
1872 Betti の相反作用の定理（伊）
1875 Castigliano の定理（伊）
1878 Grashof の平板近似解法（独）
1882 Mohr の応力円（独）
1883 Hertzian 応力（独）
1886 Bauschinger 効果（独）
1889 Engesser のタンジェント・モジュラス荷重（独）
1891 Bryan の板座屈理論（英）
1903 Prandtl の膜類似理論（独）
1913 Von Mises の降伏条件（独）
1920 Griffith の脆性破壊理論（英）
1924 Hencky のせん断ひずみエネルギー説（米）
1929 Wagner の反りねじり（独）
1932 Kármán の板座屈有効幅（米）
1934 Benioff の地震応答スペクトル（米）
1937 Nadai の正八面体せん断応力説（米）
1943 Johansen の降伏線理論（デンマーク）
1945 Freudenthal の信頼性理論（イスラエル）
1947 Shanley の有限変形座屈理論（米）
1950 頃 Prager *の塑性学（独）*
1951 Greenberg と Prager の上界・下界定理（米）
1953 Cross のモーメント分配法（米）
1958 *Noll による有理連続体力学*（米）
1974 *一定繰返し負荷中において塑性ひずみ突然増加現象の発見（疲労限以下においても）*（日）
1980 *橋口の下負荷面理論*（日）
2012 *橋口の有限変形論*（日）

することになる。ここでは目的に合わせて、複数の限界状態が設定される。部材が安全性を失う終局限界状態、使用性を失う使用限界状態の 2 つが、一般的には考えられている。しかし、ここでは、外力や材料強度（変形能）の統計値が必要となり、その整備は未だ不十分である。ISO2394（構造物の信頼性に関する一般原則）において限界状態設計法は「性能設計」の範疇に入ると見なしている。図 1.1 には仕様設計と性能設計の体系を示す。業界により多少の温度差はあるが、遅かれ早かれ世界的趨勢として、重要構造物の構造設計では性能設計の一つである「限界状態設計法」を課すようになるであろう（すでに土木、建築業界は限界状態設計法を取り入れている）。

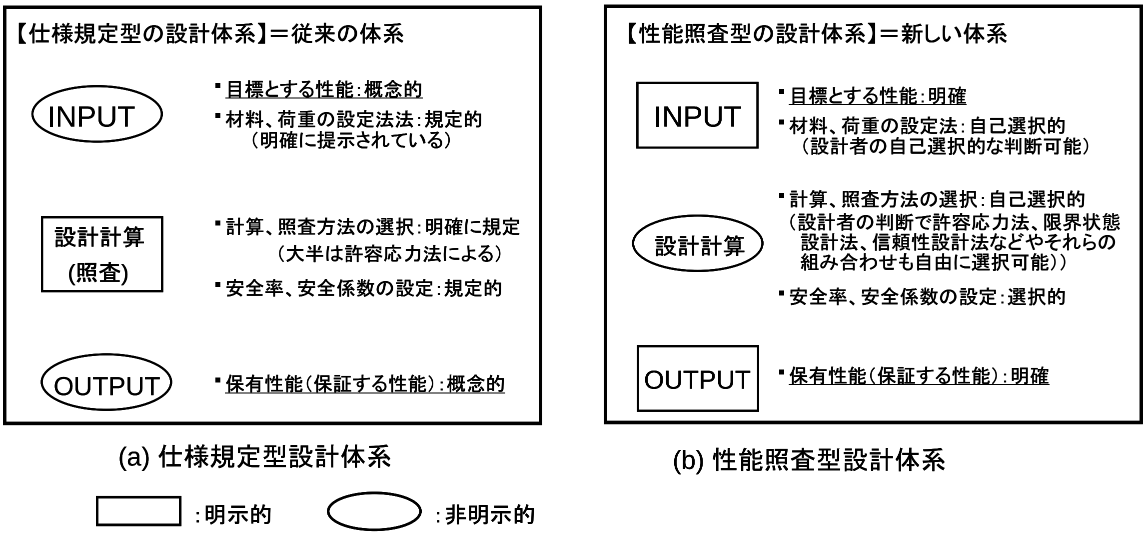


図 1.1　　　　　仕様規定型と性能照査型の設計体系

「仕様設計」では、材料を例にとると、鉄鋼、アルミニュームなど具体的な材料が指定されるが、「性能設計」では「通常の火事で、加熱開始後 20 分間燃焼しないもの、有毒ガスが発生しないものを用いること」などと規定され、これを満たせば良いことになり、構造物の発注者は、その大まかな姿と求めたい「性能」を提示し、受注者に自由裁量となる高い技術力を要求することになる※。そして、「仕様設計法」では、製作後発注者に引き渡せば瑕疵がない限り、構造物は受注者の手を離れるが、「性能設計」では〇〇年後に、〇〇の水準までの性能を保証することになり、受注者の責任やリスクは格段に大きくなる。

上記のように構造設計は、世界的にこれまでの確定論に基づく「仕様設計」から、確率・統計論に基づく信頼性工学を取り入れた「性能設計」の方向に向いており、設計の自由裁量が大幅に増大すると同時に製造者責任が非常に大きくなる。性能設計では、計画された期間内において設定された機能が働き、目論んだ性能が発揮できれば、「多少の不具合」（たとえば数㎜程度の割れ）が存在したとしても停留しているのであれば許容されることになる。

き裂や永久変形などが生じるためには塑性仕事がなされなければならず、「多少の不具合」が生じ

※自由裁量といっても、設計手順・設計図などを精査・承認される仕組みが必要である。例えば国際海事機関（IMO）では長期戦略プランとして、従来の仕様規定型(Prescriptive)から目標指向型（Goal-based)に条約規則への移行を決めており、一部すでに施行されている。この目標指向型も限界状態設計法の一つである。なお、この手法は Risk-based approach あるいは Safety-level approach と称されており、それによる設計は IMO や主官庁の委託を受けた船級協会の指針に基づいてなされ、精査・承認される仕組みになっている。

る閾値を設計で取り入れなければ「性能設計」は機能しない。これまでは弾性論に基づく構造設計がなされてきたが、「性能設計」では塑性論を考慮することが必須となろう。特に繰返し負荷時の塑性挙動を設計で考慮する必要があり、表 1. 1 に示した「1974：塑性ひずみの突然増加現象」ならびに「1980:下負荷面理論」は今後の構造設計において考慮されるべき事象であろう。本書第 4 編ではこれらの結果を間接的に取り入れているが、さらなる発展は今後に委ねることにしたい。

ともかく、「性能設計」が適用されると、構造物を製作する責任やリスクは従来よりも格段に大きくなるが、技術力のある会社が、これまでよりも業績を伸ばせる環境が整いつつあると考えて良い。

1.2　信頼性設計の概要

従来の「仕様設計」を行う限り、許容応力は規格などで提示されたものを使用することになるので、損傷は従来レベルを維持するものと思われる。しかし「性能設計」ではコスト削減の観点から、剛性要求部材を除き、より高い作用応力下で構造要素を構成する傾向が強まると考えられる。1.1 項で説明したように、「限界状態設計」では、各限界状態に関わる因子のばらつき、すなわち頻度分布の情報を必要とする。降伏点などのように平均値の付近にデータが集積する場合には、図 1.2(a)に示すような正規分布あるいはそのバリエーションである対数正規分布などになる。また、地震や波浪の場合のように、その大きさを横軸にとりその発生頻度を描くと、図 1.2(b)に示すように規模の小さなものは頻繁に起き、大きくなるにつれて発生頻度が急激に減少するような事象も存在する。

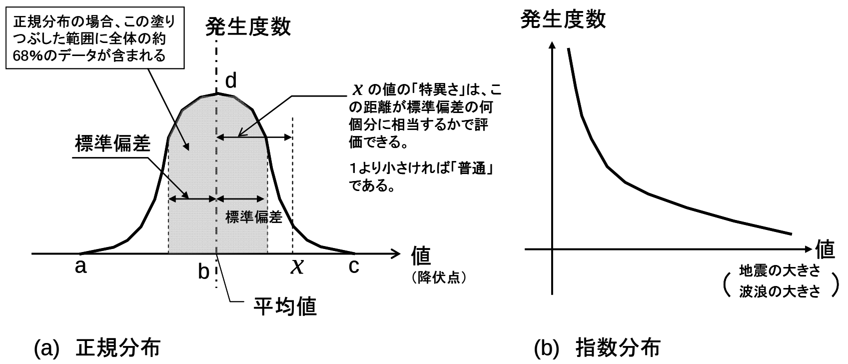


図 1.2 データの発生頻度についての典型的な 2 つの分布

後者の場合、ある一定期間内に生じると予測される「最大値」を確率的に求めることになる。この一定期間を確率・統計用語では「再現期間」、そして予測される最大値を「再現期待値」（あるいは最大期待値）と呼んでいる。統計理論によると、ある再現期間を設定すると、あるところに山があって両側に裾野が広がるという分布（一般極値分布と呼ばれている）になることが判明している。そして、これらの外荷重に対して構造物の応答解析を実施して、応力応答や変位応答が求められ、これらも「ある再現期間」を設定すると、通常は一般極値分布と呼ばれる分布形となる。

そして、構造に作用する外力の応答の結果として生じる作用応力（一般的には荷重効果と呼んでいる）と、各限界状態に耐え得る能力（これは耐力と呼ばれている）に対してそれぞれ発生頻度数の積分値を 1 とした確率密度関数の相対位置関係は、図 1.3 のようになる。ここで、耐力の確率密度関数が右側に、あるいは作用応力のそれが左側に移動すれば、破壊確率は小さくなる。例えば降

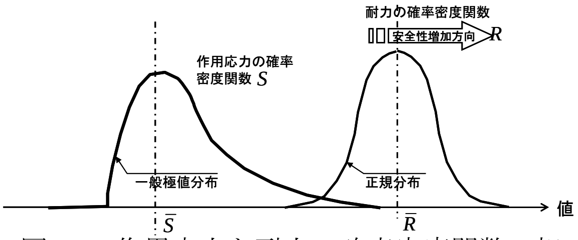


図 1.3 作用応力と耐力の確率密度関数の相対位置関係

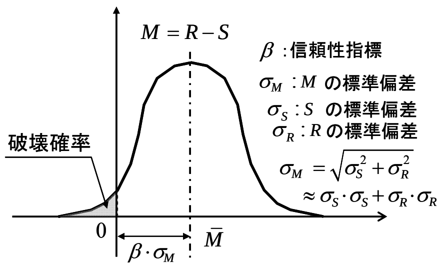


図 1.4 信頼性指標 β

伏現象を例にとれば、耐力の評価には降伏点が採用され、高張力鋼を使用すれば R は右に、S は作用応力となるので板厚を大きくすることで S が左側に動く結果、降伏が生じる確率は小さくなる。

安全である確率は $R > S$ となる領域の面積に対応する。この右辺を移項して $R - S > 0$ と読み替え、$M = R - S$ とし、M という名の新しい確率分布（確率分布は $-\infty$ から ∞ まで積分すると 1 になる）を考えると、M 分布は図 1.4 に示すようになる。ここで $\bar{M}$ は最尤値（さいゆうち）（最も頻繁に出現する値。正規分布の場合は平均値に一致する）である。したがって、$M < 0$ となる箇所が不安全となり、ハッチングした面積が「安全でない」とされる確率で破壊確率ということになる。

そして、$\bar{M}$ から $M = 0$ までの距離が、M 分布の標準偏差 σ_M の β 倍となっている場合の β を信頼性指標と呼んでいる。標準偏差内には非常に多くのデータが含まれているので（正規分布の場合には図 1.2(a)に示したように約 68%）、β は少なくても 1 以上にしておく必要がある。M が正規分布の場合、破壊確率は $\beta = 1$ で 0.15、$\beta = 2$ では 0.02、$\beta = 3$ では 0.001 程度となり、β が大きくなると急激に破壊確率は小さくなる。実際の設計では β は 1 から 2.5 ぐらいの値が採用されている。

以上「信頼性設計の考え方を導入した限界状態設計法」では

1．ある限界状態における荷重効果※ S の確率分布を求める。この分布の特性値は、その最尤値 $\bar{S}$ と、標準偏差 σ_S となる。
2. 耐力 R の確率分布を求める。この特性値は、その最尤値 $\bar{R}$ と、標準偏差 σ_R となる。
3. R と S から、その差となる確率分布 M（$= R - S$）を求める。これより、その最尤値 $\bar{M}$（S が正規分布でない場合でも M が正規分布で近似できる場合もある。この場合は平均値となる。）と標準偏差 σ_M が得られる。
4. 原点（$M = 0$）から M の最尤値までの距離を σ_M で除した信頼性指標 β を求める。
5. β の値が、目標とする信頼性指標 β_T よりも大きいことが確認できれば、初期の目的が達成されたことになる。

このように、「性能設計」では、対象とする事象に関わる因子の確率密度関数、あるいは頻度分布が既知でなければならない。しかし、これらのデータ収集はあまり進んでおらず、実際の設計では下記の簡便法が採用される場合が多い。すなわち、ある限界状態において、

$$\phi \cdot \bar{R} \geq \gamma \cdot \bar{S} \tag{1.1}$$

ここで、

※応力（変位）応答の結果生じる対象とする限界状態を引き起こす作用に関するパラメタ（作用応力など）

ϕ ：耐力係数
γ ：荷重係数
$\bar{R}$ ：公称耐力の最尤値
$\bar{S}$ ：荷重効果の最尤値
であれば安全と判断されることになる。ここで、$\phi/\gamma=\eta$ とすれば、上式は

$$\eta\cdot\bar{R}\geq\bar{S}\quad（ただし\eta\leq 1）\tag{1.2}$$

という式になる。これは「安全率によって低減された耐力の値が作用応力よりも大きければ良い」という意味で、許容応力設計法の考え方そのものである。しかし、耐力係数や荷重係数には「信頼性指標」という値が含まれており、これによって構造物の安全性を定量的に表せるという点ならびに限界状態毎に安全性を評価出来るという点で、許容応力設計法とは根本的に違っている。さらに端的に違うのは、耐力係数や荷重係数としてどのような値を採用するかを設計者に委ねている点である。この考え方は日本溶接協会の欠陥評価の規格 WES2805[6)]にも採用されている。

現時点では、大半の構造設計者あるいは開発担当者が耐力係数や荷重係数を決めるだけのバックデータを集積できておらず、結果的には現行ルールと同程度の安全性になるように設定されているのが現状である。これまでの溶接構造物の損傷をみると、溶接部が絡んだ損傷が圧倒的に多く（溶接部は母材より劣ることを見込んで設計されているので、溶接部は悪いとはいえないが）、溶接技術者がその原因を解明してきたものが多く存在する。限界状態設計法は個々の限界状態に対しての安全性を担保するための設計手法であり、少なくとも脆性破壊や疲労破壊といった「き裂が構造の安全を左右する限界状態」に対しては、構造設計者の助けを借りて溶接技術者が主体となって、その具体的な設計手法を開発･適用していくことが望まれる。

1.3 溶接構造設計の軌跡

溶接が構造物製作に適用される以前は、リベットやボルト結合によって構造物が造られていた。当時は、構造に崩壊や座屈などの大きな変形を生じさせないことを目論んでいたと思われる。しかし、構造物の製作に溶接が適用された 1940 年代に橋梁 [7)]と船舶 [8)]（米国で建造された戦時標準船）で脆性破壊を経験した。後者の損傷船から、脆性き裂が発生した部位の鋼板、通過した鋼板ならびに停止した鋼板からシャルピー衝撃試験片（以後シャルピー試験（片）と記す）を採取し、それらの試験結果と脆性破壊事故とを対比するなどの大々的な調査が行われた。その結果、使用温度において 28J/cm^2 以上の吸収エネルギー（靭性値）を有していれば脆性破壊が生じていなかったという結果を得、脆性破壊を考えなければならない部材には靭性を要求するようになった。

その後も、圧力容器、船舶、橋梁などで脆性破壊を経験したため、面心立方格子を有する材料（辷り易く脆性破壊が生じにくい材料。一般に高価）を用いる構造（航空機他）を除いて、脆性破壊を生じさせないための対策が最優先となった。そのためか、繰返し負荷が作用して破壊する事象を考慮しない設計が一般的となった。すなわち脆性破壊は人命や財産を一瞬のうちに奪い去る重大事故になるので、この防止が最重要で、それに傾注したこともあり、疲労を考慮しない設計が一般的に

なされてきた。

米英が研究を先導したが、日本では産官学一体となった脆性破壊防止に向けた研究により、破壊力学分野が大きく発展をとげ、切欠が鋭くなるほど、また板厚が大きくなるほど脆性破壊が起こり易いこと、引張残留応力が高くなるほど脆性破壊強度が低くなること、さらには高速で負荷されるほど脆性破壊が起こりやすくなることなどが明らかとなった。さらに金属学と一体化した破壊力学研究により、溶接熱サイクルを受けると以下の 2 つの問題が生じることが明らかとなった。１つは溶接ボンド部近傍で結晶が粗大化して脆化し、この脆化部にき裂が突入すると低応力破壊する傾向にあること、他の１つはき裂などの欠陥が存在する箇所に青熱脆性温度域の熱サイクルが作用すると脆化する（HSE：Hot Straining Embitterment）現象がある[9,10]ことが判明した。そして、破壊靱性値を高めるためには P、S などの不純物元素を極力少なくすることと、鋼材の結晶粒を細かくすることが有効であること、さらには各合金元素ごとあるいはその組み合わせが靱性や強度に果たす役割などが解明され、溶接材料も含めた高靭性材料の開発がなされた。

溶接部の靱性は母材のそれより一般的には劣るので、溶接構造物では脆性き裂は溶接部から生じ、溶接残留応力の存在により、溶接線より逸れて母材に進入する傾向があり、母材の靱性が高いと万一脆性破壊が発生しても、母材で脆性き裂を停止させ得ることが期待された。そして、破壊靱性値によって脆性破壊発生と脆性破壊伝播停止を定量的に論じることのできる破壊力学が発展した。ここで、脆性破壊発生試験としては、ディープノッチ試験、COD 試験、コンパクト・テンション試験などがあり、脆性破壊停止試験としては、ESSO 試験、二重引張試験などがある。そして、これらの試験で得られる破壊特性はどちらも破壊靱性値と称されているが、き裂発生とき裂伝播停止を規定する破壊靱性値はお互いに異なっている。

上記研究過程において、実用的には母材の破壊靱性値は脆性き裂伝播停止能力を表しており、脆性破壊発生にはき裂発生部の破壊靱性が主因子となることが判明し、シャルピー値は母材だけでなく、溶接金属部、ボンド部ならびに熱影響部の値が重要であるという認識がなされた。そして、崩壊や座屈を生じさせないための引張強度や降伏点など、全体強度に関わる配慮だけでなく、脆性破壊を生じさせないための配慮が構造設計（溶接構造物の）では重要という認識がなされた。

1980 年代後半、製鋼工程においてスラブ冷却過程の A_3 変態点直上で圧延をすると結晶粒を細かくすることができ、これまでよりも少ない C 量で所定の強度を保証できる TMCP 鋼（Thermo Mechanical Control Process Steel）が日本で開発された。この発展過程で P と S をそれまでの 0.02％オーダから一桁少ない 0.002％以下にまで低下させる技術が開発され（ただし、P については一般的には 0.015％レベル。転炉でのダブルタッピングあるいは Ladle Refining で 0.002％以下を達成）、大幅な価格上昇なしに市場に供給されるようになった。このことにより、溶接ボンド部近傍の粗粒域の靭性が大幅に改善された。ただし、この粗粒域が A_1 変態点と A_3 変態点の間（いわゆ

る二相域）の最高到達温度を有する熱サイクルに晒されると、島状マルテンサイトと称される組織が現れ、局所的に極低靭性域（LBZ : Local Brittle Zone）が形成される[11)]こと、さらに後続の熱サイクルで 450℃以上の高温に晒されると島状マルテンサイト (M-A)が分解し、靭性が回復する[12)]ことなどが判明した。そしてこの LBZ に、ある大きさ以上になったき裂が突入すると、低応力破壊を引き起こす可能性のあることが判明した（従来鋼でも M-A が生成し、TMCP 鋼の M-A 部より低靭性となっている)。しかし、通常の継手では、疲労き裂が生じたとしても、大きなき裂に成長してから､この LBZ を横切る確率は極めて小さいため脆性破壊事故は起こりにくくなっていると判断される。

実際 TMCP 鋼の利用拡大等により、1980 年代後半から溶接構造物の脆性破壊事故は激減した。しかし、上記の様々な現象を完全に定量的に推定する技術は未だ確立されていない。事実、1995 年 1 月 17 日に起こった阪神大震災で脆性破壊を起こした構造物のなかには、地震による高速負荷（衝撃荷重）が原因であると考えられるものも含まれており、種々の条件下での脆性破壊発生強度の推定技術は未解決のまま残されている。

脆性破壊強度を推定するためには破壊靭性値を把握する必要がある。そして破壊靭性値を求めるには疲労予き裂を導入した試験片を用意する必要がある。試験片作成に際して、疲労予き裂を入れるという煩雑な前準備が必要で、工業的試験としては破壊靭性試験は適していない。通常用いられる V ノッチ･シャルピー試験片は切欠先端半径が 0.25mm であり、疲労き裂と比較するとひずみ集中率が小さく、試験片厚も元厚より小さいため、三軸拘束が小さくなっており、破壊靭性試験片よりは脆性破壊が生じにくい傾向を有している。そのかわり、衝撃負荷を与えることで、脆性－延性遷移温度を高温側にシフトさせ、脆性破壊の起こしにくさをカバーしている。破壊靭性値とシャルピー試験で得られる靭性値との間には、上記の板厚、切欠尖鋭度、ひずみ速度という因子が存在し、それらの影響が複雑に絡み合っている。

以上は材料特性の観点からのものであるが、破壊靭性値と対比する力学的指標に関しても妥当な評価法が与えられているとは云い難い。すなわち、高ひずみ集中によりき裂が存在していなくても局部的に引張塑性域が形成され、その場に小さな表面き裂が存在する場合の破壊パラメタがいくらになるかも未だ明確になっていない（CTOD 設計曲線はこの問題を取扱ってはいるが、表面き裂のマウス部の COD がいくらになるのかも与えられない)。これら材料面と力学面を結びつけた理論的脆性破壊強度推定法は未だ確立されていない。均質材についてでもこのような問題が横たわっているので、溶接継手という不均質材に対して、シャルピー試験結果に基づいた理論的・定量的破壊防止法は殆ど分かっていないというのが現状である。

しかし、シャルピー試験は簡便な試験であり、実際の脆性破壊事故（戦時標準船の事故）の調査に用いられ、その結果が、定性的には事故の傾向とある程度対応していたため、工業的試験として

用いられてきた。その後破壊靱性値《疲労予き裂を入れた試験片に準静的単調増大荷重を与えて破壊した時の応力拡大係数（K 値：き裂先端近傍の応力分布の度合いを規定する係数）を破壊靱性値と呼んでいる》と靱性値（シャルピー試験で得られる吸収エネルギー）との相関が調査され、煩雑な破壊靱性試験に代わって靱性値から破壊靱性値を推定する研究もなされてきた。しかし、上記のように破壊靱性値と靱性値間の理論的定量関係は殆ど解明できておらず、脆性破壊が問題となる溶接継手という不均質材に対する破壊靱性値をシャルピー試験による靱性値から推定することは当然困難である（特に１温度の靱性値からでは不可能に近い。板厚、切欠尖鋭度、ひずみ速度が破壊靱性値に及ぼす影響は鋼材毎に異なると考えられるので、靱性値から破壊靱性値の推定に際しては相関関係がどこまで成立しているのかを十分に検討すべきである。)。

構造安全を担保するための規格では、破壊靱性値を求めることの煩雑さ、ならびにこれまでの実績を参考にして、破壊靱性試験に替えてシャルピー試験による靱性要求で済ますことができるものが多い。しかし、これらの規格は従来の経験から逸脱しない構造が、従来と同じ使われ方、あるいは従来と同レベルの負荷を受ける場合を想定し､あくまで品質管理的発想からの要求をしたもので、従来の経験から逸脱するもの、例えば従来より高い許容応力を採用するような場合を念頭に置いたものではない。

したがって、構造設計に際しては各種規格を満たしているから安全だという単純な対応をすることなく、これらの背景を十分理解した上で、規格で無視している事象も考慮するという慎重さが必要であろう。

2. 溶接構造設計が直面している問題点

2.1 疲労損傷の顕在化

溶接鋼構造物では一瞬に壊れる脆性破壊を経験し、経済的に大きな打撃を受けただけでなく、多くの人命を失ったことから、脆性破壊防止が最優先課題であった。したがって、一般的には疲労にまでは手がまわらず、設計時に疲労を考慮していなかった。

脆性破壊防止のための力学面と金属学面からの研究・開発に多くの資源が投入された。力学面からの研究は画期的には進展しなかったが、製鋼の圧延時に A_{r3} 変態点直上で強圧下することで結晶を微細化し、その後の結晶の成長を抑える加速冷却 TMCP 法が開発された。この冷却過程では冷却速度を制御して平坦な残留応力になるように作り込んでいる。そして金属学面から溶接金属ならびに溶接熱影響部の結晶を微細化して高靱性化する技術が次々と開発され、大幅なコスト上昇を伴うことなく､実構造を構成する部位を高靱性に作り込む技術が開発された。また TMCP 技術を発展させるために、S を 0.002％以下というレベルにまで鋼を高純度化することで、さらに高靱性化されてきている。これに伴い、C 含有量を少なくして所定の強度に作り込むことが出来るようになり、

溶接性も格段に良くなっている。また、これら鋼材に適合する溶接材料も開発された。

TMCP 鋼の利用拡大が本格化した 1990 年代半ばから、軟鋼に取って代わって、TMCP 鋼が一般溶接構造物に広く用いられるようになった。これは、最適な圧延プロセスによって結晶粒を微細化し、コスト上昇を殆ど招かないで、溶接性が良好で高靭性な 480MPa 級高張力鋼が供給されるようになったことによる。すなわち、降伏点および引張強さが高くなったにも関わらず、予熱なしで溶接でき、しかも靭性がこれまでの軟鋼溶接継手より概して良くなっているためである。

当然、降伏点、引張強さの高い鋼板を使用するので、許容応力を高くしたいという要望が出された。業界ごとに種々の検討がなされ、軟鋼の場合の許容応力よりは高い許容応力が設定された。そして、これらの検討結果に従った 480MPa 級高張力鋼を用いた各種溶接構造物が建造された。しかし、繰返し荷重を受ける構造物では、この時期疲労損傷が多発した。

図 2.1[13)]は広幅の十字継手ならびに突合せ継手試験片を用いた完全片振り疲労試験結果を取り纏めたものである。すなわち、母材の 0.2％耐力（ただし 280MPa のデータについては降伏点）と 2×10^6 サイクルにおける時間強度（ほぼ疲労限に対応している）との関係が調べられている。図中には母材平板の疲労試験結果も示されている。母材平板では降伏点が大きくなると、疲労強度も上昇しているが、溶接継手では、母材強度に関係なく、疲労強度はほぼ一定で、場合によっては、かえって疲労強度が小さくなっているようにも見れる。この原因としては、応力集中と溶接残留応力の存在があると考えられているが、明確な原因は不明と報告されている [13)]。

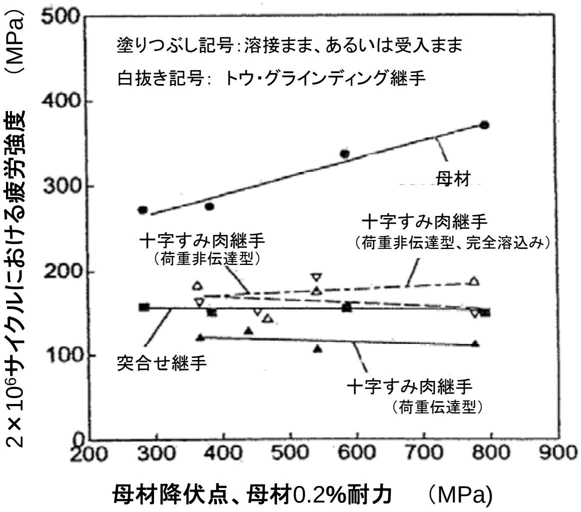


図 2.1 広幅溶接継手の疲労限と母材降伏点の関係

したがって TMCP 鋼採用当初許容応力を上げた分、相対的に疲労強度が小さくなり、疲労損傷が多発した。しかし、疲労は応力集中箇所近傍の部分的な補強や、部材配置等によって生じにくくすることが出来るので、それらの対策を施した現在では通常の状態に落ち着いてきている。脆性破壊事故が激減した今、これまであまり問題とされなかった疲労損傷に目が向き、疲労設計を要求する案件が増えてきた（き裂が存在すると脆性破壊が生じやすくなるので、疲労き裂の発生・成長を遅らせることは、脆性破壊防止にも寄与することになる）。また、橋梁や高速道路など社会インフラの老朽化により、疲労き裂の存在がそこかしこで確認され、限られた予算でいかに効率よく安全・安心を担保するかが大きな関心事となってきている。

480MPa 級高張力鋼より高強度の高張力鋼に関しても、TMCP 法発展の過程で開発された不純物

元素低減技術により、焼入れ、焼戻し効果がより働くようになり、従来よりも格段に性能の良いQT 鋼が開発された。そしてこれらに適合した溶接材料ならびに溶接施工法も開発され、従来よりも高靭性の継手で構成された構造物（例えば東京スカイ・ツリーでは、降伏点が 630MPa クラスの 80mm 厚鋼管やさらに高強度の 780MPa 級鋼（低 YR-HT780）などが使用されている [12)]）が世に送り出されている。

2.2 疲労設計の歴史概要

表 2.1 に疲労設計に関わる主な研究と出来事を示す。疲労損傷は繰返し負荷を受けるあらゆる機械、構造物で経験している。き裂が成長して車軸や車輪が折れて脱線した列車事故や、隔壁や胴体でき裂が板厚貫通し、急激な気圧変化がもとで空中爆発した航空機事故では多数の人が犠牲になっているため、列車や航空機は疲労を考慮した設計がなされてきた。しかし、一般の構造物では、脆性破壊防止に傾注したこともあり、一般的には疲労を考慮した設計はなされてこなかった。

本格的に疲労の研究が始まったのは、1852 年に Wöhler が主導したドイツの鉄道実験所においてである。彼らは回転曲げ疲労試験機を作成して、同じ形状・寸法の試験片を多数用意して種々の大きさの一定振幅荷重を与え、試験片が破断するサイクル数（寿命）を求めた。それらの結果をもとに、疲労限を含めた S-N 曲線（S：応力振幅、N：破断にいたるまでのサイクル数）で疲労寿命が表せることを示した。すなわち、S-N 曲線は 1860 年にはすでに確立している。

しかし、構造物には一定振幅の荷重だけが作用するのではなく、種々の振幅と周期を有する荷重がランダムに作用し、それに応答して構造物の各所には時々刻々変動する応力（変動ひずみ）が作用する。このため、外力の特性を表現する必要があり、荷重スペクトルの概念が 1920 年には確立した。そして種々の構造に対して荷重スペクトルの計測が行われてきた。またこれをもとに確率統計論の助けを借りて、構造物に作用する荷重時刻歴をシミュレーションできる技術が電子計算機の発達とともに開発されてきた。

一方、1920 年頃はまだサーボ疲労試験機は出現しておらず、応力振幅の変化は機械的に行なわれており、完全な実働荷重を与えることは出来なかった。Gassner は航空機を対象に出現確率の低い高応力サイクルを含んだ荷重スペクトル再現区間を選定して、それをもとにした 8 段階ブロック振幅応力を与えることにより、実働下における疲労寿命が評価できると主張した。

一方、応答応力時刻歴より、疲労損傷が生じるか否かを判断するための応力サイクルの波形計数法が、主として航空業界に携わっていた研究者（オランダ国立航空研究所のSchijveを筆頭として）らによって種々提案された。

さらに、変動荷重下での疲労寿命を推定する方法が、1924年から1945年にかけて提案された。一定応力振幅 S_i を作用させて N_i サイクルで破断したとして、この応力レベルの応力振幅が対象とする構造に n_i 回作用すると、疲労被害は n_i / N_i （の関数）になると仮定し、異なる荷重レベルのものに対しても同様の疲労被害が生じ、それらの和が1になったときに疲労が生じるという、いわゆる線形被害則が1924年から1945年にかけて提案され、その内の最も簡単な形のMiner則が現在でも、経

表 2.1（その 1/4）　疲労設計に関わる歴史年表

1837 : Clausthal 鉱山で稼働中のコンベアチェーンで生じた破壊原因を調べるための試験機を開発。その疲労試験結果を発表。(Albert)

1842 : 鉄道車軸の疲労強度に関し、結晶粒内にき裂を含みにくい鍛造で製作することを提唱。(Rankine)

1842 : ベルサイユで機関車車軸損傷、60 名が死亡。

1853 : 書籍"Resistance des Materiaux"で郵便馬車の車軸交換を 60,000km 走行で行って（Safe Life 設計の先駆け）いることを報告。(Morin)

1854 : ビール醸造設備、送水ポンプ、プロペラシャフト、クランクシャフト、鉄道車軸、レバーならびにクレーンの損傷報告において疲労という言葉を始めて使用。(Braithwaite)

1852～1869 :　ベルリンに設立した実験所で疲労破損に関する系統的な研究実施。(Wöhler)

1858&1860 :　2 度にわたって鉄道車軸の実働荷重を計測し、衝撃係数が 1.33 であることを示す。(Wöhler)

1860: 寿命のばらつきと疲労限を含めた S-N 曲線の確立。「耐久限度」の概念。(Wöhler)

- 列車のスプリングでは普段作用している荷重は比較的小さく変動も小さいが、時折生じる最大応力は大きいという例をあげ、最大応力の許容値は、普段作用している荷重よりもずっと大きく設定しなければならないことから分かるように、静的強度と関連付けされた実働最大荷重に対する安全率と、許容応力振幅に関する安全率の二つを設計に際しては考慮する必要があることを主張。さらに部品にとって寿命が有限で良いか、あるいは無限としなければならないかも考慮して安全率を定めるべきと主張。

1864 : 繰返し応力下の錬鉄製の桁は最高でも極限強さの 1/3 で損傷するという結果を発表。(Fairbairn)

1870 : 疲労強度の系統的研究の最終報告書を発表。(Wöhler)

- Wöhler 則、「①材料は静的降伏強度より小さい応力でも繰返し作用すれば破壊する。②疲労破壊の支配的因子は応力振幅であり、平均応力は 2 次的因子である。」
- Prussian Railway Service で使用された実寸大の車軸や小さい機械に用いられた多くの構造部材に対して、曲げ、ねじりおよび軸負荷を与えた疲労試験結果

1886 :　両振負荷下での金属の弾性限界は、単調な変形で観察されるものと異なる（Bauschinger)。

- Bauschinger 効果は、繰返し応力による弾性限の変化（彼の定義）

1898 :　無限板中の円孔ではＫｔ＝３と解析（Kirsch)

1903 :　回転曲げ試験片の表面ですべり帯を観察（Ewing&Humfrey)

1910 :　有限寿命域に関し、縦軸に応力振幅の対数、横軸にサイクル数の対数で表示すると直線となることを始めて示す。(Basquin 米国)

1905～1925 : 航空機のフルスケール疲労試験（英国王立航空協会の施設で)。

1920 :　ひずみエネルギ解放率一定説（Griffith)

1927 :　Dornier"Merkur"の翼桁締め具の疲労損傷（6 名死亡)。Handley-PageW-10 連結棒ボルトの疲労で墜落。

1920～1935 :　荷重スペクトルの概念（Batson&Bradley)

荷重スペクトルの計測：

- 自動車のバネ（Batson&Bradley)
- 農業機械（Kloth、Stroppel)
- 航空機（1932～DVL ドイツ技術者協会)、(1931～NACA)
- "航空機に働く荷重は、大小の振幅が様々な周波数で生じている"　(Teichmann&Michael,1933)
- "翼の荷重計測では、重心の加速度、翼のそり、および高荷重作用時の翼部材のひずみを対象にするべき" (Kaul 1938)

1934 : 転位論（Polanyi)

1936 : 最初の疲労き裂伝播試験（Forest)

表 2.1（その 2/4）　疲労設計に関わる歴史年表

1938：Thum の指導のもと、実構造を用いた実働荷重下の疲労試験をドイツ技術者協会が実施。疲労辞典を創刊。しかし非公表（ランダム荷重下の方がブロック荷重下よりも短寿命となったため（Schijve からの情報）？あるいは第２次世界大戦前夜のため？）

1939：Polanyi の転位論を疲労に適用（局部的な延性低下後、疲労き裂発生。繰り返し硬化論）。(Orowan)
断続的成長モデルであるが、後に電子顕微鏡観察により、疲労は連続的なき裂成長であることが確認される。

1939: 耐久性試験用の変動振幅荷重。(Gassner)
- ・実働荷重を応力スペクトルという形で正しく計測すること。また飛行時間、距離毎のサイクル数を計測すること。
- ・対象部材に作用している力、モーメントを正確に測定し、類似部品に働く妥当な荷重を推定すること。
- ・短期計測から生涯の荷重スペクトルを適切に外挿すること。
- ・出現確率の低い高応力サイクルを含んだ適切な荷重スペクトル再現期間を選定すること。
- ・評価対象物の荷重スペクトルを再現したブロック変動振幅荷重試験を行うこと。
- ・両対数グラフの縦軸に最大荷重振幅スペクトル、横軸にサイクル数をとって疲労試験結果を整理
- ・統計的根拠のもとで計算された安全率を採用して要求される生存確率を決定する

1939：材料の静的強度（Weibull）

1939：MIT と CALTECH が共同で電気抵抗ひずみゲージを発明。(Ruge & Forrest,Symmons & Clarly)

1941：Manson-Coffin 則（低サイクル疲労）

1924～1945: 変動振幅荷重下における累積被害の理論
- ・Palmgran(スウェーデン 1924)
- ・Langer（アメリカ 1937)
- ・Serensen（ロシア 1938)
- ・Miner（アメリカ 1945)・・・最も簡単な線形被害則

1922～1956：Thum 一派（Darmstadt 工科大学）524 編の論文発表
- ・応力集中係数
- ・疲労限の簡易計算法
- ・車軸
- ・疲労限に対する機械仕上げに伴う表面傷の影響
- ・腐食環境も考慮した，疲労限に対する試験振動数の影響
- ・焼入れ
- ・疲労破壊に関する基準
- ・低温下での疲労限
- ・疲労限に対す予ひずみの影響
- ・シャンク径が減少したボルト
- ・鋳鉄，マグネシウム合金ならびにボルトの耐久疲労線図
- ・残留応力とそれが疲労強度及ぼす影響
- ・窒化が材料の疲労強度に及ぼす影響
- ・表面硬化
- ・自動車バネの疲労強度
- ・寸法効果
- ・鋳造クランクシャフト
- ・ドライブシャフト
- ・溶接継手，リベット継手
- ・キー溝付きシャフト
- ・腐食疲労
- ・ショットピーニング
- ・ハブジョイントの疲労強度
- ・フレッティング腐食
- ・鍛造鉄
- ・ギア

表 2.1（その 3/4）　疲労設計に関わる歴史年表

・有限寿命領域における疲労強度
・許容疲労応力

＊内外のそれまでに分散されていた疲労の知識を集約し、意図的にそれらのなかの食違いを埋める論文を発表。
一般技術者と設計者が利用しやすい形に纏める。

＊試験片の疲労挙動を実構造物に適用することは困難と主張。

＊ 構造要素を用いた実働荷重下の疲労試験のみが、供用中の疲労強度を保証する唯一の手段と主張

1930 代: Vickers 製 Wellington 爆撃機の疲労による致命的な 20 機以上の墜落事故。南アでの Ju-52Junkers の翼の疲労破壊。10 機の Me-110 がフラッターによる水平尾翼肋骨が疲労破壊し墜落。

1945～1960： ドイツを中心に膨大なトラックもしくは自動車部品の疲労破壊を経験

1948：LBF を設立（Gassner が Svenson と共同で）（Laboratorium fur etriebsfestigkeit)。
ドイツの自動車とトラックの製造業者からの委託により疲労研究（1959 までに自動車会社は自前の巨大な疲労研究所を設立）

1954：2 機のコメット機が疲労で墜落（35 名、21 名死亡）。
与圧をかけた後の実機疲労試験結果をもとに設計。製造時には与圧を作用させなかったため窓枠コーナに圧縮残留応力が存在せず。

1955：コメット機と DC6,DC7,Electra などの疲労破壊事故を契機に safe life 設計、fail safe 設計に対する議論が行われると同時に、実機を用いた複雑な飛行荷重による試験、いわゆる full-scale 疲労試験の実施が規格化される。
fail safe 設計は徹底的なメンテナンスと検査が必要で、結果的には民間航空会社は不採用。

1959: 材料学会疲労部門委員会「実働荷重による材料の疲労に関する座談会」開催。
2 段 3 重重複繰返し応力試験結果。

1954：自動車分野での実働荷重負荷と変わらない可変振幅試験と考えられる 8 段階ブロックプログラム試験を考案(Gassner。荷重スペクトルの研究に従事した Svenson と共同で）

1956: 航空機分野での 8 段階ブロックプログラム試験を考案

1960 代：油圧サーボ疲労試験機の登場
NASA、オランダの NLR（航空研究所）、ローキード社が実機を用いたランダム荷重下での大々的な疲労研究を実施→**ランダム荷重下の疲労寿命は、同じ荷重スペクトルを有する 8 段階ブロック荷重下の寿命より短くなるというショッキングな結果**
・（航空機と自動車・車両）**開発時に実機による耐久試験で寿命確認**
・（航空機と自動車・車両以外）**疲労限設計もしくは線形被害則と経験工学により疲労設計**

1958： Polaris のロケット（超高度鋼製）圧力試験中に、微小欠陥から脆性破壊でばらばらになる。

1958： ボーイング B-47 爆撃機 2 機が翼の疲労破壊が原因で墜落。さらに少なくとも 2 機以上の爆撃機が同様の原因で墜落

1962： Paris の疲労き裂伝播則

1968： Elber のき裂開口区間を用いた疲労き裂伝播式

1969： 松石と遠藤によるサイクル数計数のレインフロー法改良

1970：ムスタングの翼のフルスケール疲労試験で Goodman 線図を確立。(オーストリア航空研究所)

1974：疲労限以下の一定荷重振幅繰返し負荷で塑性ひずみが突然出現し、1 サイクルでの塑性ひずみ振幅がある値に漸近する現象を発見。（菊川、城野他）

1998：ドイツ高速鉄道 ICE の車輪に入った疲労き裂のため、2 両目が脱線、橋脚に激突し 101 名が犠牲となる。ICE 開発者など 3 名が告訴されたが、3 年間の法廷論争の末、瑕疵がないと全員無罪確定。**車輪には最大でも疲労限の 1/3 の応力振幅しか作用しておらず、神のみぞ知る原因で疲労き裂が入ったと裁判官が宣言。**（疲労限設計はどんな状態で成り立たないのか？）

表 2.1（その 4/4）　疲労設計に関わる歴史年表

アメリカ空軍(USAF)の疲労損傷に対する対応

1974： 航空機の新しい構造仕様、すなわち損傷許容要求（Damage Tolerance Requirement：DTR）を導入。

「構造の重要な箇所全てに、製造された時点からき裂状欠陥が存在するとするもので、航空機の製造者は、き裂のある状態で十分な寿命（耐久性）や静的強度（損傷許容性）が保持できるということを、実験と解析により証明しなければならない。」

・DTR 導入後でさえ、致命的な疲労事故が F-111 などにしばしば起こり、多くの著名なき裂伝播や破壊力学の専門家を集め、DTR 仕様強化に努めた。その結果、DTR 仕様の航空機に疲労による致命的事故は 1400 万飛行時間の内一つだけとなり、本仕様の成功をもたらした。

しかし F-16 のように、補修や保全に予想もつかないほど極端に膨大な費用と努力が必要となった。

1994; **USAF が未だ実機による疲労試験は欠くことのできない手法と宣言**（毎年開催されている“構造健全性会議”で）。**現時点でもその状況に変化なし。**

・民間航空会社では、依然として Safe Life 設計が行われている。

現時点でも、S-N 曲線で評価した寿命時のき裂の大きさが全く分からず、き裂伝播計算への橋渡しが全く出来ていない。

験工学と組み合わせた形で設計で用いられている。

ドイツDarmstadt工科大学のThum教授は、それまでに公表された相矛盾する疲労現象についてそれらの溝を埋める研究と同時に、分散されていた疲労の知識を一般技術者や設計者が使い易い形に取り纏めた。そして試験片の現象を実構造に置き換えることは困難であり、疲労リスクを回避する唯一の方法は実機を作成し、それに今後作用するであろう荷重を与えて、設計寿命を十分超える寿命があることを確認するしかないと主張した。

第二次世界大戦中に米国とフランスに航空機技術で差を付けられた当時の英国首相 Churchill は、戦後の空の覇権を目論んで、世界初の商用ジェット機コメット号をデハビランド社に開発させた。当然 Thum の主張は知れ渡っており、コメット号開発時には実機の後半分を作成し、水槽に沈めて高空と地上での差圧を模擬した圧力変動を与えて胴体の実機耐久試験を実施していた。この試験では図 2.2 に示すように耐圧試験も兼ねて、高空と地上の差圧の 2 倍の差圧を 1000 回に 1 回の割りで与えていた。この 2 倍の差圧をかけたために寿命が 10 倍以上延びたことが後の試験で判明した。疲労寿命が延びたことを知らずに設計したことによって、想定の 1/10 程度の寿命となり、アンテナを配置した窓枠から疲労き裂が入りコメット機が空中爆発したことが後になって判明した（この耐圧試験で、窓枠に圧縮残留応力を生じさせたためと報告されているが、これほど単純な理由ではないと考えられる。次項参照。）

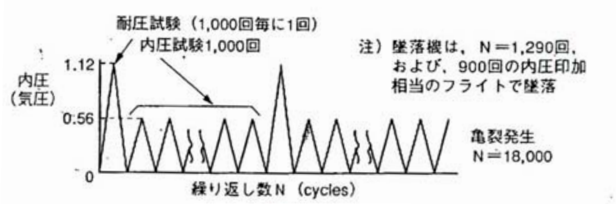


図 2.2 コメット機開発時に機体にかけられた繰返し内圧試験

この時期に DC6,DC7 ならびに Electra で疲

労破壊事故が起こり、これらの防止のため1955年に実機耐久試験が規格化されている。1960年代に入り油圧サーボ疲労試験機が登場し、NASA、オランダ航空研究所およびローキード社において実機を用いて大々的な実働荷重下での疲労実験が行われた。その結果、実働荷重下の疲労寿命は同じ荷重スペクトルから作成した Gassner の８段階ブロック荷重下の寿命よりも短くなるというショッキングな結果となった（1938年にすでに同様の結果が Thum の指導下で行われた実機の疲労試験を行ったドイツ技術者協会で得られていたとの話[15)]であるが、公表はされなかった[※])。

この結果から、実働荷重下における構造物の疲労寿命を推定することは困難との認識がなされ、航空機と自動車・車両は実物を作成して、実際に作用するであろう荷重を作用させて十分な寿命を有することを確認する耐久試験を行なって疲労リスクを回避している。そして、民間の航空会社では、設計寿命に達すると見た目には何ら損傷が生じていない場合でも廃棄する、いわゆるsafe life設計が採用されている。一部損傷しても他の部材が荷重を受け持ち安全性を担保する構造の冗長性を期待したlife safe設計の検討もなされたが、メンテナンスと検査に多大な費用がかかり、結果的には民間航空会社はどこも採用していない。

一方、他の業界では疲労が問題となる構造物に対して実物を作成して、耐久性試験をすることが経済的に成り立たないことから、線形被害則と経験工学を組み合わせた疲労設計を行なっている。したがって、過去に建造したものがこれまでと同じ使われ方をする場合については、疲労設計は機能するが、そうでない場合には機能するとは言いがたい。しかし、損傷を起こした場合には、補強等で作用応力を低くするという対処療法で、その後損傷が生じにくくなることは間違いのない事実である。当然、疲労損傷を起こさない場合には、どれだけの余裕があるのかは明確とはならないことになる。

この後、疲労き裂伝播の問題を破壊力学で取扱う研究が、Paris の提案[16)]後大々的に行われた。しかし、破壊力学のパラメタである K 値（塑性変形をしないと仮定してではあるが、き裂先端近傍の応力分布場を規定する物理量）が、き裂がない場合に定義できないことと、S-N 曲線での疲労き裂発生時のき裂の大きさが全く分からないことから、疲労き裂発生と伝播を結びつけて、構造物に生じる疲労き裂の寿命を評価することが未だ出来ていない。

なお、戦闘機などは民間航空機に比べて操舵荷重が作用する回数が多く苛酷なものとなる。そこで 1974 年にアメリカ空軍は、製造時に不可避的にき裂状欠陥を有しているとしても、十分な耐久性を有することを、実験と解析により証明させる、いわゆる損傷許容要求(DTR: Damage Tolerance Requirement)を導入した。そしてこの導入により、満足いく安全性確保を達成している。しかし、膨大な費用が保全や補修に掛かっており、経済性を無視できる軍事関連機器だから可能という評価がなされている。また毎年開催されているアメリカ空軍の構造健全性会議で 1994 年に、未だ実機

※ 第二次大戦前夜であり、軍事機密であった可能性もある。

による疲労耐久試験は欠くことの出来ない手法と宣言され、この状況は現在も変わっていない。

2.3 現行の疲労設計法の概要と問題点

1860 年に Wöhler が、回転曲げ試験の結果を S-N 曲線の形でまとめた報告書を公表後、種々の切欠付き試験片や溶接継手試験片に対して、種々の形式の荷重（引張、曲げ、ねじり）を作用させた疲労試験が行われ、S-N 曲線の形に纏められた。1922～1956 年における Thum 一派のそれまでの疲労研究結果間で相矛盾するものを理解するための追加実験、ならびに一般技術者向けに理解しやすい形に纏めた活動から分かるように、母材だけでなく、溶接継手等に対する多岐にわたる疲労の研究がなされた。

表 2.1 中に示した疲労損傷事故は極一部であり、疲労損傷は現在も日常的に種々の構造物に生じている。検出された疲労損傷の大半は十分な原因究明も行わずに、き裂部をガウジングで除き、そこを補修溶接して済ましているものと推察される。また一部については、作用応力などをチェックし、補強などにより作用応力を下げることで寿命を延ばす対策が採られている。しかし、作用応力振幅ならびに、き裂発見時までに受けた累積応力頻度分布さらにはその出現順序などの情報までを推定し、真の原因（？）を追求したものは殆どない。しかし、疲労研究成果と上記補強対策などとその後の経過も踏まえて各種疲労設計基準が作られてきた。

表 2.2 には現行の代表的な基準を示す。これら基準では、構造物を設計するにあたり、疲労に対する適切な配慮を行い、必要な耐久性が確保されることを目的に、現在までに得られている知見に基づいて疲労設計の基本的な考え方や、具体的な疲労強度の照査法が取りまとめられている。これらの基準は、材料の要求品質、溶接継手の種類や等級で分類された疲労設計曲線（S-N 曲線）の設定、疲労強度因子の取り扱い、荷重および応力範囲頻度分布の設定、疲労強度照査の方法などの内容から構成されている。構造物の種類によって所掌機関や、構造物の特徴および作用外力の特性などが異なる。このため、基準は構造物の分野ごとに作成されているが、疲労強度の評価方法は、いずれの基準においてもほぼ同じである。

ただし、ASME の Boiler & Pressure Vessel Code[17]では、丸棒引張試験片に与えた塑性ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon_p$ と破断にいたるまでのサイクル数 N の関係すなわち（$\Delta\varepsilon_p \sim N$）曲線（これも一種の S-N 曲線）を利用して疲労照査がなされている。疲労試験結果に大きなバラつきが存在することから、強度に関して（縦軸に関して）1/2、寿命に関して（横軸に関して）1/20 として、その低い方を採用

表 2.2 代表的な疲労設計基準・指針

構造物の種類	基準などの名称
建築、橋梁	鋼構造物の疲労設計指針・同解説（日本鋼構造協会） 鋼道路橋の疲労設計指針（日本道路協会）
船舶	疲労強度設計規則（IACS） 疲労強度評価ガイドライン（日本海事協会）
発電所設備	発電用火力設備に関する技術基準（経済産業省） 発電用原子力設備規格　維持規格（日本機械学会） ASME Boiler & Pressure Vessel Code(ASME)

した線図を疲労設計曲線としている。疲労照査では疲労き裂発生点に作用する局部作用ひずみ振幅を用いることになるので、弾塑性応力解析を必要とする。発電所設備では ASME の影響が大きいため、局部に働いている作用ひずみ（応力）で疲労照査が行われている。

一方、構造物に対して弾塑性応力解析を行うのは煩雑であるとの立場から、代表的な構造的応力集中を有する試験体についての S-N 曲線をもとに、等級分類した溶接継手の疲労設計曲線を用意し、公称応力で疲労照査を行う手法が日本鋼構造協会から発行されている[18]。応力集中係数があまり大きくない小型母材試験片の S-N 曲線の勾配（S と N の対数で表した場合の直線の勾配）が 1/5 であったのを、ある程度広幅の溶接まま試験片ではき裂発生点付近には降伏点レベルの大きな引張残留応力が存在するために、また応力集中係数が大きくなると S-N 曲線の勾配がきつくなることから、S-N 曲線の勾配を 1/3 にした疲労設計線図を与えている（せん断荷重下では勾配は 1/5 であるが、直荷重下では 1/3 となっていると解釈している研究者もいる）。したがって、疲労照査に際しては残留応力や平均荷重の影響を原則考慮しなくて良いことになっている。

さらには、上記の中間的なものとして、疲労き裂発生点における応力集中を、構造から生じる応力集中と溶接余盛形状から生じる応力（後者の影響範囲は、前者に比してかなり狭い）に分解し、前者だけの応力集中で論じるホット・スポット応力で疲労照査[19]する手法も存在する。この場合の S-N 曲線は、構造的応力集中のない突合せ溶接継手試験片などの疲労試験結果から作成されている。この場合ホット・スポット応力は、公称応力作用領域の応力を直線外挿したものが用いられている。

上記のように、照査するときに用いるのは、一定応力（ひずみ）振幅下での疲労試験で得た S-N 曲線がベースとなっている。実構造には一定振幅荷重が作用することは皆無に近く、振幅が変動するランダム荷重が作用する。この場合、線形被害則を用いて、疲労被害を求める手法が採用されている。すなわち、疲労設計線図（S-N 曲線）上に、一生の間で実構造に働く累積応力頻度分布を重ねる。試験体が N_i で破断する一定応力振幅レベルに、実構造の評価対象部が一生の間に晒されるのが n_i 回とした場合の疲労被害を n_i / N_i と定義し、一生の間に受ける被害をすべて加えたものを全被害 D とする。なお、この D 算出に際して、疲労限以下では N_i が ∞ となるので 0 とする Miner の方法、図 2.3 に修正 Miner 則と記しているように、疲労限を無視する方法、そして、疲労限と修正 Miner の線の中間の線とする Haibach の手法[20]などが存在する。これらの内のいづれを使用するかは、構造の使用環境などによって決められている。そして $D=1$ で疲労損傷が生じるというのが Miner 則である。

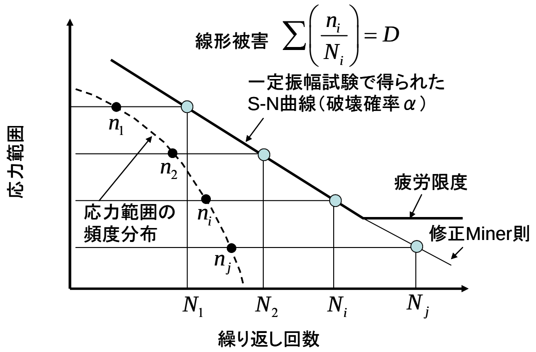


図 2.3 線形累積被害則による疲労寿命評価の説明図

変動荷重下における疲労寿命評価法については、

1924 年に提案され、種々検討が行われたが、実験で一般則を見い出すことができず、結局最も簡単な表示式である Miner 則流の評価法に変わる信頼できる表示法は未だ見つかっていない。前述のように、油圧サーボ試験機が登場した 1960 年代に NASA、NLR およびロッキード社が航空機構造に対してランダム荷重試験を実施したが、同じ荷重スペクトルを有するブロックランダム荷重下よりも、寿命が短くなったために、その後は自動車・車両と航空機は疲労リスクを回避するために、実機に実働荷重を作用させた耐久試験で十分寿命を有すると確認してから、製品を世に出している。

1970 年代後半に入り、パソコンの普及によりランダム荷重疲労試験が比較的手軽に行えるようになり、小型構造要素試験体を用いた疲労試験がなされたが、限界累積被害値 D は 0.1〜10 程度の非常に広い範囲にばらつくことが明らかにされた [2]。また、小形丸棒引張試験片や JIS 平板引張試験片を用いた試験で、一般極値分布（指数分布ランダム荷重）の場合は 0.18〜0.60、そしてランダムおよびブロックランダム荷重の場合には 0.18〜0.89 となるという報告 [21),22)] もなされている。ただしこの場合、D が 1 以下となっているのは、疲労限以下の荷重を、試験時間の関係からあまり含んでいないことも原因の一因であるとも考えられよう。

性能設計においては、対象となる S-N 曲線に関しての統計的処理が必要となる。例としてガセットの回し溶接止端部から生じる疲労損傷を評価することを考える。図 2.4 は日本鋼構造協会（JSSC）の疲労設計基準作成時に収録された面外ガセット継手の S-N 曲線の例である。JSSC の手法に従うならば、S-N 曲線の勾配は 1/3 である。そこで、任意の強度レベルに対し基線 B-B を引き、疲労限以下のデータを除いて、各データ点を通る勾配 1/3 の線との交点に移動させ（$A_i \rightarrow A_i'$ のように）、B-B 上での寿命密度関数 Γ を求めることになる。そして、勾配を 1/3 とするある信頼度に対する時間強度領域の疲労設計線を求め、対象とする継手等級（ガセット継手なら I 等級）に対する疲労限とみなす開始サイクル（I 等級なら 10^7 サイクル）を決めて、設定した信頼度に対する全寿命領域の S-N 線図を求める。そしてこの S-N 線図と一生の間に作用する累積応力頻度分布を使用して、設定した信頼度に対する疲労被害度 D を求める。順次同様にして他の信頼度に対応する疲労被害度 D を求めて、D の確率密度関数が定められる。これより、要求限界疲労被害度 D_l に対する破壊確率が得られる。

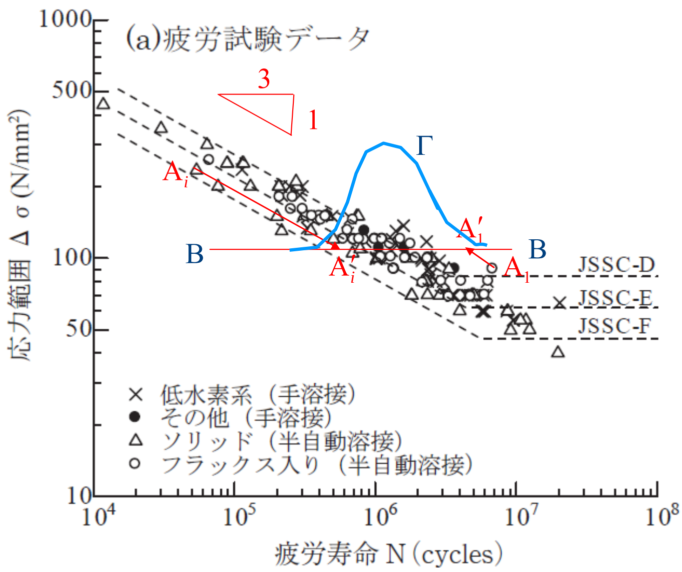


図 2.4 JSSC が収録した面外ガセット角回し溶接継手の疲労試験結果

しかし、疲労損傷が生じた時点の D が

広い範囲にばらつくことから、D_1 がどのような疲労損傷状態に対応しているのかが明確でない。すなわち、0.1mm のき裂となっているのか、100mm のき裂あるいはもっと大きなき裂となっているのか、全く分らないという不備が存在する。すなわち、き裂が発生したということだけで、それが 10μm 程度のき裂にしかなっていない場合もあるし、何百 mm となっている場合もあり、これらを全く同列視している。したがって、疲労損傷が発見されれば、当該箇所の作用応力を下げて、長寿命側にするだけの対処療法に終始している（まえがきの脚注参照）。すなわち、現状の疲労限界状態設計では具体的な疲労損傷に対する破壊確率を評価しているとは云いがたい。「疲労に対して長い研究と対策の歴史があるにもかかわらず、現代でも、金属疲労が原因の事故・損傷が後をたたない。」という報告[1)]が各業界の委員会などでなされているのは、当然の結末といえよう。

発注者側から見れば、「○○年後、○○箇所において○○mm の表面き裂までには成長しないこと」などという具体的要求を課すのが自然であろう。しかし、S-N 曲線にはき裂の大きさに関する情報が全く含まれていないので、現時点では、上記の要求に答えるだけの技術レベルに至っていない。疲労の研究が始まって膨大な研究資金が各国で投じられてきたにもかかわらず、160 年以上経った現在のこの状況に関して、疲労の現状についてまとめた Schütz は、その結びで、「試験片で得られた疲労の情報を実構造に焼き直して，実構造の疲労寿命を評価するという根本問題は全く解決していない。この最も根本的な問題に，意図的であるか意図的でないかは別にして，(溶接技術者を含む構造工学研究者達は)ふたをしてきた。」という痛烈な批判[23)]をしている。したがって、健全な

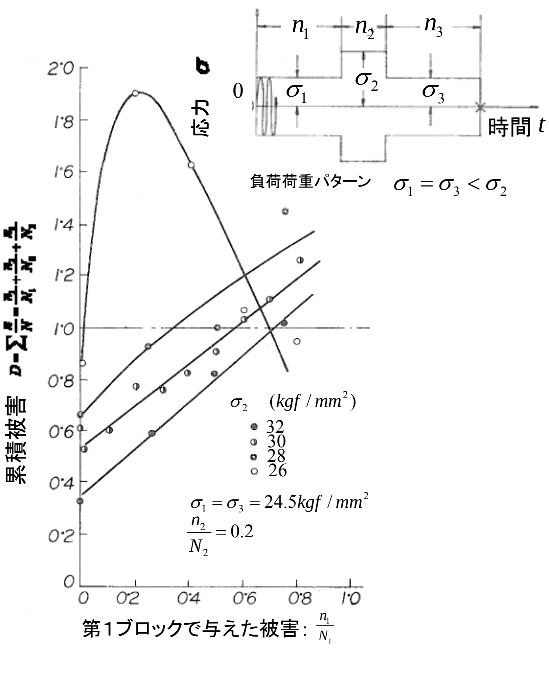


図 2.5　2 段 3 重ブロック試験結果（2 段ブロックの荷重が他より高い場合）

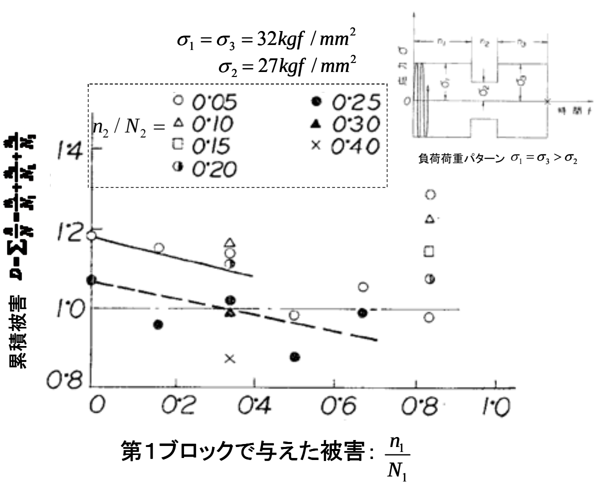


図 2.6　2 段 3 重ブロック試験結果（2 段ブロックの荷重が他より低い場合）

応力集中箇所において、き裂長 0 から任意の大きさのき裂になるまでの実働荷重下での寿命を推定できる技術の確立が望まれる。

なお、実働荷重下における疲労問題に対して、日本材料学会疲労部門委員会では 1959 年にすでに座談会を開催し、種々の観点から議論を行っている [24]。その席に興味深い疲労試験結果が報告されている。図 2.5 と図 2.6 は完全両振条件の 2 段 3 重ブロック試験で得られた結果である。図 2.5 は、図中に示すように σ_1 の応力振幅下で n_1 サイクル与えた後、σ_1 より大きな応力振幅で n_2 サイクル与え、さらに σ_1 と同じ応力振幅の σ_3 にもどし、破断まで繰返し荷重（σ_3 の状態で n_3 サイクル）を与えた試験の結果である。横軸が 0 の位置では、σ_1 の応力振幅を与えていないので、応力振幅を低下させた状態における疲労被害 D が 1 より小さくなることが図 2.5 から分かる。すなわち、応力振幅を低下させる応力幅が大きくなるほど、D が小さくなっており、大きな荷重が初めに与えられると疲労寿命が短くなる（すなわちき裂成長速度を加速させる）ことが分かる。一方、図 2.5 とは反対に σ_2 が σ_1 より小さい図 2.6 で横軸が 0 の場合、すなわち最初に小さな荷重から大きな荷重に変化した場合には、D が 1 より大きくなっており、寿命が長くなって、すなわち減速現象が現れているように見れる。

しかし、コメット機の事故では、機体開発時の耐圧試験で窓枠に大きな圧縮残留応力を与えてしまったために、寿命が延びたことに気がつかずに設計したのが原因で、疲労き裂が想定より早く入ったと報告されている。コメット機の開発時には疲労耐久試験として図 2.4 に示したように 1000 回に 1 回の割合で過大荷重を作用させていたが、大きな圧縮残留応力は最初の耐圧試験で生成されるので、後の過大荷重は長寿命となった原因とはならないと、事故報告からは推定される。しかし、図 2.5 の結果からは最初に過大荷重を作用させると、短寿命となると判断される。このように実機試験で得られた結論と全く反対の現象が生じている。

したがって、過大荷重の効果は圧縮残留応力を生成させることにより長寿命となるという単純な効果だけではないことが分かる。これが、研究者達に混乱を与えており、変動荷重下の疲労現象を定性的にでも明確に出来ていない原因になっていると思われる。

このような背景のもと、本書第３編では、等価分布応力（EDS）下のき裂結合力モデルを基礎とすることにより、健全な応力集中場から発生・成長する実働荷重下での疲労き裂成長曲線を推定することに成功した技術の流れを説明する。すなわち健全な応力集中場から発生し成長する疲労き裂の寿命予測に関し世界で始めて成功したアルゴリズムについて解説している。そこでは、破壊力学を基礎としているが、き裂遠方で負荷される通常の破壊力学とは違った観点からの展開となっているので、第 2 編では、破壊力学のこれまでの歴史も含めて、新しい観点からの破壊力学を解説している。すなわち、塑性仕事に着目した新しい観点からの疲労き裂伝播式の導出に到った過程と、その応用としての疲労き裂発生寿命推定法についての取り組みを解説している。さらに、第 4 編では、

第 3 編の結果を踏まえて、疲労表面き裂の多点からの発生→合体成長→ 1 つの表面き裂→板厚貫通き裂→限界き裂長さにいたるき裂問題を、実働荷重下でシミュレートするためのアルゴリズムについて解説している。

また、これらの研究過程で、大規模降伏条件下の脆性破壊問題にも EDS 下のき裂結合力モデルが成立することが判明したので、構造的応力集中箇所に存在する表面き裂の脆性破壊評価の新展開が期待できるのでそれについても説明している。さらに、疲労限設計が成立していない理由についても考察し、インフラの長寿命化の対策方法を考える一助となるように、今後の取り組みを提言している。

本書を活用することによって、真の信頼性を有する構造が経済性も考慮した形で設計・建造できるものと確信している。

引用・参考文献

1) 石原：車体・台車枠・車軸の疲労、RRR,（2008),p.2-5

2) A.Buch: The Damage Sum in Fatigue of Structure Components, Eng. Fracture Mech., Vol.10,(1978),p.233

例えば、
3) E. Poursaeidi, M. Salavatian：Failure analysis of generator rotor fan blades, Engineering Failure Analysis, Volume 14, Issue 5, July 2007, Pages 851–860

4) 平川 ： ドイツ高速鉄道脱線事故の真相 ： 技術者の責任論から、ISBN 9784905849421（2006)，慧文社

5) 日本学術会議 メカニクス・構造研究連絡委員会構造工学専門委員会報告：構造工学における現在的課題－ 設計クライテリアとコンピューター依存社会　－、(2005) の表に一部挿入（挿入部は斜体で示してある）

6) WES2805：Method of Assessment for Flaws in Fusion Welded Joints with Respect to Brittle Fracture and Fatigue Crack Growth, The Japan Welding Society , Revised on October 1,2011

7) 大田孝二、深沢誠：橋と鋼、㈱建設図書、(2000)、ISBN4-87459-213-9

8) G.M.Boyd: Fracture Design Practices for Ship Structures , Fracture, H.Liebowitzed., (1969), Academic Press,p.383-470

9) 寺井清：高温予歪が鋼の脆性破壊に及ぼす影響の研究、大阪大学博士論文、(1961)

10) JWS BULLETIN: 鋼溶接部の熱ひずみ脆性（レビュー)、日本溶接協会 HSE 委員会編、溶接学会技術資料 No.2,(1977)

11) 土師、粟飯原：継手 COD に及ぼす微視組織の影響、鉄と鋼、Vol.71,No.5,(1985),p.240

12) 濱田：低合金鋼溶接部の強度と靭性の制御(1)-溶接熱影響部の強度,靭性の制御-、溶接学会誌 71(7)、(2002),p.510- 514

13) (社)日本鉄鋼協会「高強度鋼板の疲労強度向上研究部会」報告書：溶接用鋼の疲労強度向上に関する基礎検討、(1995)

14) 廣田、山口、鈴木：東京スカイツリーを支える極厚高強度鋼材、溶接学会誌、Vol.82,No.4,(2013),p.21-24

15) J.Schijve：私信

16) P.C.Paris: The fracture mechanics approarch to fatigue, In Fatigue-An Interdisciplinary Approach (Edited by J.H.Burke, N.L.Reed and V.Weiss), Syracuse University Press,(1964)

17) Criteria of the ASME Boiler and Pressure Vessel Code for Design by Analysis in Sections Ⅲ and Ⅷ, Division 2, The American Society of Mechanical Engineers, New York,(1969)

18) 日本鋼構造協会：鋼構造物の疲労設計指針・同解説－付・設計例－,(2012)

19) Det Norske Veritas: Fatigue Assessment of Ship Structures, Classification Notes No.30.7 , (2010)

20) E.Haibach: The Allowable Stresses under Variable Amplitude Loading of Welded Joints, Proc. Conf. Fatigue of Welded Structures, Vol.2,Cambridge, U.K.(1970),p.328-339

21) 八木、浅田、冨田、杉本、橋本：ランダム荷重下での疲労挙動に関する研究（第２報）－ランダム荷重下の応力-歪関係と累積被害値との相関について－、日本造船学会論文集、154,(1983),p.425－433

22) 永井、藤本、花崎：軟鋼の変動応力振幅下における材料応答と疲労被害について、日本造船学会論文集、158,(1985),p.542-551

23) W.Schütz：State of Art of Fatigue, Eng. Frac. Mech., Vol.54, N0.2, (1996) pp263-300

24) 日本材料学会疲労部門委員会座談会記録：実働荷重による材料の疲労に関する座談会、材料試験、Vol.8，No.72，(1959)，p.726-761

第２編　古典破壊力学

ここでは一様な応力場において発達してきた破壊力学の基礎概念を説明すると同時に、繰返し荷重下でのき裂開閉口挙動を記述するために必要となるき裂面に作用する集中荷重が K 値に及ぼす影響、ならびに大規模降伏条件下（き裂の大きさに比して塑性域が大きい状態）の破壊問題の基礎となっているき裂結合力モデルについて説明する。

1.　破壊力学の基礎

1.1　応力拡大係数 K 値 [1)]

図 1.1 に示すように，き裂先端を原点とする極座標をとり，２次元問題として，弾性応力解析を行うと，応力成分 σ_{ij} は,

$$\sigma_{ij} = A_1 r^{-1/2} f_1(\theta) + A_2 f_2(\theta) + A_3 r^{1/2} f_3(\theta) + A_4 r f_4(\theta) + \cdots \tag{1.1}$$

と与えられる。(1.1)式は任意の係数を有する Laurent 級数で応力関数を表し，き裂面では垂直応力が 0 という条件から導かれたもので，境界条件の如何を問わず成立する一般形である。ここで, $A_1, A_2, \cdots$ は，図 1.2 に示す変形の基本型（荷重の大きさ，き裂および物体の形状・寸法）が定まれば唯一に定まる関数である。また， $f_1(\theta), \cdots, f_n(\theta)$ は， θ のみの関数を表している。

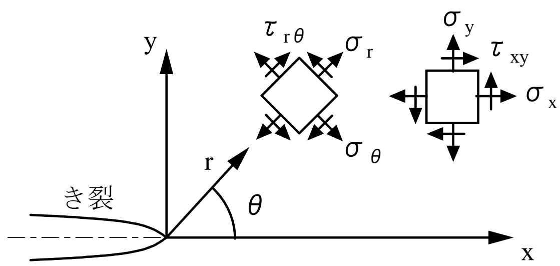


図 1.1　２次元き裂体の座標系と応力成分

したがって，弾性学的（実際は塑性変形するが，それを無視し，いくら応力が大きくなっても，塑性変形しないと仮定して得られる解）には応力は，き裂先端に近づけば近づくほど第 1 項のみが他項に比して卓越して大きくなり，き裂先端近傍（r が小さい場所）では,

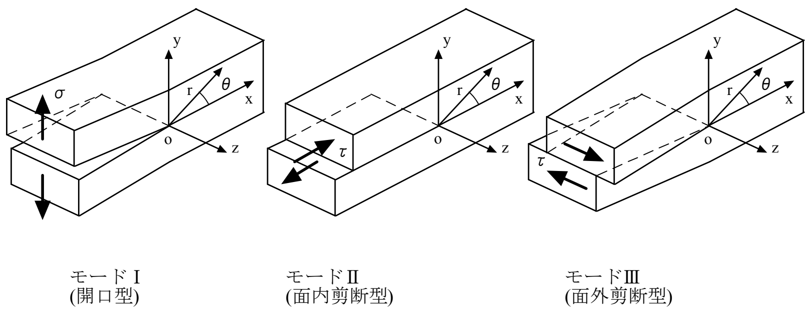


図 1.2　き裂の変形に対する３つの基本型

$$\sigma_{ij} = A_1 r^{-1/2} f_1(\theta) + O(r^0) \tag{1.2}$$

ここで， $O(r^0)$ は r に関する桁が r^0 以上であることを表している。

となり，応力は $r^{-1/2}$ の特異性[※]を有していることになる。以下に，３つの変形の基本型に対する，

具体的な関数形を示す。

(a) モード I　（開口型: opening mode）

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1-\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) \\ 1+\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\kappa-1)\cos(\theta/2)-\cos(3\theta/2) \\ (2\kappa+1)\sin(\theta/2)-\sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

(b) モード II（面内せん断型: sliding mode）

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2)\left[2+\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)\right] \\ \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\left[1-\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)\right] \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\kappa+3)\sin(\theta/2)+\sin(3\theta/2) \\ -(2\kappa-3)\cos(\theta/2)-\cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

(c) モード III　（面外せん断型: tearing mode）

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

$$w = \frac{2K_{\mathrm{III}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin(\theta/2) \tag{1.8}$$

ただし，$\mu = E/2(1+\nu)$　: せん断弾性係数

ν　: ポアソン比(Poisson's ratio)

E　: 縦弾性係数（ヤング率: Young's modulus）

であり，平面ひずみ状態(plane strain condition)の場合には，

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= 3-4\nu \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x+\sigma_y) \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

平面応力状態(plane stress condition)の場合には，

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= (3-\nu)/(1+\nu) \\ w &= -(\nu/E)\int(\sigma_x+\sigma_y)dz \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

ここで，σ_i　: i 方向垂直応力

τ_{ij}　: ij 平面上の i 方向せん断応力

⊗ 対象とするものに備わっている特殊な性質を特異性という。$1/\sqrt{r}$ の応力特異性とは、原点からの距離を r とした場合、原点を通る放射線上の応力（作用方向を固定した応力、例えば x 方向応力、y 方向応力、放射線に垂直な応力 σ_θ、放射線方向応力 σ_r など）が $1/\sqrt{r}$ に比例する性質をいう。

u, v, w ：それぞれ x 方向，ｙ方向および z 方向変位

となり，他の応力成分，変位成分は 0 である。ここで，K_{I}，K_{II}，K_{III} は境界条件，荷重，き裂，および物体の形状，寸法によって定まる係数であり，応力拡大係数(Stress Intensity Factor：K 値)と呼ばれている。

いま，同一の均質材料からなる同じ板厚の２つの部材において，両部材に存在するき裂の K_{I}，K_{II}，K_{III} は，それぞれ，互いに等しいとする。ただし，両部材の形状，寸法，き裂の大きさなどは異なっているとする。この場合，両者で弾性学的に合同な応力分布とみなすことの出来る領域 Ω_e が存在することになる。弾性学的には，き裂先端では応力は限りなく大きくなるから，通常の材料では，ある領域 Ω_p で塑性変形が生じる。この塑性域の外周の形状，寸法 $r = r_p(\theta)$ は，材料（降伏点，加工硬化指数(work hardening exponent)）および K_{I}，K_{II}，K_{III} の値により異なる。しかし，図 1.3 に示すように，Ω_e に比して Ω_p の寸法が十分小さい場合，すなわち，小規模降伏条件(small scale yielding condition)下では，塑性変形を生じたことによる応力分布の再配分は Ω_e 内で主として起こり，Ω_e の外にはほとんど再配分の影響が及ばない。

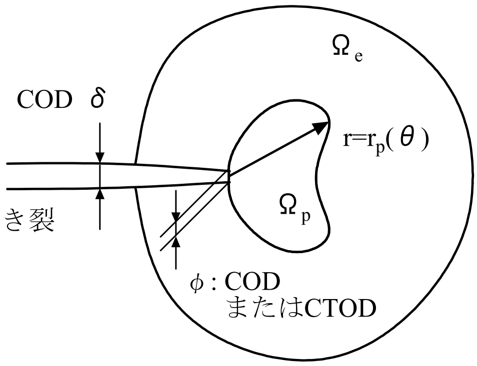


図 1.3　き裂先端近傍に生じる塑性域の説明図

したがって，両部材の双方のき裂先端に生じている Ω_p の大きさ，およびその内部における応力／弾塑性ひずみ分布は，同じ周辺条件のもとで生じたものであるから，全く同一になる。すなわち，弾性体と仮定して求めた K 値が同じならば，小規模降伏条件下では，き裂先端近傍で合同な弾塑性状態が実現される。

脆性破壊はき裂先端から順次生じるものではなく，き裂先端近傍における高ひずみ場内の非金属介在物に隣接してボイドが発生し，それを起点として生じることが明らかにされつつある [2)]。そして，このことが破壊靭性値に大きなばらつきを生む原因の１つとなっているとの解釈のもと，統計的な手法を取り入れた研究がなされている [3)]。微視的にはこのように K 値が同じでも破壊現象に違いが生じる可能性がある。

しかし，破壊がき裂先端近傍で生じることは明らかであり，合同な弾塑性状態が実現されるということは，巨視的には，一方で破壊が生じれば他方でも破壊が生じるはずであり，両者の破壊の期待値レベルは同等であると考えて良い。すなわち，小規模降伏条件下では，K 値を媒体にすることにより，破壊発生点を特定することなく，き裂先端近傍で生じる破壊現象をブラックボックス的に論じ得ることになる。

1.2　ひずみエネルギー解放率と応力拡大係数の関係 [1)]

モードＩの場合について，ひずみエネルギー解放率Ｇ値と応力拡大係数 K 値との関係を調べる。き裂を微小量進ませる過程を，以下の２つの過程に分ける。まず，(1)き裂の先端に δa だけ切込みを入れ，この新しいき裂面に外力を作用させ，新しいき裂面は閉じたままにしておく。この時点では，新しいき裂内面は最初と同じ応力状態にとどまるから，ひずみエネルギーの変化は生じていない。次に，(2)新しいき裂面に作用させておいた外力を徐々に減少させて 0 とし，き裂面を開かせ自由表面とする。そこで，この過程におけるひずみエネルギーの変化を考える。

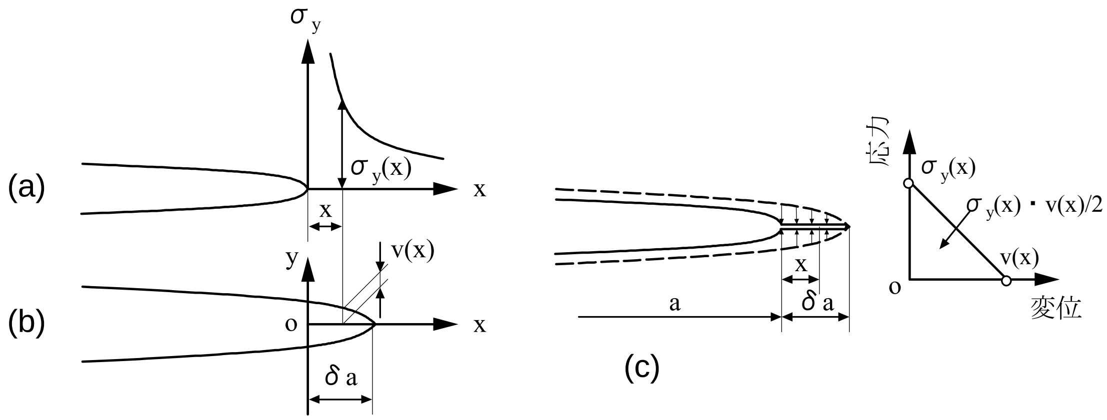


図 1.4　き裂成長にともなうエネルギー変化

図 1.4(a)に示す，き裂成長前の状態で新しいき裂面となるべき x 軸上に作用している垂直応力は，(1.3)式より，

$$\sigma_y(x) = \frac{K_{\mathrm{I}}(a)}{\sqrt{2\pi x}} \tag{1.11}$$

ただし，$K_{\mathrm{I}}(a)$ は，き裂長が a の場合の応力拡大係数

次に，図 1.4(b)に示すように，き裂が微小量 δa だけ進展した場合，き裂内面の変位は，(1.4)式で $\theta = \pm\pi$，$r = \delta a - x$ と置くことにより，

$$v(x) = \pm\frac{\kappa+1}{2\mu}K_{\mathrm{I}}(a+\delta a)\sqrt{\frac{\delta a - x}{2\pi}} \qquad \text{(±はき裂上下面を表す)} \tag{1.12}$$

ただし，$K_{\mathrm{I}}(a+\delta a)$ は，き裂長が $a+\delta a$ の場合の応力拡大係数

となる。線形弾性体では，荷重と荷重点変位は線形関係にあり，しかも後述するように，重ね合わせの原理が成立するから，任意の位置 x における作用応力 $\sigma_y(x)$ と変位 $v(x)$ との関係は，直線関係を保ちつつ最終状態に至る。さらに，外界から作用させる応力 $\sigma_y(x)$ の作用方向と変位 $v(x)$ の方向は逆向きであって，弾性体は外界に対して仕事をし，ひずみエネルギーが解放される（図 1.4(c)参照）。

き裂の上面および下面でなされる仕事は，(1.11)式および(1.12)式より，

$$Gt\delta a = 2\int_0^{\delta a} \frac{\sigma_y(x)v(x)}{2} tdx = \frac{\kappa+1}{8\mu} t\delta a K_{\mathrm{I}}(a) K_{\mathrm{I}}(a+\delta a) \tag{1.13}$$

ただし，　t ：板厚

G ：ひずみエネルギー解放率

となる。ここで，$\delta a \to 0$ の極限をとれば

$$G = \frac{\kappa+1}{8\mu} K_{\mathrm{I}}^2 \tag{1.14}$$

となる。同様にして，３つの変形様式が混在している場合は，き裂面（x 軸上下面）に作用する応力成分は，$\sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{zy}$ であり，それぞれに対応する変位成分が，u, v, w であることから，x 方向へのき裂進展に際しての，エネルギー解放率は

$$G = \lim_{\delta a \to 0} \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta a} \left(\sigma_y v + \tau_{xy} u + \tau_{zy} w\right) dx \tag{1.15}$$

(1.3)～(1.8)式を，上式に代入すると

$$G = \frac{\kappa+1}{8\mu}\left(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2\right) + \frac{1}{2\mu} K_{\mathrm{III}}^2 = \frac{1}{E'}\left(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2\right) + \frac{1}{2\mu} K_{\mathrm{III}}^2 \tag{1.16}$$

ただし，

$$E' = \begin{cases} E & \text{（平面応力状態）} \\ E/\left(1-\nu^2\right) & \text{（平面ひずみ状態）} \end{cases} \tag{1.17}$$

上記から分かるように，ひずみエネルギー解放率に限界値 G_C を与えることは，応力拡大係数（K 値）に限界値 K_C を与えることと等価である。系全体のエネルギーの計算よりも，存在するき裂の特異応力場のみを解析する方が，一般的には，はるかに容易である。さらに，荷重条件と幾何学条件を併せ，前節で示したように，完全弾性体(perfect elastic solid)の場合のみならず，小規模降伏の場合も含め，き裂先端近傍の力学的状態は，応力拡大係数によって完全に代表されるという特徴がある。これが，破壊力学の理論および応用の大発展をもたらした原動力である。

1.3 *K*値に対する重ね合わせの原理

線形弾性体では，変位が微小な場合に，外力と任意点の応力，変位，ひずみは比例し，外力が複数個同時に作用する場合には, それぞれの外力による応力, 変位, ひずみの各成分の和が線形弾性体に働く。これを重ね合わせの原理(superposition principle)という。これは，弾性学（ただし微小変形理論）の基礎式が，全て線形の式で与えられることに由来する。

ところで，図 1.5 に示すように，半無限板の自由縁の一部 A～B 間に，垂直圧力が作用する場合，自由縁(free surface)に生じる垂直応力に関しては，A～B 間のみに圧縮応力 $-\sigma$ が現れるだけで，他

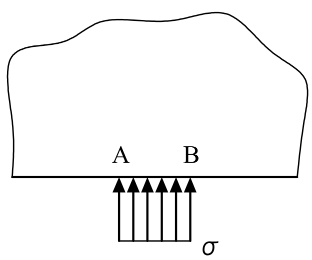


図 1.5　自由縁の一部に圧力が作用する半無限板

の自由縁には垂直応力は働かない。したがって，図 1.6 に示すように，物体の内部にき裂が存在する問題 (図 1.6(a)) は，図 1.6(b)と図 1.6(c)を，重ね合わせることにより表現できる [4)]。

すなわち，図 1.6 (b)は，図 1.6 (a)と物体の形状およびその周囲における境界条件は全て等しいが，き裂が存在しない問題であり，き裂のあるべきところには，物体周辺における境界条件によって決まる$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$およびτ$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$が作用している。その内の$\sigma_y, \tau_{xy}$および$\tau_{yz}$については，これらの分布と，等値逆符号の分布応力を作用させた図 1.6(c)を，図 1.6(b)に加えれば，x軸上のき裂位置では，σ_y, τ_{xy}およびτ_{yz}が 0 となり，自由縁が形成されたことと同じ応力状態になり，図 1.6(a)と等価になる。

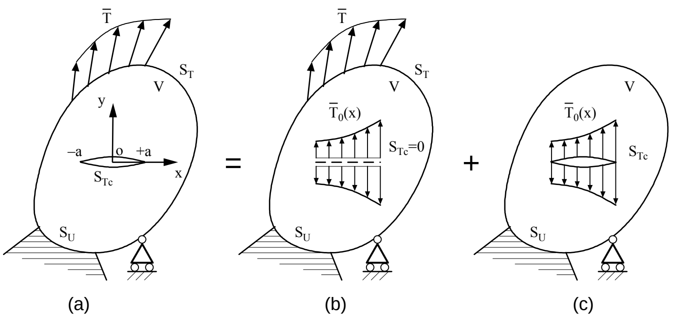


図 1.6　K値問題における重ね合わせの原理

ただし，σ_x, σ_zおよびτ_{xz}については，き裂面でも作用し，図 1.6(a)のそれらと，図 1.6 (b)と図 1.6 (c)を加えたそれらとは必ずしも等しくならない。しかし，それらはき裂平行成分であり，かつき裂先端での応力集中(stress concentration)の源となる成分ではないので，応力の特異性には何ら影響を与えない。また，図 1.6 (b)の場合も，これらの応力成分の応力特異性は生じないので，結局，図 1.6 (a)におけるK値と図 1.6 (c)におけるK値とは等しくなる。この関係は，残留応力や熱応力(thermal stress)，あるいは，体積力(body force)によるK値についても成立する。

1.4　相反定理 [4)]

図 1.7 に示すように，ある線形弾性体に多数の荷重P_iが作用し，その荷重点における負荷方向変位をu_iと表す。線形弾性体の微小変形においては，変位は荷重に比例し，重ね合わせの原理が成立するから，荷重点変位の負荷方向成分u_iは，

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j = \lambda_{i1} P_1 + \lambda_{i2} P_2 + \cdots + \lambda_{in} P_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.18}$$

ここで，n^2個の係数λ_{ij}は物体の形状，寸法，荷重の作用点と作用方向，支持方法によって定まる係数で，荷重の大きさにはよらない。λ_{ij}は，拡張されたコンプライアンス(以後単にコンプライアンス(compliance)と呼ぶ)である。いま，外力がdP_iだけ変化した時, この弾性体に貯えられたひずみエネルギーの増加量dWは，この過程で外力がなした仕事に等しい。き裂の形状，寸法が変化しないとすると，荷重の微小変化による変位の変化量du_iは，(1.18)式より，

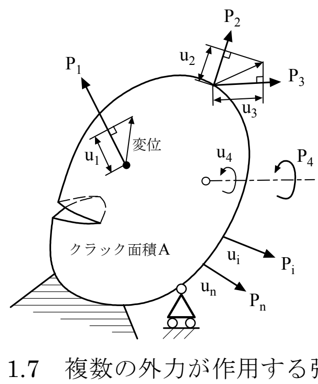


図 1.7　複数の外力が作用する弾性体

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} dP_j = \lambda_{i1} dP_1 + \lambda_{i2} dP_2 \cdots\cdots + \lambda_{in} dP_n \tag{1.19}$$

となるから，ひずみエネルギーの増加量は，以下のようになる。

$$dW = \sum_{i=1}^{n} P_i du_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} dP_j \right\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \lambda_{i1} dP_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i \lambda_{i2} dP_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} P_i \lambda_{in} dP_n \tag{1.20}$$

一方，ひずみエネルギーは，P_j に関して連続関数であるから

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial P_j} dP_j = \frac{\partial W}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial W}{\partial P_2} dP_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial P_n} dP_n \tag{1.21}$$

(1.20)式と(1.21)式を等置すると，

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial W}{\partial P_j} - \sum_{i=1}^{n} P_i \lambda_{ij} \right\} dP_j = \left\{ \frac{\partial W}{\partial P_1} - \sum_{i=1}^{n} P_i \lambda_{i1} \right\} dP_1 + \cdots + \left\{ \frac{\partial W}{\partial P_n} - \sum_{i=1}^{n} P_i \lambda_{in} \right\} dP_n = 0 \tag{1.22}$$

n 個の外力が独立であるとすれば，任意の荷重増分について上式が成立しなければならないから，上式の括弧内の各々が 0 でなければならない。すなわち，

$$\frac{\partial W}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} P_i \qquad (\mathrm{j} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}) \tag{1.23}$$

(1.23)式を P_i で微分すれば

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_j} \tag{1.24}$$

(1.24)式は，i と j を交換しても同じ内容になり，かつ，連続関数の微分はその順序によらないことから，

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.25}$$

が成立する。この関係は Maxwell の相反定理(Maxwell's reciprocal theory)と呼ばれている。すなわち，線形弾性体の微小変形では，**i 点の A 方向単位荷重によって生じる j 点の B 方向変位増分と，j 点の B 方向単位荷重によって生じる i 点の A 方向変位増分が等しい。**

(1.25)式の i, j を交換し，それに(1.18)式の関係を用い，(1.24)式と比較すると，

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j = \frac{\partial W}{\partial P_i} \qquad (\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}) \tag{1.26}$$

が得られる。この関係を，荷重と変位が比例する場合の Castigliano の定理(Castigliano's theorem)という。(1.20)式に，(1.26)式の関係を用いると，

$$dW = \sum_{i=1}^{n} P_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} dP_j \right\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_i dP_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} P_j dP_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j dP_i \tag{1.27}$$

(1.20)式と(1.27)式を加えて，平均をとると，

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \left(P_i dP_j + P_j dP_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} d\left(P_i P_j \right) \tag{1.28}$$

したがって，上式を積分することにより，ひずみエネルギーは，

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_i P_j \tag{1.29}$$

で与えられることが分かる。また，これを(1.18)式により，書き直すと，

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_i P_i = \frac{1}{2} \left(u_1 P_1 + u_2 P_2 + \cdots + u_n P_n \right) \tag{1.30}$$

となる。これは，Clapeyron の定理(Clapeyron’s theorem)と呼ばれている。すなわち，ひずみエネルギーは最終状態により定まり，負荷径路によらないことを示している。

　上記では，き裂長さは一定，すなわち，コンプライアンス λ_{ij} が一定の場合について議論した。以下では，き裂長さ a の微小増加 da によるエネルギー変化を論じる。この時，コンプライアンスはもちろん荷重も，境界条件に応じて変化する。da なるき裂長さの変化に対するひずみエネルギーの変化は，(1.30)式の全微分をとり，(1.25)式の相反定理を用いれば，

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(P_i P_j d\lambda_{ij} + \lambda_{ij} P_i dP_j + \lambda_{ij} P_j dP_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_i P_j d\lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_i dP_j \tag{1.31}$$

また，u_i の変化は，(1.26)式を全微分して，

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} \left(P_j d\lambda_{ij} + \lambda_{ij} dP_j \right) \tag{1.32}$$

であるから，外力のポテンシャルエネルギーの減少分 $-d\Pi^*$ は，

$$-d\Pi^* = \sum_{i=1}^{n} P_i du_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(P_i P_j d\lambda_{ij} + \lambda_{ij} P_i dP_j \right) \tag{1.33}$$

である。したがって，ポテンシャルエネルギーの変化 $d\Pi = dW + d\Pi^*$ は，

$$d\Pi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_i P_j d\lambda_{ij} \tag{1.34}$$

となる。ひずみエネルギー解放率は，き裂が微小距離進展した時解放されるポテンシャルエネルギーであるから，任意の境界条件下で，

$$G \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_i P_j \frac{d\lambda_{ij}}{t da} = \frac{1}{E'} \left(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2 \right) + \frac{1}{2\mu} K_{\mathrm{III}}^2 \tag{1.35}$$

と与えられる。ただし，$\partial A (= t \partial a)$ は，き裂が微小距離進展することによる，き裂面の増加を表し

ている。なお，上式の右辺は，小規模降伏条件下におけるひずみエネルギー解放率と K 値との関係を示したものである。

与えられた境界条件下で，き裂面積が 0 から A まで成長して，荷重が $P_1, P_2, \cdots, P_n$ なる最終状態に達した時，この状態でのひずみエネルギーや変位は，弾性体では負荷径路によらないから，始めから最終状態と同じ一定荷重が作用している条件のもとでき裂が進展して，き裂面積が A となった場合のひずみエネルギーや変位に等しいはずである。

そこで，最終状態の荷重が作用している状態で，$A = 0$ の場合のひずみエネルギーを W_0，変位を u_{i0}，コンプライアンスを λ_{ij0} と表し，き裂の存在によるそれらの増加分を，それぞれ $\Delta W, \Delta u_i, \Delta\lambda_{ij}$ と表す。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} W &= W_0 + \Delta W \\ u_i &= u_{i0} + \Delta u_i \\ \lambda_{ij} &= \lambda_{ij0} + \Delta\lambda_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

いま，外力は一定に保持されていると考えているから，(1.31)式と(1.34)式を用い，$dP_j = 0$ とすると，

$$dW = -d\Pi \tag{1.37}$$

したがって，外力一定条件下では，

$$G = \frac{\partial W(P, A)}{\partial A} \tag{1.38}$$

であるから，これを積分すれば

$$W(P, A) = W_0 + \int_0^A G(P, A)\,dA \tag{1.39}$$

ただし，$W_0 = W(P, 0)$

(1.36)式と比較すると，荷重一定条件下での，ひずみエネルギーの増分 ΔW は，上式右辺第 2 項であり，

$$\Delta W = \int_0^A G(P, A)\,dA = \int_0^A \left\{ \frac{1}{E'}\left(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2\right) + \frac{1}{2\mu} K_{\mathrm{III}}^2 \right\} dA \tag{1.40}$$

となる。(1.26)式と(1.38)式より

$$u_i = \frac{\partial W(P, A)}{\partial P_i} = \frac{\partial W_0}{\partial P_i} + \frac{\partial \Delta W(P, A)}{\partial P_i} = u_{i0} + \int_0^A \frac{\partial G(P, A)}{\partial P_i}\,dA \tag{1.41}$$

ここで，右辺第 2 項は Δu_i であり，き裂が進展することにより生じる変位増加分である。応力拡大係数の引数を，荷重とき裂面積と考えて，(1.35)式を(1.41)式右辺第 2 項に代入すれば，

$$\Delta u_i = \int_0^A \left\{ \frac{2}{E'} \left(K_{\mathrm{I}} \frac{\partial K_{\mathrm{I}}}{\partial P_i} + K_{\mathrm{II}} \frac{\partial K_{\mathrm{II}}}{\partial P_i} \right) + \frac{1}{\mu} K_{\mathrm{III}} \frac{\partial K_{\mathrm{III}}}{\partial P_i} \right\} dA \tag{1.42}$$

が得られる。外力 P_i の応力拡大係数への寄与分を $K_{\mathrm{I}\,i}, K_{\mathrm{II}\,i}, K_{\mathrm{III}\,i}$ とすると，重ね合わせの原理より，

$$K_{\mathrm{I}} = \sum_{i=1}^{n} K_{\mathrm{I}\,i} \qquad , K_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{n} K_{\mathrm{II}\,i} \qquad , K_{\mathrm{III}} = \sum_{i=1}^{n} K_{\mathrm{III}\,i} \tag{1.43}$$

したがって，(1.42)式は，

$$\Delta u_i = \int_0^A \left\{ \frac{2}{E'} \left(K_{\mathrm{I}} \left(\frac{K_{\mathrm{I}\,i}}{P_i} \right) + K_{\mathrm{II}} \left(\frac{K_{\mathrm{II}\,i}}{P_i} \right) \right) + \frac{1}{\mu} K_{\mathrm{III}} \left(\frac{K_{\mathrm{III}\,i}}{P_i} \right) \right\} dA \tag{1.44}$$

と表すこともできる。

上式は，荷重点における変位増分を与える式であるが，荷重が作用していない箇所あるいは分布荷重が作用している箇所での変位増分は，求める箇所にその変位方向の仮想集中力 P_i を作用させて，$P_i \to 0$ の極限を取れば得られる。すなわち，実際に作用している荷重による応力拡大係数を $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}$ とし，仮想力を改めて F とおき，F による応力拡大係数を，$K_{\mathrm{I}\,F}, K_{\mathrm{II}\,F}, K_{\mathrm{III}\,F}$ と表すと，$F \to 0$ の極限における変位増加分は，

$$\Delta u_i = \int_0^A \left\{ \frac{2}{E'} \left(K_{\mathrm{I}} \left(\frac{K_{\mathrm{I}\,F}}{F} \right) + K_{\mathrm{II}} \left(\frac{K_{\mathrm{II}\,F}}{F} \right) \right) + \frac{1}{\mu} K_{\mathrm{III}} \left(\frac{K_{\mathrm{III}\,F}}{F} \right) \right\} dA \tag{1.45}$$

と与えられる[5)]。F を対抗する２つの力とすれば，Δu_F は，その仮想着力点間の相対変位の増加分を与えることになる。すなわち，板厚貫通き裂が，モード I のみの変形状態にある場合，き裂面の任意の位置 x に，単位荷重が作用した場合の K 値を，

$$K = g(x, a) \tag{1.46}$$

ただし，　　　a：き裂長さ

とすると，この単位集中荷重を作用させることによる，$x = x_i$ におけるき裂開口変位(crack opening displacement)は，

$$V(x_i) = \frac{2}{E'} \int_0^a g(x, a)\, g(x_i, a)\, da = f(x_i, x, a) \tag{1.47}$$

で与えられる。したがって，き裂が入る前の応力分布を，$\sigma(x)$ とすれば，この応力分布下におけるき裂開口変位 $V(x_i)$ は，重ね合わせの原理より，

$$V(x_i) = \int_0^a \sigma(x)\, f(x_i, x, a)\, dx \tag{1.48}$$

で与えられる。

1.5 き裂面に集中荷重が作用する場合の K 値と COD の例

(1.47) 式から、き裂面に集中荷重が作用する場合の任意のき裂面における COD が求められる。すなわち、き裂面に集中荷重が作用する場合の K 値が既知であれば、任意の位置の COD が陽な形で与えられる。本節では、構造的応力集中場におけるき裂結合力モデルに有用と思われる K 値ならびに、(1.47)式が精度良く COD を与えていることを理解するための結果を示す。

(a) き裂面に集中荷重を受ける無限板中の貫通き裂（図 1.8 参照）：き裂面に集中荷重が作用する問題で最も基本的なものである。この問題の K 値は [1)]

$$K = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \tag{1.49}$$

で与えられる。これは、複素関数で表された応力関数論 [5)] で得られた厳密解である。

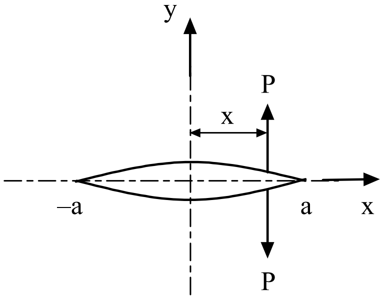


図 1.8　き裂面に集中荷重を受ける無限板中のき裂

構造的応力集中場に存在する表面き裂などに関し、後述の等価分布応力を介して上式が基礎式として用いられる。$\pm x$ の位置に集中荷重が作用する場合（き裂面に双集中荷重を受ける無限板中のき裂）は、

$$K = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{2P}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{1.50}$$

したがって双集中荷重が働く場合の $\pm x$ における COD $V(b)$ は、(1.47)式を参照して、

$$V(b) = \frac{8P}{\pi E'}\int_0^a \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - b^2)}}da$$

$$= \frac{8P}{\pi E'}\begin{pmatrix} \tanh^{-1} \\ \coth^{-1} \end{pmatrix}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - b^2}} \qquad \begin{pmatrix} |x| < b \\ b < |x| \le a \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

(b) き裂面に集中荷重を受ける半無限板の端部き裂（図 1.9 参照）：この場合の K 値は [6)]

$$K = \frac{2}{\pi}\frac{P\sqrt{\pi a}}{\sqrt{a^2 - x^2}} f\left(\frac{x}{a}\right) \tag{1.52}$$

ただし，$f(\chi) = 1.297 - 0.297\chi^{1.25}$

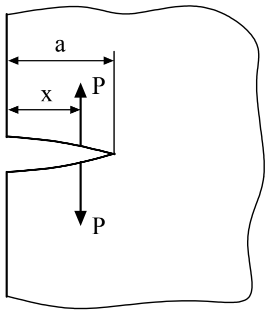


図 1.9　き裂面に集中荷重を受ける半無限板の端部き裂

(c) き裂面に集中荷重を受ける片側き裂付き帯板（図 1.10 参照）：この場合の K 値は、以下のように表現されてきた。

$$K = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \frac{G\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{a}{w}\right)}{\left(1-\dfrac{a}{w}\right)^{3/2} \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} \tag{1.53}$$

図 1.11 中の●印は上式中の $\mathrm{G}(\chi,\alpha)$ を境界要素法で求めた結果 [7)] である。点線は Kaya ら [8)] が，

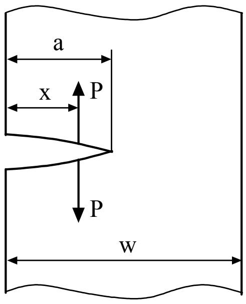


図1.10　き裂面に集中荷重を受ける帯板端部き裂

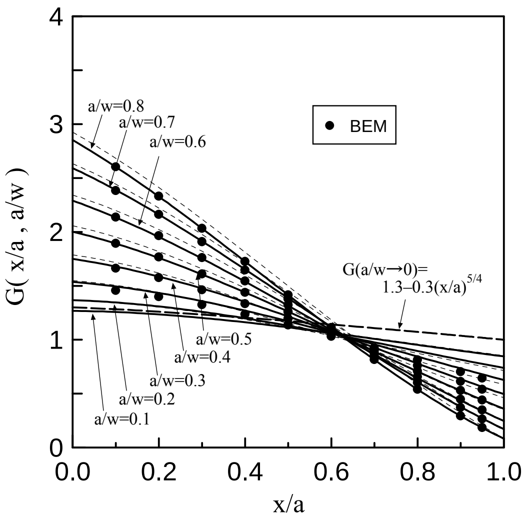


図 1.11　(1.53)式中の $G(x/a, a/w)$（帯板端部き裂）

無限板中のき裂材で得られる応力に対し，帯板境界位置で境界に垂直な成分を求め，それによる K 値を積分したものを，無限板の K 値から差し引く(Method of Singular Integral Equation)ことによって求めた結果である。端部の法線方向変位が拘束されていることになるので，a/w が小さい範囲では，両者は良く一致しているが，a/w が大きくなると，Kaya らの結果は，多少大きめになっている。境界要素法で求めた $\mathrm{G}(\chi,\alpha)$ 値を多項式近似した結果は

$$\left.\begin{aligned}
&G(\chi,\alpha) = g_1(\alpha) + \chi g_2(\alpha) + \chi^2 g_3(\alpha) + \chi^3 g_4(\alpha) \\
&\quad g_1(\alpha) = 1.300 - 1.309\alpha + 12.13\alpha^2 - 24.96\alpha^3 + 30.65\alpha^4 - 15.07\alpha^5 \\
&\quad g_2(\alpha) = -136.4 + 71.42\alpha - 9.105\alpha^2 + 82.82\alpha^3 - 116.1\alpha^4 \\
&\qquad\qquad + 82.49\alpha^5 + 136.3(1-\alpha)^{1/2} \\
&\quad g_3(\alpha) = 165.3 - 90.90\alpha + 24.17\alpha^2 - 153.9\alpha^3 + 209.1\alpha^4 \\
&\qquad\qquad - 130.1\alpha^5 - 165.5(1-\alpha)^{1/2} \\
&\quad g_4(\alpha) = -60.31 + 34.27\alpha - 16.11\alpha^2 + 76.90\alpha^3 - 99.07\alpha^4 \\
&\qquad\qquad + 57.15\alpha^5 + 60.38(1-\alpha)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

となり [7)]、図 1.11 中に実線で表している。

(d) き裂面に集中荷重を受ける CT 試験片

図 1.12 は、破壊靭性値を求める場合や疲労き裂伝ぱ式の定数を求める際にしばしば用いられてきた CT(Compact Tension) 試験片を示している。このき裂面に集中荷重が作用する場合の K 値

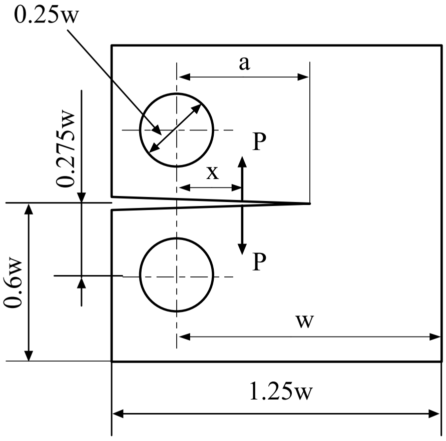


図 1.12 き裂面に集中荷重を受けるＣＴ試験片

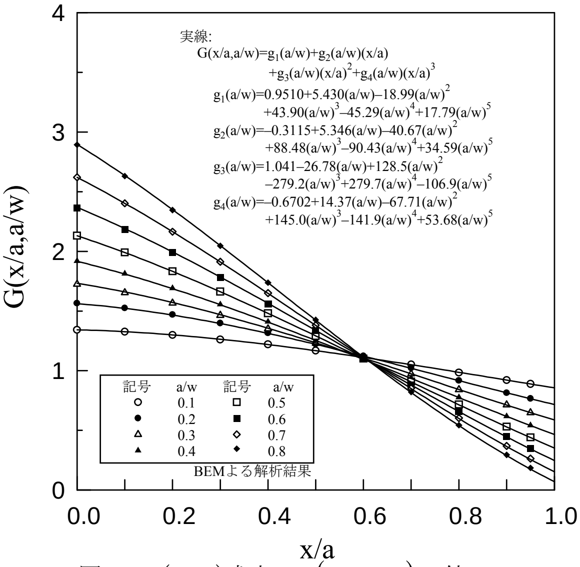


図 1.13 (1.55)式中の $G\left(x/a, a/w\right)$ の値

も(1.54)式と同形式で表し、境界要素法で解かれている [9]。この結果が図 1.13 中の●印で示されている。この場合の $G\left(\chi,\alpha\right)$ 値も多項式近似されており、

$$\left.\begin{aligned}
&G\left(\chi,\alpha\right)=g_1\left(\alpha\right)+\chi g_2\left(\alpha\right)+\chi^2 g_3\left(\alpha\right)+\chi^3 g_4\left(\alpha\right)\\
&\quad g_1\left(\alpha\right)=0.9510+5.430\alpha-18.99\alpha^2+43.90\alpha^3-45.29\alpha^4+17.79\alpha^5\\
&\quad g_2\left(\alpha\right)=-0.3115+5.346\alpha-40.67\alpha^2+88.48\alpha^3-90.43\alpha^4+34.59\alpha^5\\
&\quad g_3\left(\alpha\right)=1.041-26.78\alpha+128.5\alpha^2-279.2\alpha^3+279.7\alpha^4-106.9\alpha^5\\
&\quad g_4\left(\alpha\right)=-0.6702+14.37\alpha-67.71\alpha^2+145.0\alpha^3-141.9\alpha^4+53.68\alpha^5
\end{aligned}\right\}\tag{1.55}$$

と表されている。この多項式近似結果は図 1.13 中の実線である。(1.53)式、(1.55)式を用いて(1.47)式によって、き裂面に集中荷重を与えた場合の COD を計算した結果について以下で説明する。すなわち, $x = x_i$ の位置に集中荷重 P_i が作用する場合の, $x = x$ における開口変位 $V\left(x\right)$ は,

$$V\left(x\right)=\frac{8P_i}{\pi E'}\int_x^a \frac{G\left(\dfrac{x_i}{a},\dfrac{a}{w}\right)G\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{a}{w}\right)}{a\left(1-\dfrac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right\}}}da \tag{1.56}$$

となる。

$\chi(=x/a)$ が 0, 0.3, 0.5, 0.7 ならびに 0.95 の位置に集中荷重を働かせた場合の COD がそれぞれ計算されている。図 1.14 中に線でそれぞれそれらの結果が示されている。一方境界要素法によって計算されたそれぞれの位置に集中荷重を働かせた場合の COD が○、△、□、●ならびに▲印で示されている。このように、き裂面に集中荷重が作用する場合の K 値が精度良く求められていると、弾性状態の COD は(1.47)式によって精度良く求めることが出来る。ここで、(1.47)式の積分変数

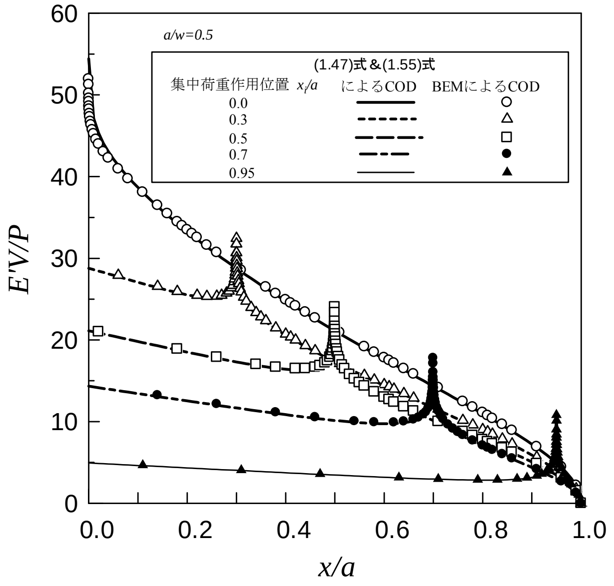


図1.14　ＣＴ試験片のき裂面に集中荷重が作用した場合のき裂開口変位

が a であることに注意を要す。

上記はき裂面に集中荷重が働く場合の COD についてであるが、当然任意の応力分布 $\sigma(x_i)$ が作用する場合についての COD を求めることが出来る。図 1.6 で示したように、対象とするき裂が存在しない問題と、この状態で働く応力分布を対象とするき裂に内圧を働かせた問題を重ね合わせれば、外力を受けるき裂問題と等価になることから、CT 試験片のピン部を引張って生じる COD は、き裂がピン中心線まで入った場合のき裂線上の応力分布を $\sigma(x_i)$ とすると、

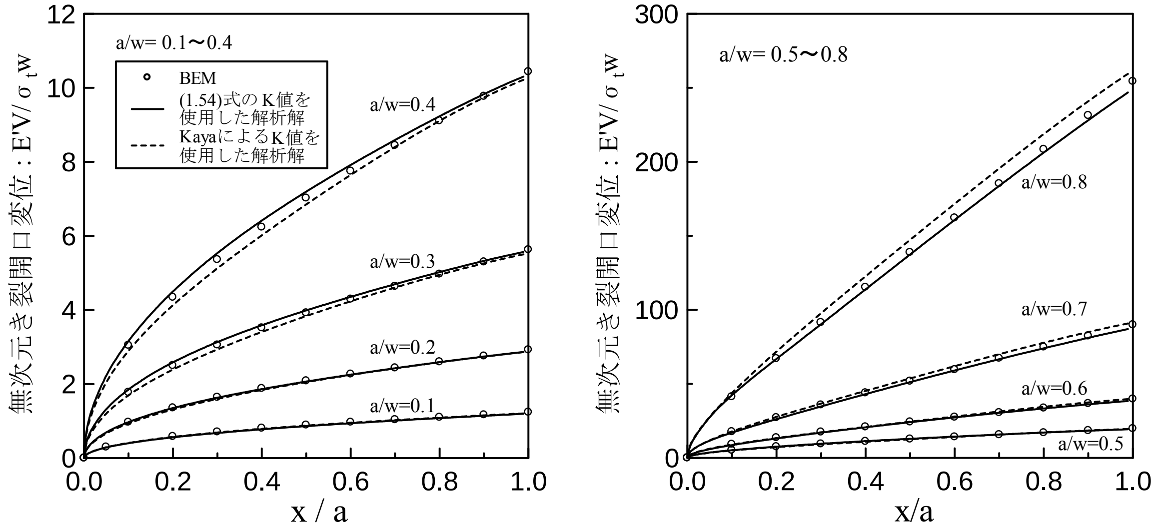
$$V(x) = \frac{8}{\pi E'}\int_0^a \sigma(x_i)\cdot dx_i \int_x^a \frac{G\left(\frac{x_i}{a},\frac{a}{w}\right)G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{a\left(1-\frac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}da \tag{1.57}$$

で表される。

したがって、片側貫通き裂付き帯板（図 1.10）の上下方向の無限遠で一様な応力が作用した場合の COD は(1.57)式において $\sigma(x_i)=\sigma_t$ と置くことで得られる。ただし、$\mathrm{G}(\chi,\alpha)$ は(1.54)式で表される。図 1.15 中の実線はその計算結果を示したものである。また点線は、(1.54)式の替わりに Singular Integral Equation 法により求められた Kaya らによる $\mathrm{G}(\chi,\alpha)$ 値を用いて(1.57)式より求めた結果である。なお、上記 2 重積分は 12 点のガウス数値積分で計算されている。図中の○印は、FEM による弾性解析から求められたもので、(1.54)式による K 値を用いれば COD が精度良く与えられていることが理解されよう。

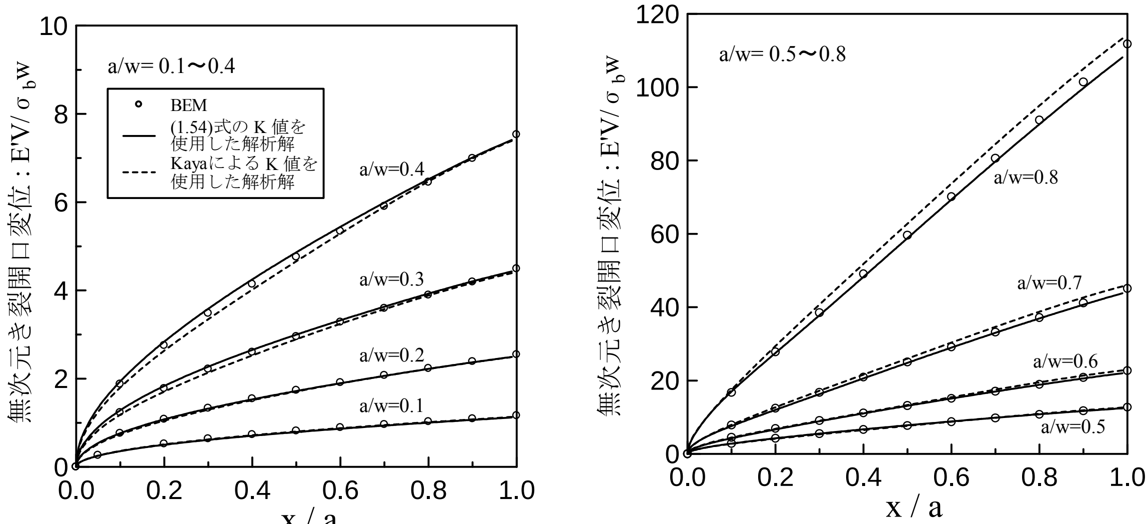
また、片側貫通き裂付き帯板（図 1.10）に面外曲げが作用する場合には、(1.57)式において、

$$\sigma(x_i) = -\frac{2\sigma_b}{w}x_i + \sigma_b \tag{1.58}$$



(a)　a/w=0.1~0.4　　(b)　a/w=0.5〜0.8

図 1.15　無限遠で一様引張応力を受ける片側貫通き裂帯板のき裂開口変位



(a)　a/w=0.1〜0.4　　(b)　a/w=0.5〜0.8

図 1.16　面内曲げを受ける片側貫通き裂帯板のき裂開口変位

と置いて 2 重積分を施せば得られる。ただしσ_bは曲げ応力である。図 1.16 はこのようにして得たもので、実線は(1.54)式による K 値、点線は Kaya らが求めた K 値をもとに計算されている。そして図中の○印は FEM による弾性解析で求められた COD である。(1.54)式による K 値を用いれば､端部き裂に曲げ応力が作用する場での COD が(1.57)式で精度良く与えられることが分かる。

1.6 Dugdale モデル

き裂に垂直な方向に引張応力が作用するとき裂は開口する。き裂先端の曲率半径は 0 であるから応力集中係数が無限大となり、少しでも引張負荷が働くとき裂先端では非常に大きな応力が作

用し、すぐさま引張塑性域が形成される。したがってき裂が鈍化し、き裂開口変位 u は(1.4)式で与えられるものよりも大きくなる。Dugdale はき裂前方に生じる引張塑性域を仮想的にき裂と考えその上下面間に引張降伏点に相当する結合力が働いていると理想化した。そして、き裂から十分離れた場で一様な引張応力が働く場合について以下のように定式化した[10]。

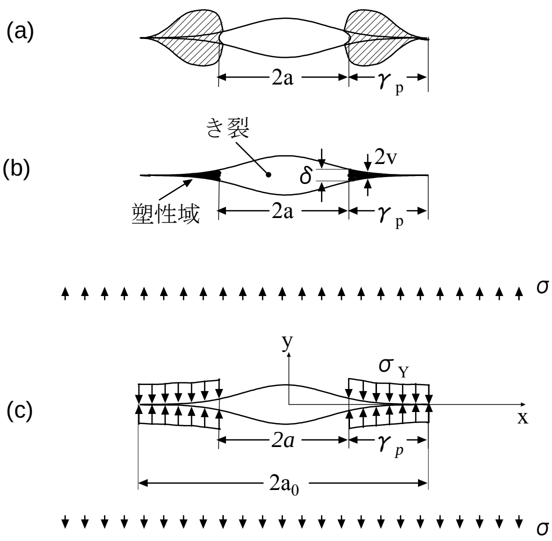


図 1.17 Dugdale モデルの説明図

図 1.17(a)に示すように，長さ $2a$ のき裂を有する板が，無限遠で σ なる一様引張応力を受けて，き裂先端部に大きさ γ_p の塑性域が生じている問題を考える。

Dugdale は，これを図 1.17(b)および図 1.17(c)に示すようにモデル化した。すなわち，実際のき裂だけでなく塑性域を含めて，これを仮想の弾性き裂と見なし，実際のき裂部分は自由表面，塑性域部分は(仮想き裂表面で弾完全塑性体(elastic-perfect plastic solid)を仮定して)降伏点 σ_Y の引張応力を受けているものと考えた。このように考えると，1.3 節の重ね合わせの原理を用いて，2 次元弾性論を適用することができる。

すなわち，図 1.17(c)は，重ね合わせの原理より，図 1.18 のように，長さ $2a_0$ のき裂の内面に一様圧力 σ が作用する図 1.18 (b)と，a から a_0 間に $-\sigma_Y$ が作用する図 1.18 (c)，およびき裂の存在しない板の無限縁に一様応力 σ が作用する図 1.18 (a)を重ね合わせたものとなる。

図 1.18 (a)の K 値は，き裂が存在しないから 0 となる($K_{(a)}=0$)。図 1.18 (b)の K 値は，

$$K_{(b)}=\sigma\sqrt{\pi a_0} \tag{1.59}$$

無限板中の貫通き裂（き裂長 $2a_0$ ）のき裂面に，双集中荷重を受ける場合の K 値は，(1.49)式より，

$$K=\frac{P}{\sqrt{\pi a_0}}\left\{\sqrt{\frac{a_0+x}{a_0-x}}+\sqrt{\frac{a_0-x}{a_0+x}}\right\}=\frac{2P}{\sqrt{\pi a_0}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(x/a_0\right)^2}} \tag{1.60}$$

となるから，図 1.18 (c)の K 値は，次式で与えられる。

$$K_{(c)}=\frac{-2\sigma_Y}{\sqrt{\pi a_0}}\int_a^{a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(x/a_0\right)^2}}dx=-2\sigma_Y\sqrt{\frac{a_0}{\pi}}\cos^{-1}\frac{a}{a_0} \tag{1.61}$$

仮想き裂先端では，応力特異性を持たないから，この点において，応力拡大係数は 0 とならなければならない。

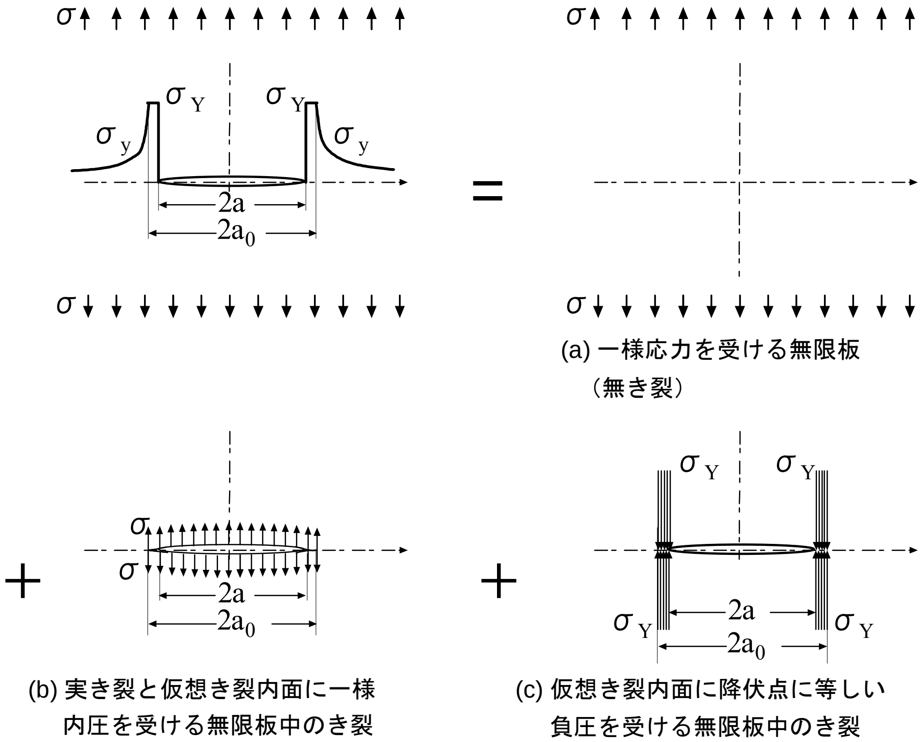


図 1.18 Dugdale モデルに対する重ね合わせの原理

したがって，$K_{(a)}+K_{(b)}+K_{(c)}=0$ より，

$$\sigma\sqrt{\pi a_0}-2\sigma_Y\sqrt{\frac{a_0}{\pi}}\cos^{-1}\frac{a}{a_0}=0 \tag{1.62}$$

となるから，

$$\frac{a}{a_0}=\cos\frac{\pi\sigma}{2\sigma_Y} \tag{1.63}$$

となる。したがって，塑性域の大きさ(plastic zone size) γ_p は

$$\gamma_p=a_0-a=a\left\{\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_Y}\right)-1\right\} \tag{1.64}$$

ところで，長さ $2a_0$ のき裂を持つ無限板が，無限遠で σ の等 2 軸引張応力を受ける場合，Westergaard の応力関数(stress function)[11)]は

$$Z=\frac{\sigma z}{\sqrt{z^2-a_0^2}} \tag{1.65}$$

ただし，z z：複素数（$z=x+iy$）

この応力関数から求められる解に，x 軸方向に $-\sigma$ の一様応力を受ける解を重ね合わせれば，無限遠での x 軸方向応力は消えて，一様引張応力を受けるき裂問題となる。

一方，無限板中に存在する長さ $2a_0$ のき裂のき裂面 x および $-x$ の位置に，双集中荷重 P が作用する問題に対する Westergaard の応力関数は，

$$Z = \frac{2Pz\sqrt{a_0^2 - x^2}}{\pi\sqrt{z^2 - a_0^2}\left(z^2 - x^2\right)} \tag{1.66}$$

となるから，図 1.18(c)の場合の応力関数は，

$$Z = -\int_a^{a_0} \frac{2\sigma_Y z\sqrt{a_0^2 - x^2}}{\pi\sqrt{z^2 - a_0^2}\left(z^2 - x^2\right)}dx \tag{1.67}$$

上式の積分を実行すると

$$Z = -\frac{2\sigma_Y}{\pi}\left\{\frac{z}{\sqrt{z^2-a_0^2}}\cos^{-1}\left(\frac{a}{a_0}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{a}{z}\sqrt{\frac{z^2 - a_0^2}{a_0^2 - a^2}}\right)\right\} \tag{1.68}$$

(1.65)式と(1.68)式を加えることにより，Dugdale モデルに対する応力関数が以下のように求められる。

$$Z =\left\{\frac{\sigma}{\sigma_Y}-\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{a}{a_0}\right)\right\}\frac{\sigma_Y z}{\sqrt{z^2 - a_0^2}} + \frac{2\sigma_Y}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{a}{z}\sqrt{\frac{z^2 - a_0^2}{a_0^2 - a^2}}\right) \tag{1.69}$$

ところで，y 方向応力 σ_y は，Westergaard の応力関数で表すと

$$\sigma_y = \mathrm{Re}\,Z + y\,\mathrm{Im}\,Z' \tag{1.70}$$

ただし，Re は複素数の実数部，Im は虚数部を表す。

であるから，x 軸上の y 方向応力は，

$$\sigma_y = \mathrm{Re}\,Z \tag{1.71}$$

ここで，$|x| \to a_0$ で σ_y が無限大にならないためには，(1.69)式の第 1 項が，0 になることが必要である。すなわち

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{a}{a_0}\right) \tag{1.72}$$

これは，(1.63)式と一致する。そして，$x = a_0$ において

$$\sigma_y = \lim_{z\to a_0}\mathrm{Re}\,Z = \frac{2\sigma_Y}{\pi}\cot^{-1}\left(0\right) = \sigma_Y \tag{1.73}$$

となり，仮想き裂先端では，$\sigma_y = \sigma_Y$ となっていることが分かる。(1.63)式の条件下では(1.69)式は，

$$Z = \frac{2\sigma_Y}{\pi}\cot^{-1}\left\{\frac{a/a_0}{z}\sqrt{\frac{z^2-a_0^2}{1-\left(a/a_0\right)^2}}\right\} \tag{1.74}$$

平面応力状態では，y 方向変位 v は，Westergaard の応力関数で表すと

$$v = \frac{1}{E}\left\{2\,\mathrm{Im}\,\hat{Z} - y\left(1+\nu\right)\mathrm{Re}\,Z\right\} \tag{1.75}$$

ただし，^は積分を表す。

したがって，y = 0 における変位(開口変位の 1/2)は

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{E}\mathrm{Im}\,\hat{Z} = \frac{2}{E}\mathrm{Im}\int Zdz \\ &= \frac{4\sigma_Y}{\pi E}\left\{a\coth^{-1}\sqrt{\frac{a_0^2-z^2}{a_0^2-a^2}} - z\coth^{-1}\left(\frac{a}{z}\sqrt{\frac{a_0^2-z^2}{a_0^2-a^2}}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.76}$$

したがって，実き裂先端における CTOD(δ)は

$$\delta = \lim_{z\to a} 2v = \frac{8\sigma_Y a}{\pi E}\ell n\left(\frac{a_0}{a}\right) = \frac{8\sigma_Y a}{\pi E}\ell n\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_Y}\right) \tag{1.77}$$

となる。

ここで，作用応力が 0 の状態から，一様引張応力 σ が作用した後，除荷されて 0 の状態に戻された場合を考える。処女状態から，一様引張応力が σ となった時点における CTOD は，当然，(1.77)式で与えられる。この最大応力状態から除荷され，一様引張応力が 0 の状態となる過程では，$-\sigma$ の大きさの外応力が作用したことと等しい。この場合，引張塑性域となっていた位置では，応力－ひずみ線図において，σ_Y から $-\sigma_Y$ までは，すなわち，$2\sigma_Y$ の範囲は弾性的に変化する。したがって，最大応力状態から一様引張応力が 0 の状態まで外応力が変化する間における CTOD の変化は，(1.77)式で σ を $-\sigma$ に，σ_Y を $2\sigma_Y$ に置き換えたものに等しい。すなわち，除荷後における CTOD は，

$$\delta = \frac{8\sigma_Y a}{\pi E}\left\{\ell n\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_Y}\right) - 2\ell n\left(\sec\frac{\pi\sigma}{4\sigma_Y}\right)\right\} > 0 \tag{1.78}$$

となり，除荷時にはき裂が開口していることが分かる。これは，スリットをいれたゴムを塑性状態まで引張り，力を抜くとスリットが開いたままの状態になることからも容易に理解されよう。

なお，無限遠で一様引張応力 σ を受ける中央貫通き裂(試験片幅：$2w$)に対しては，双集中荷重を受ける周期き裂の K 値，ならびにき裂開口変位式 [12)] を用いて，Dugdale モデルによる，き裂開口変位式が以下のように求められる。

$$V\left(x\right)=\frac{8w\sigma_Y}{\pi^2E'}\sin\alpha\int_{\chi}^{\pi/2}\frac{\cos\chi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\chi}}\ell n\left|\frac{\sin\left(\chi+\phi\right)}{\sin\left(\chi-\phi\right)}\right|d\chi \tag{1.79}$$

ただし,

$$\sin\chi=\sin\left(\pi x/2w\right)/\sin\alpha$$
$$\sin\phi=\sin\left(\pi a/2w\right)/\sin\alpha=\cos\left(\pi\sigma/2\sigma_Y\right)$$
$$\sin\alpha=\sin\left(\pi a_0/2w\right)$$

$a/w=0.5$ として，$\sigma/\sigma_Y=0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 の荷重を与えた場合について，(1.79)式で計算したき裂開口変位(Crack Opening Displacement：COD と呼んでいる)を図 1.19 に示す。(1.79)式による計算結果は，本図に示すように，き裂開口変位は実き裂先端で 0 とならない。そして，き裂前方の塑性域では，仮想的なき裂開口変位が生じる。上記のき裂先端における COD を，特に CTOD(Crack Tip Opening Displacement)と呼びこれがある限界値に達した時破壊する(K値がK_C値に達した時破壊するという考え方と同じ)という説[13)]を，COD 仮説と呼んでいる。限界 CTOD 値(critical CTOD)は，K_C値と同じく，破壊靭性値であり，文面から明らかな場合には，単に CTOD と呼ばれることが多い。

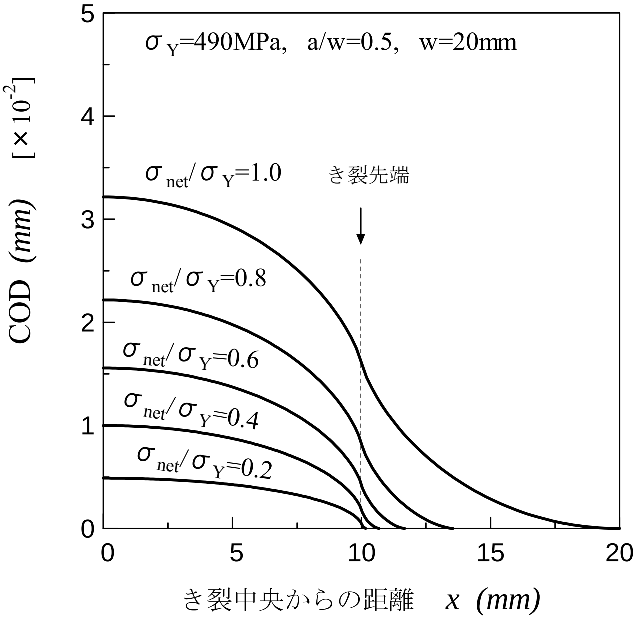


図 1.19 Dugdale モデルによる COD の計算結果例

図 1.20[14)]は，一様外応力を受ける，試験片幅($2w$)400mm，き裂長さ($2a$)160mm の中央貫通き裂材を対象とし，き裂先端から 5mm き裂内部側に入った位置($x=75mm$)における，き裂開口変位を調査した結果である。図中の細点線は，平面応力状態を仮定し($E'=E$)，(1.79)式を用いて得られた結果である。バイリニアの応力－ひずみ関係（降伏点を

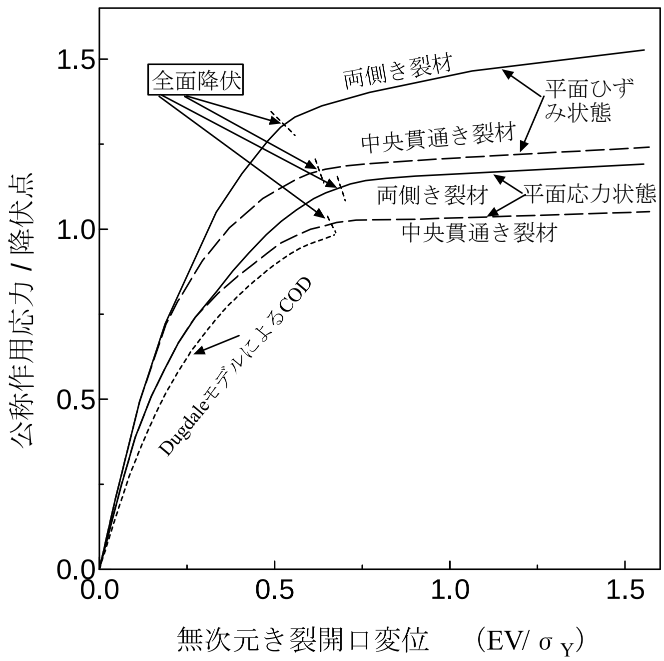


図 1.20　Dugdale モデルにおけるディープノッチ試験片の COD と弾塑性 FEM による COD の比較（$a=80mm, w=200mm$ の試験片の $x=75mm$ の位置での COD（V））

735MPa，ヤング率を 206GPa，加工硬化係数を 980MPa としている）を有する材料を仮定し，弾塑性 FEM（1 ステップ前に弾性状態にある要素が 1 個だけ，降伏点に達するようにした増分法を用いている）を用いて，平面応力条件下と平面ひずみ条件下で，$x = 75mm$ の位置の COD を求めた結果が長い点線で示されている。さらに，中央貫通き裂材だけでなく，両側貫通き裂材についても, き裂先端から 5 mm き裂内部に入った位置における COD が, 弾塑性 FEM で求められており, それらは実線で示されている。

本図より，Dugdale モデルは，実際より大きめの COD を与えることが分かる。これは仮想き裂部に働くき裂結合力を σ_Y としたためである。すなわち、仮想き裂部は平面応力状態では 2 軸拘束、平面ひずみ状態では 3 軸拘束状態にあり、き裂結合力は 1 軸拘束状態のものではなく、それぞれの拘束状態にあるき裂結合力を与えていないことが主原因と考えられている（加工硬化指数も COD には影響を与えているが、これは副因子と考えられている）。き裂先端から成長した塑性域が，中央貫通き裂の場合には前方の自由境界に達した時点，両側貫通き裂の場合には中央で合体する時点として定義された, 全面降伏時の実断面応力を降伏点で除した塑性拘束係数 (plastic constraint factor)が，上記の FEM 結果を用いて求められている。その結果を，表 1.1 に示す。

表 1.1　FEM から得た全面降伏時の塑性拘束係数

解析条件	平面応力状態		平面ひずみ状態	
試験片タイプ	中央き裂	両側き裂	中央き裂	片側き裂
塑性拘束係数	1.03	1.13	1.18	1.32

図 1.21[15]は，板厚 25mm の SM-480 鋼（降伏点 $343MPa$，引張強さ $480MPa$）を供試材とした，中央貫通き裂付引張試験（ディープノッチ試験、deep notch test：試験片幅($2w$)：400mm, 切欠長さ($2a$)：10～160mm）結果の一例である。種々の温度（降伏点が変化する）下において，脆性破壊が生じた荷重を実断面積で除した，破壊応力曲線が示されている。図中には，この材料の降伏点（σ_Y）ならびに引張強さ（σ_B）の温度依存性も同時に示されている。温度上昇に伴う破壊応力曲線上の折点で，丁度，全面降伏時に脆性破壊が生じる。この時点の破壊応力と，その温度における σ_Y との比が, 表 1.1 中の塑性拘束係数 λ になる。本結果では全面

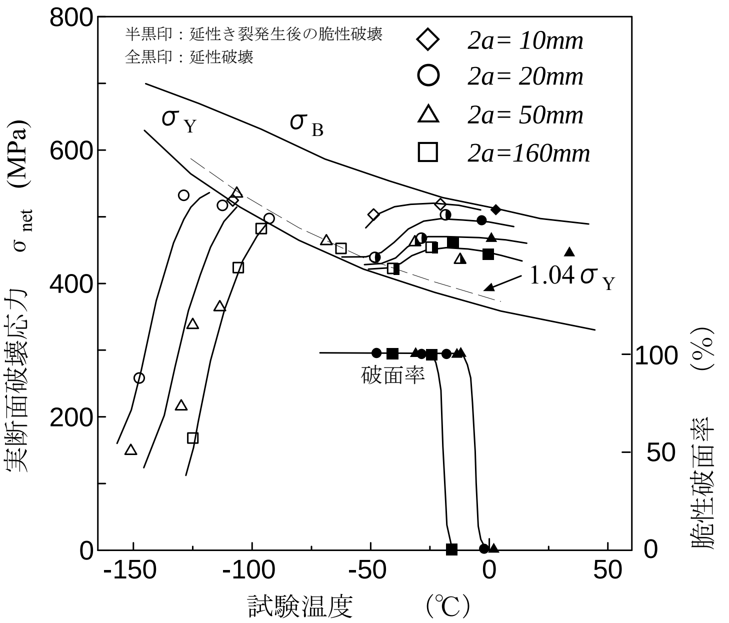


図 1.21 中央切欠形ディープノッチ試験片の破壊応力曲線

降伏を生じ，温度上昇につれて破壊応力が小さくなる領域では，点線で示すように，塑性拘束係数は 1.04 程度となっている。すなわち，ここで採用された，$a/w \le 0.4$ の SM-50 鋼ディープノッチ試験片では，降伏点より少し大きな破壊応力となっている実験点に着目すると，$\lambda \approx 1.04$ で近似できることが分かる。

非常に板厚が薄い場合は平面応力状態，非常に厚い場合は平面ひずみ状態になるが，図 1.21 で用いられている，ディープノッチ試験片の 25mm という板厚では，平面応力状態に近い応力分布を呈している。したがって，$\lambda \approx 1.04$ という実験結果は，表 1.1 の結果と非常に良く一致した塑性拘束係数になっている（板厚が 25mm ということで,1.03 より大きくなっているのか，加工硬化(work hardening)によって変化しているのか，現時点では明確でない）。なお，図 1.21 より，完全延性破壊に移行する脆性－延性遷移温度は，き裂長の影響をほとんど受けないことが分かる。

図 1.22 は，加工硬化係数を E/100（E：ヤング率）とする，バイリニアの応力－ひずみ関係を有する材の，中央貫通き裂付ディープノッチ試験片を，平面ひずみ条件下で弾塑性 FEM 解析し，き裂中央位置の COD を求めた結果である。図中の図に示すように，Dugdale モデルでの全面降伏時の COD と，FEM による COD 曲線より塑性拘束係数λを求めると$\lambda = 1.21$となり，き裂長さに関わらず一定として与えられることが分かる。わずかに図 1.22 のλが表 1.1 のそれより大きいのは，加工硬化係数が大きくなっているためである（これより加工硬化係数はあまり塑性拘束係数に大きな影響を与えないと期待される）。なお，完全弾塑性体では切欠が十分に深くなると平面ひずみ状態に近づき，λは$2/\sqrt{3}$ ($\approx$1.15)に漸近することが知られている [15]。

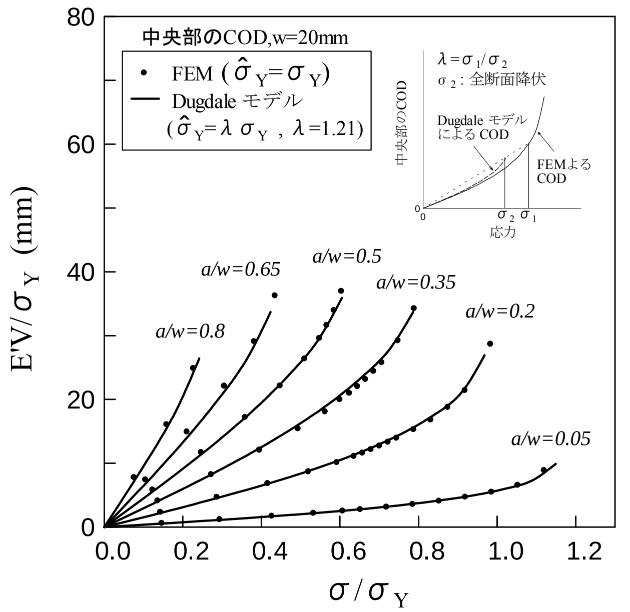
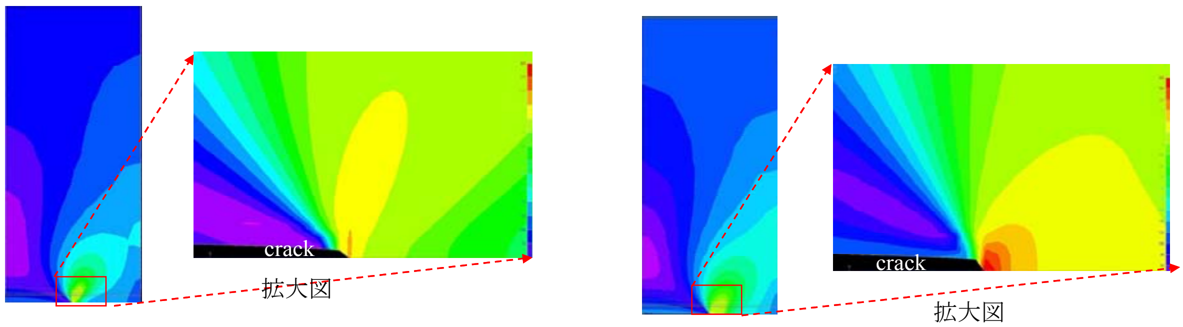


図 1.22 中央切欠形ディープノッチ試験片のき裂中央の COD（FEM 解析結果と、塑性拘束係数を導入した Dugdale モデルとの比較。平面ひずみ条件下）

そこで，図中には$\lambda\sigma_Y$を(1.79)式の降伏点に代入して，マウス部の COD を求めた結果も実線で示している。塑性拘束係数λを考えることは，(1.75)式から分かるように，図の横軸と縦軸の目盛りを，それぞれλ倍することに相当する。すなわち，（鋼に対して）平面ひずみ状態では，$\lambda \approx 1.2$とすることで，加工硬化の影響も考慮した上で，Dugdale モデルにより，ほぼ妥当なき裂開口変位を与えることができる。

バイ・リニアな応力－ひずみ関係（降伏点（σ_Y）＝294MPa、ヤング率（E）＝206,000MPa、

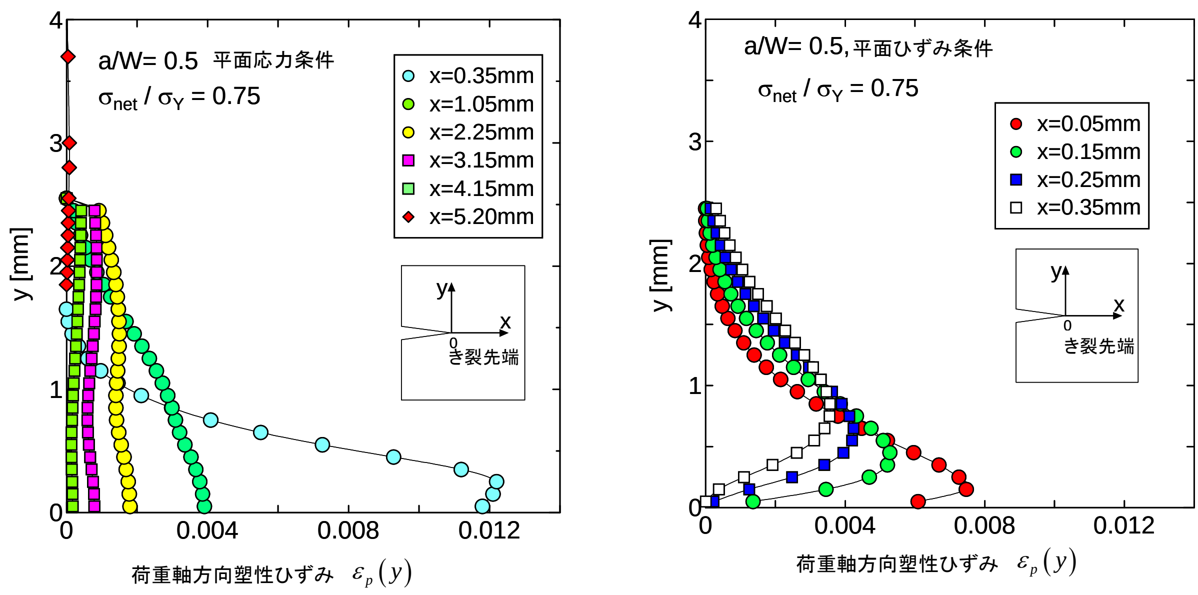


(a)　平面応力状態　　　(b)　平面ひずみ状態

図 1.23　中央き裂形ディープ・ノッチ試験片に働く等価応力コンター図（負荷レベルはリガメントの平均応力が降伏点の 75%。対称性から第 1 象限のみを表示している）

2 次硬化係数＝E/100）を有する中央切欠形ディープ・ノッチ試験片（試験片半幅 50mm、き裂半長 25mm）の境界に一様な引張負荷を与えることにより生じる、き裂前方での塑性ひずみ分布が弾塑性 FEM 解析により調査されている。図 1.23 はリガメント応力が降伏点の 75%の場合に生じた Mises 等価応力分布を例示している。(a)図が平面応力状態、(b)図が平面ひずみ状態として解析されたものである。平面応力状態の場合には、き裂先端から 45°方向に塑性域が発達する傾向にあるが、平面ひずみ状態の場合にはき裂線上に発達する傾向にあり、後者の方が変形が小さくなっていることが理解されよう。

そして、き裂先端からある距離（x）離れたき裂線に垂直方向（y）の線上に沿う y 方向塑性ひずみが調査されている。その例を図 1.24 に示す。(a)図が平面応力条件、(b)図が平面ひずみ条件として求められたものである。平面応力状態では、き裂先端の極近傍を除いて、き裂線上で最



(a)　平面応力状態　　　(b)　平面ひずみ状態

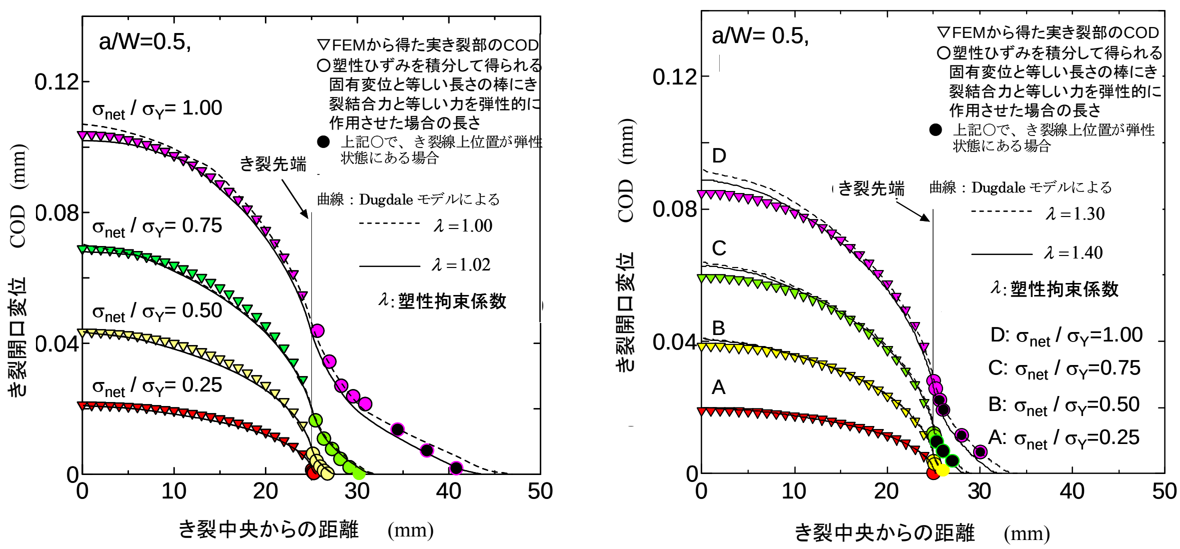
図 1.24 き裂先端前方の塑性域内の負荷方向塑性ひずみ分布

大の塑性ひずみが現れているが、平面ひずみ状態ではき裂線上の塑性ひずみは極小値を示す傾向を有している。リガメント線上が最も荷重を受け持つ断面が小さくなるため、作用応力は大きくなるが、平面ひずみ状態では、平面を保つために面外応力（z 方向応力）が働くため、3 軸拘束が大きくなり、y 方向塑性ひずみが周囲より小さくなる傾向にあることが(b)図より理解される。一方平面応力状態の場合には、面外応力は働かないため、最も作用応力が大きくなるリガメント部（き裂線上）が、き裂先端近傍を除いて y 方向塑性ひずみが最大になっている。大きな y 方向塑性ひずみのために x 方向に収縮しようとするのを拘束するために、き裂先端近傍では 2 軸拘束による大きな x 方向応力が働き、x 軸上で塑性ひずみが小さくなっている。

図 1.25 は Dugdale モデルによる COD と弾塑性 FEM による実き裂部の COD ならびに塑性域における活固有変位との関係を比較したものである。ここで、活固有変位は FEM から得られた塑性ひずみ分布（図 1.24 に例示）を y 方向に積分した線分（固有変位：$L(x)$）に、結合力が弾性的に働いた線分の長さ $V(x)$ である。すなわち、

$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_p(y)_{x=const}dy\cdot\left(1+\frac{\lambda\sigma_Y}{E'}\right)=L(x)\left(1+\frac{\lambda\sigma_Y}{E'}\right) \tag{1.80}$$

ここで、結合力が弾性的に働くとしているのは、Dugdale モデルによる COD は(1.79)式で $E'=\infty$ とすると $V(x)=0$ となることから分かるように、COD は塑性変形だけでなく弾性変形も含まれた結果生じるもので、(1.79)式においては $\lambda\sigma_Y$（λ：塑性拘束係数、σ_Y：降伏点）なる応力が弾性的に働くと解釈される。その意味で仮想き裂部の $V(x)$ は活固有変位となる。上記比較結果から、Dugdale モデル（き裂結合力モデル）で得られる仮想き裂の COD は、活固有変位を表している



(a)　平面応力状態　　　　(b)　平面ひずみ状態

図 1.25 Dugdale モデルによる COD と実き裂部の FEM による COD ならびに仮想き裂部の活固有変位との比較

と考えることが出来る[16]。なお黒丸印の活固有変位は、き裂線上では弾性状態にあり塑性ひずみが生じていないが、き裂線から離れた上下で塑性ひずみが生じており、この場合でも、Dugdale モデルによる仮想き裂部の COD（(1.79)式）が活固有変位と対応していることになる。

ところで、ディープノッチ試験片のき裂先端から成長した塑性域が，中央貫通き裂の場合には前方の自由境界に達した時点，両側貫通き裂の場合には中央で合体する時点として定義された、全面降伏時の実断面応力を降伏点で除した塑性拘束係数を表 1.1 に示したが、COD の大きさを基準にした塑性拘束係数（図 1.25 中の λ）とは、平面応力状態ではほぼ一致しているが、平面ひずみ状態では、COD の大きさを基準とした塑性拘束係数の方が大きくなっている。したがって、平面ひずみ状態下の中央貫通き裂付ディープノッチ試験片では、引張塑性域が自由端に達する時点、両側き裂型では中央で引張塑性域が合体する時点から塑性拘束係数 λ を決定し、COD の大きさに関しては COD 式の係数（(1.79) 式では 8 を修正）を修正して用いるのが現実的対応と考えられる。

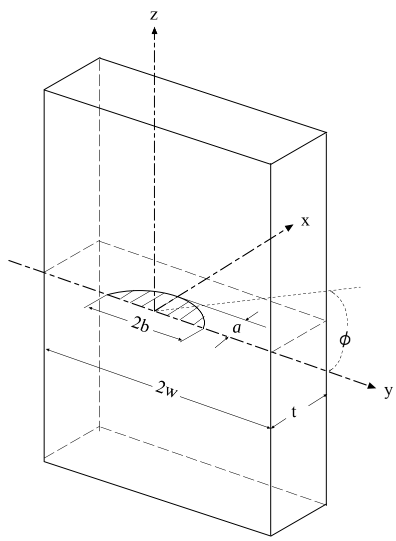
1.7　板厚非貫通き裂の K 値

1.7.1　引張と面外曲げを受ける半楕円表面き裂

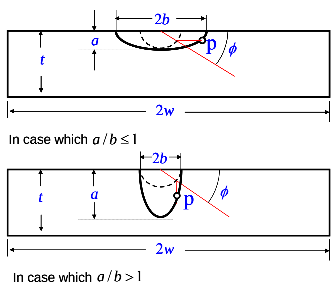
溶接構造物で発見される溶接割れなどの欠陥は，様々な形をしている。そして同程度の大きさの欠陥ならば，内部欠陥よりも表面に存在する欠陥の方が，疲労き裂は成長しやすい。そして最初，欠陥の前縁線がギザギザであっても，すぐに滑らかな前縁線になり，その形はほぼ楕円状になる。これはギザギザの奥まった箇所が，飛び出た位置よりも K 値が大きく，さらに開口しやすいということによる。

したがって，溶接構造物における疲労き裂の成長を議論する場合，少なくとも半楕円表面き裂の K 値を求めておく必要がある。無限体中に存在する楕円き裂については，解析的に K 値が求められている。しかし表面き裂については解析的に陽な形で K 値を求めることができず，種々の離散化手法を用いて，表面半楕円き裂の K 値が求められてきた。

これらの内，現在最も信頼がおけると考えられているのは，FEM によって求めた K 値を多項式近似した，次式の Newman らによる結果である。彼らは図 1.26 に示す平板に半楕円き裂が存在し，それに一様な引張応力，および一様な面外曲げ応力が



a）全体図



b）き裂断面と p 点位置の角度の定義

図 1.26　平板に存在する半楕円表面き裂

作用した場合の K 値を求め，以下のような近似結果[17)]を与えている。

$$K = \left(F_t \sigma_t + F_b \sigma_b\right)\sqrt{\pi a} \tag{1.81}$$

ただし，　σ_t ：一様引張応力
　　　　　σ_b ：一様面外曲げ応力

$$\left.\begin{aligned}
&F_t = F_0 / \Phi \quad , \quad F_b = H \cdot F_0 / \Phi \\
&F_0 = \left\{M_1 + M_2\left(a/t\right)^2 + M_3\left(a/t\right)^4\right\} f_\Phi \cdot g \cdot f_W \\
&H = H_1 + \left(H_2 - H_1\right)\sin^p \phi \\
&f_W = \sqrt{\sec\left(\pi b\sqrt{a/t}/2w\right)}
\end{aligned}\right\} \quad (1.82)$$

ここで　$0 < a/b \le 0.8,\ 0 < a/t \le 1,\ b/w < 0.5$ で $0 \le \phi \le \pi$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
&f_\phi = \left\{\left(a/b\right)^2 \cos^2\phi + \sin^2\phi\right\}^{1/4} \\
&M_1 = 1.13 - 0.09\left(a/b\right) \\
&M_2 = -0.54 + 0.89/\left(0.2 + a/b\right) \\
&M_3 = 0.5 - 1/\left(0.65 + a/b\right) + 14\left(1 - a/b\right)^{24} \\
&g = 1 + \left\{0.1 + 0.35\left(a/t\right)^2\right\}\left(1 - \sin\phi\right)^2 \\
&p = 0.2 + \left(a/b\right) + 0.6\left(a/t\right) \\
&H_1 = 1 - 0.34\frac{a}{t} - 0.11\frac{a}{b}\frac{a}{t} \\
&H_2 = 1 - \frac{a}{t}\left(1.22 + 0.12\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{t}\right)^2\left\{0.55 - 1.05\left(\frac{a}{b}\right)^{0.75} + 0.47\left(\frac{a}{b}\right)^{1.5}\right\} \\
&\Phi = \sqrt{1 + 1.464\left(a/b\right)^{1.65}}
\end{aligned}\right\} \quad (1.83)$$

$1 < a/b \le 2,\ 0 < a/t \le 0.8,\ b/w < 0.5$ で $0 \le \phi \le \pi$ の場合

$$f_\phi = \left\{\left(b/a\right)^2 \sin^2\phi + \cos^2\phi\right\}^{1/4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\left(1 + 0.04\frac{b}{a}\right) \\
&M_2 = 0.2\left(b/a\right)^4 \\
&M_3 = -0.11\left(b/a\right)^4 \\
&g = 1 + \left\{0.1 + 0.35\left(b/a\right)\left(a/t\right)^2\right\}\left(1 - \sin\phi\right)^2 \\
&p = 0.2 + \left(b/a\right) + 0.6\left(a/t\right) \\
&H_1 = 1 + G_{11}\frac{a}{t} + G_{12}\left(\frac{a}{t}\right)^2
\end{aligned}\right\} \quad (1.84\text{-}1)$$

$$\left.\begin{aligned}
H_2 &= 1 + G_{21}\frac{a}{t} + G_{22}\left(\frac{a}{t}\right)^2 \\
G_{11} &= -0.04 - 0.41(b/a) \\
G_{12} &= 0.55 - 1.93(b/a)^{0.75} + 1.38(b/a)^{1.5} \\
G_{21} &= -2.11 + 0.77(b/a) \\
G_{12} &= 0.55 - 0.72(b/a)^{0.75} + 0.14(b/a)^{1.5} \\
\Phi &= \sqrt{1 + 1.464(b/a)^{1.65}}
\end{aligned}\right\} \quad (1.84\text{-}2)$$

最深部の K 値は上式で $\phi = \pi/2$，表面では，$\phi = 0$ として求められる。上式は $a/t \le 0.8$ に対して与えられている。これより深いき裂に対しては、深さ方向のリガメントが小さいため、小さな応力しか働かない場合でも、全面降伏するので、最深部の K 値は与えられていない。

表面き裂の K 値に関しては，ベンチマークテストがアメリカで実施され，その結果が報告されている。その報告によると，適用する解析法により，特に最深部で，かなり大きな違いが認められる [18)]。報告書ではどの結果が最も信頼性を有するかの判断は避けている。しかし，その後の種々の問題に適用された結果ならびに要素分割などから，上記の Newman らの結果が信頼できるものと判断されている。

1.7.2 引張と面外曲げを受ける埋没楕円き裂

一様引張と一様面外曲げを受ける図 1.27 に示す埋没楕円き裂の K 値は、WES2805[19)] より

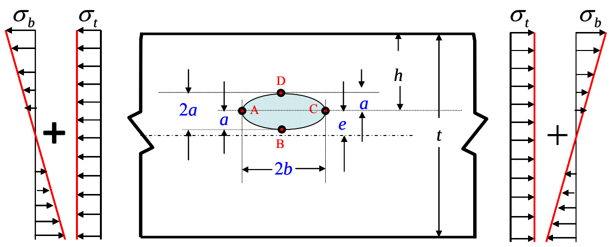


図 1.27 引張と面外曲げを受ける埋没楕円き裂

$$\left.\begin{aligned}
K_{\mathrm{A}} &= K_{\mathrm{C}} = (\sigma_t F_{t\mathrm{A}} + \sigma_b F_{b\mathrm{A}})\sqrt{\pi a} = (\sigma_t F_{t\mathrm{C}} + \sigma_b F_{b\mathrm{C}})\sqrt{\pi a} \\
K_{\mathrm{B}} &= (\sigma_t F_{t\mathrm{B}} + \sigma_b F_{b\mathrm{B}})\sqrt{\pi a} \\
K_{\mathrm{D}} &= (\sigma_t F_{t\mathrm{D}} + \sigma_b F_{b\mathrm{D}})\sqrt{\pi a}
\end{aligned}\right\} \quad (1.85)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
F_{t\mathrm{A}} &= M_{\mathrm{A}}/\Phi \\
F_{t\mathrm{B}} &= M_{\mathrm{B}}/\Phi \\
F_{t\mathrm{D}} &= M_{\mathrm{D}}/\Phi \\
F_{b\mathrm{A}} &= \left(1 - \frac{2h}{t}\right)\frac{M_{\mathrm{A}}}{\Phi} = \left(1 - \frac{2h}{t}\right)F_{t\mathrm{A}} \\
F_{b\mathrm{B}} &= \left(1 - \frac{2h}{t} + \frac{a}{t}\right)\frac{M_{\mathrm{B}}}{\Phi} = \left(1 - \frac{2h}{t} + \frac{a}{t}\right)F_{t\mathrm{B}} \\
F_{b\mathrm{D}} &= \left(1 - \frac{2h}{t} - \frac{a}{t}\right)\frac{M_{\mathrm{D}}}{\Phi} = \left(1 - \frac{2h}{t} - \frac{a}{t}\right)F_{t\mathrm{D}}
\end{aligned}\right\} \quad (1.86\text{-}1)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Phi = \left[1 + 1.464\left(\frac{a}{b}\right)^{1.65}\right]^{1/2} \qquad (\ a/b \le 1\ )\\
&M_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot M_2 \cdot M_2{}'\\
&M_{\mathrm{B}} = M_1 \cdot M_2{}'\\
&M_{\mathrm{D}} = M_2 \cdot M_1{}'\\
&\ln M_1 = \ln M_1{}' = \left(0.3826 - 1.399\mu + 2.037\mu^2 - 0.9213\mu^3\right)\tilde{\lambda}^2\\
&\qquad + \left(-0.4698 + 2.446\mu - 4.892\mu^2 + 2.557\mu^3\right)\tilde{\lambda}^3\\
&\qquad + \left(0.7965 - 1.594\mu + 2.931\mu^2 - 1.565\mu^3\right)\tilde{\lambda}^4\\
&\ln M_2 = \ln M_2{}' = \left(0.2597 - 1.251\mu + 1.920\mu^2 - 0.9348\mu^3\right)\tilde{\lambda}^2\\
&\qquad + \left(-0.1631 + 2.233\mu - 4.270\mu^2 + 2.277\mu^3\right)\tilde{\lambda}^3\\
&\qquad + \left(0.1327 - 1.424\mu + 2.681\mu^2 - 1.428\mu^3\right)\tilde{\lambda}^4\\
&\mu = \frac{a}{b}\\
&\tilde{\lambda} = \begin{cases} a/h & (\mathit{for}\quad M_1, M_2)\\ a/(t-h) & (\mathit{for}\quad M_1{}', M_2{}') \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.86\text{-}2)
$$

M_1, M_2の誤差：$\tilde{\lambda} \le 0.8$で０.５％以下

で与えられている。

なお、応力集中部に存在する特定の非貫通き裂に対する K 値は、有限要素法や境界要素法などの離散化手法で精度良く求めることが可能である。しかし、後に説明するように、繰り返し負荷によるき裂拡大過程では、線形破壊力学でき裂のアスペクト比変化を巧く表現することが出来ないのみならず、小規模降伏条件が満たされない条件下では K 値だけの破壊パラメタでは破壊現象を表現できない。そのため、上記の結果を巧く活用して、評価するき裂の CTOD 値を安全側（すなわち大き目に）に導く工夫が必要となる。

1.7.3 応力集中箇所に存在する表面き裂の K 値近似

疲労き裂は応力集中箇所から入り、ある程度大きくなると半楕円表面き裂に成長する。板厚方向で図 1.28(A)に示すような応力集中（その応力分布を $\sigma(x)$ とする）があり、それが板幅方向に一様に分布している場合の K 値は Maddox 流の考え方[20]より図 1.28(a)～(c)の様に近似できる。

応力集中場の板厚方向の応力分布 $\sigma(x)$ は、板中央では膜応力と面外曲げ応力が重畳した直線的

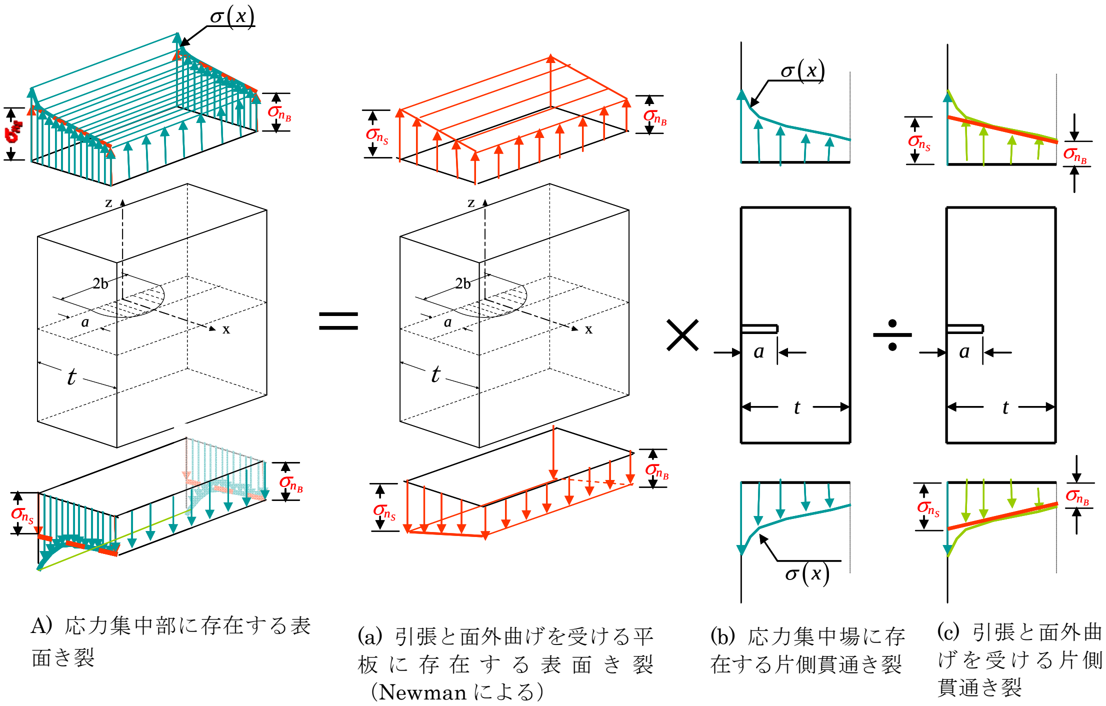


図 1.28 応力集中部に存在する表面き裂最深部の K 値推定法

な応力（図 1.28 では赤色で示している：公称応力）に板表面（場合によっては板裏面も）近傍での局部的な応力集中が加わったものとなる。すなわち引張応力と面外曲げ応力が重畳した公称応力が表面き裂に作用する図 1.28(a)によるき裂最深部の K 値（(1.81)式））に、最深部を含む xz 断面の平面を抽出し、それに図 1.28(b)に示すように $\sigma(x)$ が作用した場合の K 値を乗じ、さらに最深部を含む xz 断面の平面に(a)の直線状応力分布が作用した場合の K 値で除すことにより与えられる（なお、表面と最深部位置を結ぶ直線的応力が働く場合の K 値を補正する手法も考えられるが、付録 2A の図 A-5 の結果ならびに次節の結果より、公称応力が作用する場合の K 値に補正を施す方が精度の良い K 値が得られるものと期待される。ただし、非常に浅いき裂に対しては、表面とき裂最深部位置を結ぶ直線的応力による補正の方が精度が良く、両者の手法を巧く使い分けるのが良い手法と考えられる。)。

具体的には、図 1.28(a)による K 値は、(1.81)式より

$$K_{(a)} = \left[\frac{\sigma_{n_S} + \sigma_{nB}}{2} F_t + \frac{\sigma_{n_S} - \sigma_{nB}}{2} F_b \right] \sqrt{\pi a} \tag{1.87}$$

図 1.28(b)による K 値は、(1.53)式より

$$K_{(b)} = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{\sigma(x) G\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{a}{t}\right)}{\left(1 - \dfrac{a}{t}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} dx \tag{1.88}$$

図 1.28(c)による K 値は、(1.53)式より

$$K_{(c)} = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{\left\{ (t-x)\sigma_{n_S} + x\sigma_{n_B} \right\} \cdot G\left(\frac{x}{a}, \frac{a}{t} \right)}{t \cdot \left(1 - \frac{a}{t} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}} dx \tag{1.89}$$

ここで　σ_{n_S} ：表面応力（図 1.28 参照）

σ_{n_B} ：裏面応力（図 1.28 参照）

t ：板厚

したがって、図 1.28（A)の最深部の K 値（K_{elip}）は以下のように近似できる。

$$K_{elip} = \frac{K_{(a)} \cdot K_{(b)}}{K_{(c)}} \tag{1.90}$$

図 1.28 の幅方向（y 方向）に作用応力が一様でない場合には、図 1.29 に示すように、最初に入った表面き裂の中心から、き裂進展に伴い現時点の表面き裂の中心が移動する。この移動量 b_S は、

$$b_S = \sum_i \left(\Delta b_{R_i} - \Delta b_{L_i} \right) / 2 \tag{1.91}$$

ここで、

Δb_{R_i} ：各計算段階で得られた右側表面き裂のき裂進展量

Δb_{L_i} ：各計算段階で得られた左側表面き裂のき裂進展量

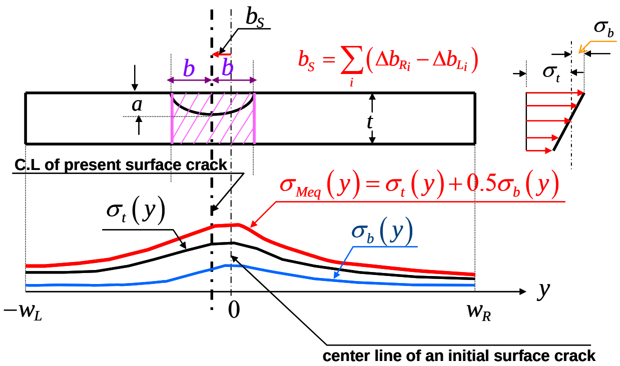


図 1. 29 板材に入って成長する表面き裂

表面き裂において左右の K 値が異なる場合には、最深部の位置は表面き裂の中心線とは一致しなくなり、き裂前縁線は楕円形からはずれてくる。しかし、近似計算が出来るようにするため、き裂最深部は常に表面き裂の中央に位置するとして得られる K 値で評価できると仮定する。板厚貫通き裂の破壊強度ならびに疲労き裂伝播速度に対しては、面外曲げ応力の 1/2 が膜応力と等価であるという結果 [21)] より、等価引張応力 $\sigma_{Meq}(y)$ は、

$$\sigma_{Meq}(y) = \sigma_t(y) + 0.5\sigma_b(y) \tag{1.92}$$

ここで、表面でのき裂中央位置が b_S で、左右に b の長さをもつ板厚貫通き裂（図 1.29 で赤色斜線で示したき裂）に対しての K 値は、右側のき裂先端に対しては、(1.49)式より

$$K_R = \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \int_{-b}^{b} \sigma_{Meq}(y + b_S) \sqrt{\frac{b+y}{b-y}} dy \cdot M_R \tag{1.93}$$

ただし、

$$M_R = \sqrt{\frac{2\left(w_R - b_S\right)}{\pi b}\tan\frac{\pi b}{2\left(w_R - b_S\right)}} \tag{1.94}$$

左側のき裂先端に対しては

$$K_L = \frac{1}{\sqrt{\pi b}}\int_{-b}^{b}\sigma_{Meq}\left(y + b_S\right)\sqrt{\frac{b-y}{b+y}}dy \cdot M_L \tag{1.95}$$

ただし

$$M_L = \sqrt{\frac{2\left(w_L + b_S\right)}{\pi b}\tan\frac{\pi b}{2\left(w_L + b_S\right)}} \tag{1.96}$$

一方、$\sigma_{Meq}\left(0\right)$（通常、$\sigma_{Meq}\left(y\right)$の最大値）が一様に作用する場合の K 値は

$$K_M = \frac{\sigma_{Meq}\left(0\right)}{\sqrt{\pi b}}\int_{-b}^{b}\sqrt{\frac{b+y}{b-y}}dy \cdot M_M = \sigma_{Meq}\left(0\right)M_M\sqrt{b\pi} \tag{1.97}$$

ただし

$$M_M = \sqrt{\frac{\left(w_L + w_R\right)}{\pi b}\tan\frac{\pi b}{\left(w_L + w_R\right)}} \tag{1.98}$$

したがって、図 1.29 のように y 方向に公称応力分布が生じており、 $y = 0$ の位置で応力集中があり、図 1.28(b)に示すように板厚方向応力分布が生じている場合の K 値は(1.90)、(1.93)、(1.95)および(1.97)式を用いて

$$K = K_{elip} \cdot \frac{K_R + K_L}{2K_M} \tag{1.99}$$

と近似できる。なお、K_{elip} を構成する(1.90)式中の $K_{(a)}$ には、(1.82)式中の f_w という幅方向有限板補正が含まれているので、(1.97)式の K_M にも幅方向有限板補正が施されている。

なお、表面き裂のき裂成長はき裂最深部に着目して行うことになり、あらかじめ実験式による表面き裂のアスペクト比変化を与えてき裂最深部の K 値を求め、深さ方向のき裂増分 Δa が求められる。そして、与えたアスペクト比変化式から、き裂深さが $a + \Delta a$ となった場合の表面き裂長が求められる。この表面き裂長さを $\breve{b}$ とすると、表面き裂が深さ方向に Δa 進展すると、表面では $2\Delta b = 2(\breve{b} - b)$ だけのき裂増分が生じる。この増分を左右の K 値に応じて振り分けることになる。

すなわち、右側に関しては

$$\Delta b_{R_i} = \frac{2\Delta b \cdot K_R^m}{K_R^m + K_L^m} \tag{1.100}$$

左側に対しては

$$\Delta b_{L_i} = \frac{2\Delta b \cdot K_L^m}{K_R^m + K_L^m} \quad (1.101)$$

ここで　m ：Paris 則の指数

上記の取り扱いは、疲労き裂成長の着目点に関してき裂開閉口挙動を考慮するが、他の点に関してまでは考慮していないためである。当然他の点のき裂開閉口まで考慮するためには、他の点に関しても同時にき裂前方の K 値変化を与えなければならず、その変化は着目点のき裂成長にも影響を受ける。したがって、常にき裂増分量に関しても収束計算が必要となり、煩雑となるためである。

1.8 き裂先端に生じる塑性域内の応力/ひずみ分布

Hutchinson[22]は(1.102)式で示される Ramberg-Osgood 型の応力～ひずみ関係を有する材料について、微小変形全ひずみ理論を適用して、平面応力ならびに平面ひずみ状態における塑性域内の応力を解析した。

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = F\bar{\sigma}_{eq}^N \quad (1.102)$$

ただし、N:$(=1/n, n$:ひずみ硬化係数)

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_Y} \quad , \quad \bar{\sigma}_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_Y}$$

ε_{eq} ：相当ひずみ
σ_{eq} ：相当応力
σ_{Y} ：降伏強度
ε_{Y} ：降伏ひずみ（$=\sigma_{\mathrm{Y}}/E$）

その結果、き裂先端に生じる塑性域内では、以下に示す応力/ひずみ特異場(これを研究者らの頭文字を用いて HRR 特異場と称している)が存在することが判明している。

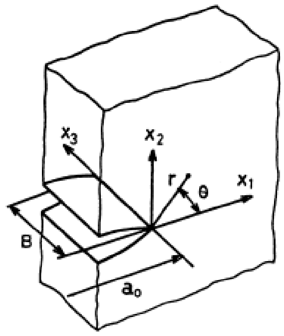


図 1.30　き裂先端を原点とする座標系

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{\mathrm{Y}}\left[\frac{J}{F\cdot\sigma_{\mathrm{Y}}\cdot\varepsilon_{\mathrm{Y}}\cdot I\cdot r}\right]^{\frac{n}{n+1}}\tilde{\sigma}_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= F\cdot\varepsilon_{\mathrm{Y}}\left[\frac{J}{F\cdot\sigma_{\mathrm{Y}}\cdot\varepsilon_{\mathrm{Y}}\cdot I\cdot r}\right]^{\frac{1}{n+1}}\tilde{\varepsilon}_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (1.103)$$

ただし、　r ：き裂先端からの距離（図 1.30 参照）
$\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}$ ：n と角度 θ の関数（図 1.30 参照）
I:n に依存する定数
J:J 積分（弾塑性応力場における G 値（ひずみエネルギ解放率）

また、Shih ら[23)]の研究結果をもとにき裂開口変位δとJ積分の関係が伊藤[24)]により以下のように導かれている。

$$J/\sigma_Y \cdot \varepsilon_Y \cdot a = M\left(a/W, n\right) \cdot \left(\delta/2\pi a \varepsilon_Y\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{1.104}$$

ただし　W ：試験幅
a ：き裂長
M ：a/W およびnの関数（完全剛塑性体の場合(1.104)式は$J=\sigma_Y\delta$となりMは一定値となる）

Hutchinson は$1/n$が 3,5,9,13 の場合について、$\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{u}_{ij}$ ならびにIの値を報告しているが、種々の$1/n$についての結果を報告していない。それは Hutchinson が導いた応力関数の支配方程式の収束性が極めて悪いためである。それを 1 年がかりで解き、き裂線上の応力やひずみについて多項式近似した結果が報告されている[25)]。その結果は

平面応力状態の場合

$$\left.\begin{aligned}
I &= 2.5034 + 5.1180n - 3.3272n^2 \\
\tilde{\sigma}_r(0) &= 0.57230 + 0.62131n - 0.15221n^2 \\
\tilde{\sigma}_\theta(0) &= 1.1516 - 0.0098350n - 0.37225n^2 \\
\tilde{\tau}_{r\theta}(0) &= 0 \\
\tilde{\varepsilon}_r(0) &= -0.0071570 + 0.63674n - 0.020181n^2 \\
\tilde{\varepsilon}_\theta(0) &= 0.82020 - 0.21718n - 0.41565n^2 \\
\tilde{\sigma}_{eq}(0) &= 0.99755 - 0.013207n - 0.10327n^2
\end{aligned}\right\} \tag{1.105}$$

平面ひずみ状態の場合

$$\left.\begin{aligned}
I &= 3.8830 + 6.8988n - 5.6685n^2 \\
\tilde{\sigma}_r(0) &= 1.7865 - 0.60084n + 0.39441n^2 \\
\tilde{\sigma}_\theta(0) &= 2.8730 - 3.9361n + 3.1427n^2 \\
\tilde{\tau}_{r\theta}(0) &= 0 \\
\tilde{\varepsilon}_r(0) &= -0.0057542 - 0.10816n + 0.21970n^2 \\
\tilde{\varepsilon}_\theta(0) &= 0.0057542 + 0.10816n - 0.21970n^2 \\
\tilde{\sigma}_{eq}(0) &= 0.94099 - 2.8884n + 2.3801n^2
\end{aligned}\right\} \tag{1. 106}$$

上記で$\tilde{\sigma}(0)$などの0は$\theta=0$を表している。

上記の解は微小変形理論を適用したものであるので、塑性変形によるき裂鈍化の影響は全く考慮されていない。

Rice ら[26)]は図 1.31 に示すように、き裂底が半径0.5ψの半円状に変形し、き裂が平行に開くとモデル化し、辷り線場理論より、図に黄色で着色した領域の長さを対数らせん辷り線場

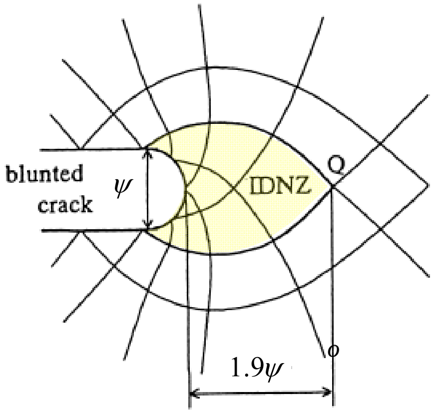


図1.31　鈍化き裂先端における辷り線場

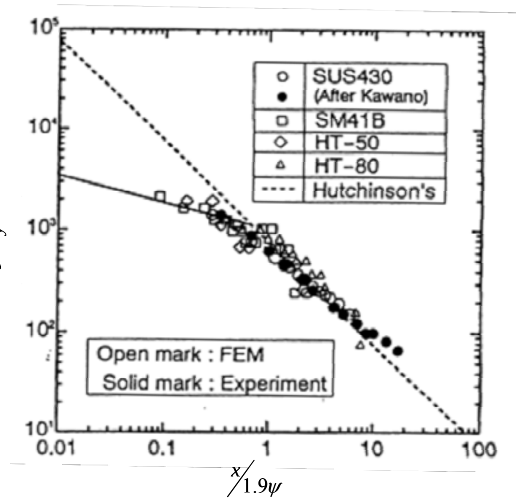


図1.32　鈍化き裂先端近傍のひずみ分布

であることを利用して、$\left(e^{\pi/2}-1\right)\cdot\psi/2\approx1.9\psi$ であることを示した。この領域は IDNZ（Intensely Deformed Nonlinear Zone）とよばれており、この領域で破壊が生じると考えられている [27]。IDNZ 内では HRR 特異性は消滅するが、図 1.32[28]に示すように IDNZ の外側の塑性域内の HRR 特異場の勾配の$1/\varsigma$倍（$\varsigma\approx4.5$）になっていることが判明している。ただし、図 1.32 の縦軸は、(1.103)式を変形して、

$$\frac{1}{r}=\xi\varepsilon_y^{n+1} \tag{1.107}$$

ただし、$\xi=\left[\dfrac{1}{F\varepsilon_{\mathrm{Y}}\tilde{\varepsilon}_y}\right]^{\frac{1}{n+1}}\dfrac{\sigma_{\mathrm{Y}}\varepsilon_{\mathrm{Y}}FI}{J}$

となるので$\xi\varepsilon_y^{n+1}$としている。

上記の結果を利用すると、単調載荷条件下ではあるが、き裂先端近傍のひずみ分布を近似的に求めることができる。

2. 脆性破壊評価

2.1 デープノッチ試験

図 2.1 にディープノッチ試験片の形状を示す。(a)図が中央貫通き裂付きディープノッチ試験片、(b)図が端部貫通き裂付きディープノッチ試験片である。き裂先端近傍の応力分布解析が最初になされたのが前者（ただし、試験片幅は∞）であることから分かるよ

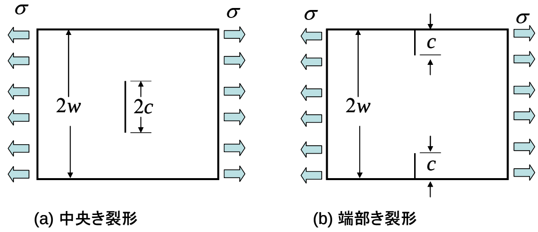


図 2.1 ディープノッチ試験片

うに本試験片は破壊力学における最も基本的な試験片である。この試験片の K 値は、両タイプの試験片とも

$$K = \sigma\sqrt{\pi c}\sqrt{\frac{2w}{\pi c}\tan\frac{\pi c}{2w}} \tag{2.1}$$

ここで σ ：無限遠で働く一様応力

で表される。破壊発生時の σ を(2.1)式に代入して得られる K 値（K_C 値）が破壊靭性値となる。K_C 値は切欠の鋭さの影響を受けるので、正式には切欠先端幅を 0.2mm 程度に加工し、その後繰り返し負荷を与えて、疲労き裂を導入した試験片を用いるのが建前である。ただし、疲労き裂を導入するのが大変なため、切欠先端幅が 0.2mm 程度のソウカットままの試験片を用いることが多い。

図 2.2 は図 1.21 で用いられた先端切欠幅が 0.2mm の中央貫通切欠試験片（試験片幅（$2w$）:400mm、板厚：25mm）を用いた脆性破壊試験結果より、供試鋼板の破壊靭性値を求めた結果である。赤く塗りつぶしたデータが降伏点より小さな荷重で破壊したものである。それ以外のデータは降伏点より大きな負荷のもとで破壊したもので、invalid なデータになる。このように降伏点より低い荷重で破壊した valid なデータは、き裂長さの大小で K_C 値が変化することはない。破壊靭性値は図 2.2 の表示法が用いられることが多く、$\ln K_C$ と $\ln 1/T$（T ：絶対温度表示のケルビン温度）で右下がりの直線となる関係をアレニウス型の関係を有すると表現している。なお、このデータは機械切欠の破壊靭性値であり、疲労き裂の場合には、図 2.2 の結果よりも少し低下する。機械切欠材に繰り返し負荷を与えて疲労予き裂を導入するのはかなり煩雑であるため、機械切欠先端幅が 0.2mm 以下の機械切欠を加工しただけのディープノッチ試験片を用いて得られる K_C 値を、疲労予き裂材のそれに換算する方法が提案されている [29]。破壊応力/降伏点の値で機械切欠材の K_C 値を、疲労き裂材のそれに換算する係数は変化するが、対数表示上では一定値としてもデータのばらつき内に納まるため、0.2mm 幅の機械切欠機械切欠材の K_C 値に 0.68 倍すれば疲労予き裂材の K_C 値になることが示されている [30]。

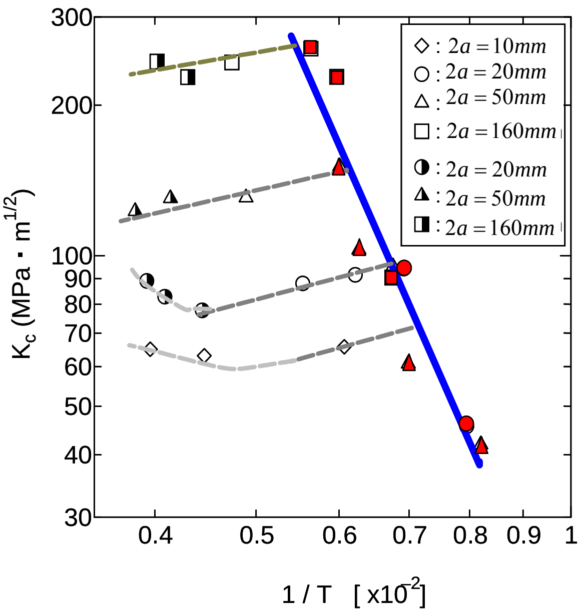


図 2.2 破壊靭性値の温度依存例

荷重軸方向に試験片の中央を溶接した場合、中央き裂形のディープノッチ試験片のき裂先端部には引張残留応力が働き、低温域では母材よりも小さな荷重で破壊する。一方端部き裂形の場合

にはき裂先端に圧縮応力が働き、低温域では母材より大きな荷重まで破壊に耐えることになる。

2.2　3 点曲げ COD 試験と高張力鋼溶接継手の破壊靭性

破壊靭性値をディープノッチ試験で求める場合、試験片が大きくなり、試験のための鋼材使用量が大きくなる（高靭性材料になるほど、き裂長と試験片幅を大きくしなければ valid な破壊靭性値を得ることが出来ない）。Ingham ら[31]は、端部き裂を有する帯板に面外曲げ負荷を与えた場合、き裂マウス部（き裂と板表面との交点）付近には殆ど応力が作用しないため、この部分は剛体変形だけ生じ、この剛体変形部の変位をき裂前方まで延長した線と、き裂線と交わる点を中心に回転変形していると仮想した。実き裂先端位置の直線表示された変位が、1.6 節に示した Dugdale モデルで得られる実き裂部の COD（CTOD）に対応すると仮定して、以下に示すマウス部 COD から CTOD への換算式[32]が提案された。

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{0.45(w-c)}{0.45w+0.55c+z}(V-V') & \cdots \quad (V \geq 2V') \\ \dfrac{0.45(w-c)}{0.45w+0.55c+z}\left(\dfrac{V^2}{4V'}\right) & \cdots \quad (V < 2V') \end{cases} \tag{2.2}$$

ただし

$$V' = \frac{\gamma \sigma_Y w\left(1-\nu^2\right)}{E} \tag{2.3}$$

ここで

V ：クリップゲージ変位（$z=0$ の場合はマウス COD）
V'：弾性限度 COD
w：試験片高さ
c ：き裂長さ
z ：き裂マウスからクリップゲージ取り付け位置までの距離。正の場合は試験片の外側、負の場合は試験片内部（き裂面）を表す。

そして、γ は、

$$\gamma = 4.05\left(\frac{c}{w}\right)^4 - 7.03\left(\frac{c}{w}\right)^3 + 1.93\left(\frac{c}{w}\right)^2 + 3.40\left(\frac{c}{w}\right) \tag{2.4}$$

と近似されている。川口[33]は 800MPa 級高張力鋼母材ならびに溶接継手から、3 点曲げ試験片ならびに中央き裂形ディープノッチ試験片を採取し、母材ならびに溶接継手ではノッチ位置を溶接金属中央とボンドとする 2 種類の試験を、それぞれ実施している。なお、全ての試験片における切欠先端幅は 0.2mm としている。そして 3 点曲げ試験では、(2.2)式より限界 CTOD 値（δ_C）（破壊発生時の δ）を得、小規模降伏条件下における K 値と δ の関係

$$K = \sqrt{E\sigma_Y \delta} \tag{2.5}$$

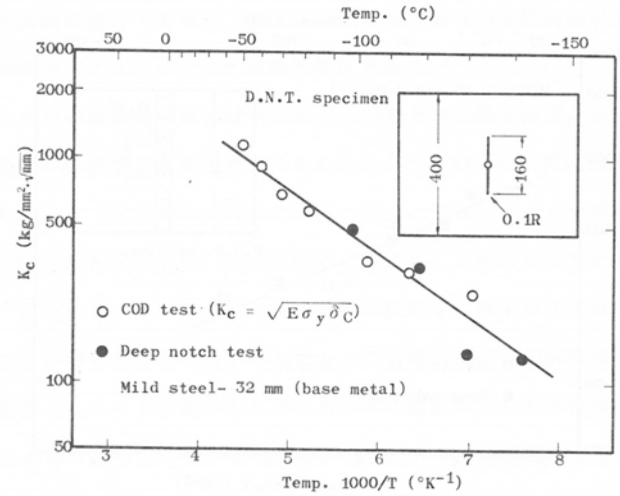


図 2.3 ディープノッチ試験と３点曲げ CTOD 試験結果の比較（母材 32mm 厚、機械切欠（切欠先端幅 0.2mm））

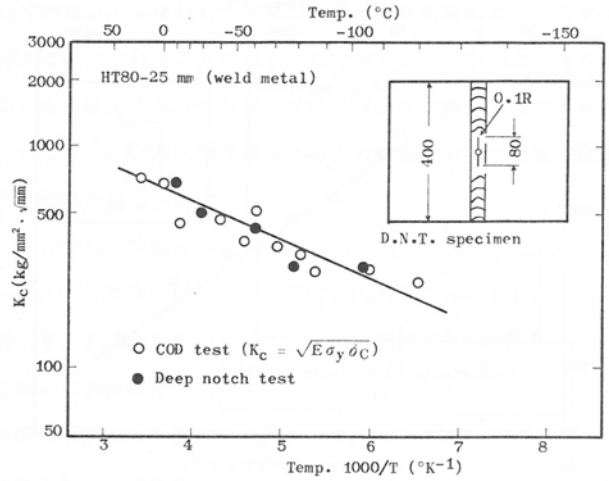


図 2.4 ディープノッチ試験と３点曲げ CTOD 試験結果の比較（溶接継手中央、機械切欠（切欠先端幅 0.2mm）、25mm 厚）

を用いて K_C 値に換算し、ディープノッチ試験の結果（(2.1)式による）と比較している。それらの結果を図 2.3～図 2.5 に例示する。これらの結果から、特に図 2.3 で高温域（左側）での３点曲げ試験片で低温域のアレニウス形の破壊靭性値表記が高温域でもそのまま成立していることから、3 点曲げ CTOD 試験がディープノッチ試験と同じ結果を与えると考えられた。

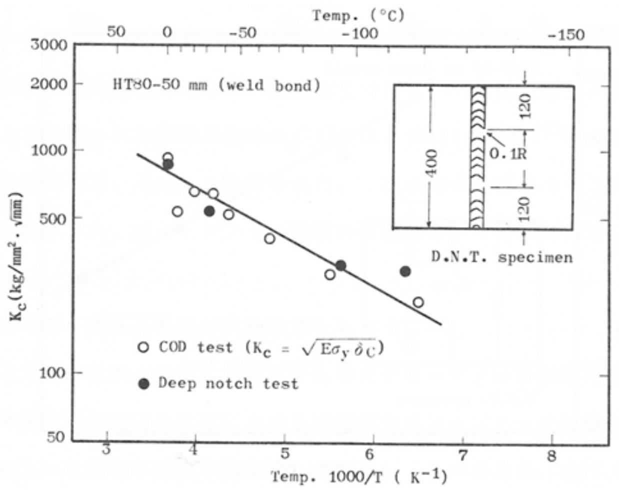


図 2.5 ディープノッチ試験と３点曲げ CTOD 試験結果の比較（溶接ボンド部、機械切欠（切欠先端幅 0.2mm）、50mm 厚）

しかし、降伏点相当のき裂結合力が働く場では、Dugdale モデルから分かるように、実き裂先端から離れた実き裂部の COD の外挿値よりも実き裂先端付近は小さくなるが、Ingham のモデルではマウス部近傍の COD の外挿から CTOD を求めるので、大きな CTOD となり非安全側となるとの議論が当初からなされた。

北海の海洋リグの建造にあたり、リグそのものの安全性を担保するためというよりも、限界 CTOD 値が大きいほど、安全という立場から溶接継手に対しての要求限界 CTOD 値が、当時の実験室レベルの 3 点曲げ COD 試験結果の実績値の上限近くに定められた。そして溶接入熱が大となるなど、より厳しい状況下でも、この要求をクリアできるよう材料開発が行われ、プロジェクト毎に要求限界 CTOD 値が大きくなるという歴史をたどってきた。また、マウス COD から CTOD の換算に際して、CTOD を小さく推定する方が安全を担保できるという単純な発想で換算法の研究がなされ、これらが各国の規格に反映されてきている。

しかし本来は、実構造で局部的に塑性域となる場にき裂が入った場合に、構造が脆性破壊をしないことを担保するための最小の限界 CTOD 値を要求限界 CTOD とすべきである。この観点からは、局部的塑性域に存在するき裂（通常は表面き裂）のき裂結合力モデルならびに破壊靭性試験片に対するき裂結合力モデルを確立し、両者の破壊時の CTOD 値（限界 CTOD 値）が統計的に同一のものであると証明し、これをもとに要求限界 CTOD 値を設定すべきである。

なお、3 点曲げ CTOD 試験は簡便であるため、国際規格 ISO/FDIS12737 に取り上げられている。試験片形状、寸法に関する規定を図 2.6 に示す。試験片板厚 B を鋼板の板厚と同じとし、試験片高さ W を標準試験片では 2 B、長さを 4.2W 以上とし、その中央に切欠を導入する。そして、試験片厚さ（＝鋼板元厚）の全領域で疲労き裂の前縁線が計画した位置に導入することを目論んで、図 2.7 に示すように目的に合わせて種々の切欠が採用されている。そして、ノッチの傾きは表面垂直線に対して±2°内にすることが決められている。また疲労予き裂長さは 0.025W か 1.3mm 以上にすることになっている。さらにマウス COD の計測では図 2.8 に示すナイフエッジが用いられる。さらに、COD 試験では、図 2.9 に示すように、支点のローラが試験片長手方向に負荷中変位するのを無理にとめないで、ローラが容易に回転できるように設計することを要求している。万一回転しない場合、小さなマウス COD で破壊することが経験されており（曲げに加えて引張荷重が働き、この効果を考慮すれば正しい破壊靭性値が得られるはずであるが、その補正法は今のところ確立されていない）、見掛け上破壊靭性値が小さくなるので注意が必要である。

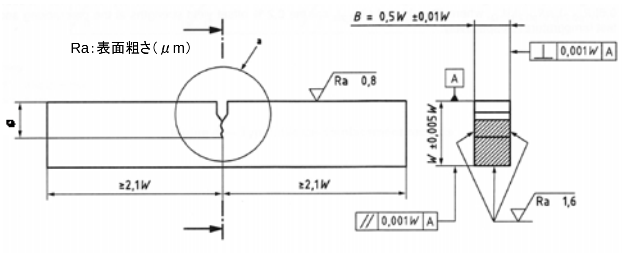


図 2.6　3 点曲げ COD 試験片形状

ところで溶接継手では、母材側から溶接ボンド部に近づくに従い、溶接時の熱サイクルによる最高到達温度は高くなり、その温度に晒される時間は長くなる。また板厚が大きくなるほど冷却速度は速くなる。鋼材組成とこの熱サイクルに対応して、マルテンサイト、ベーナイト、フェライト、パーライトといった様々な組織が現れ、その結晶粒径の大きさも変化する。多層盛溶接で

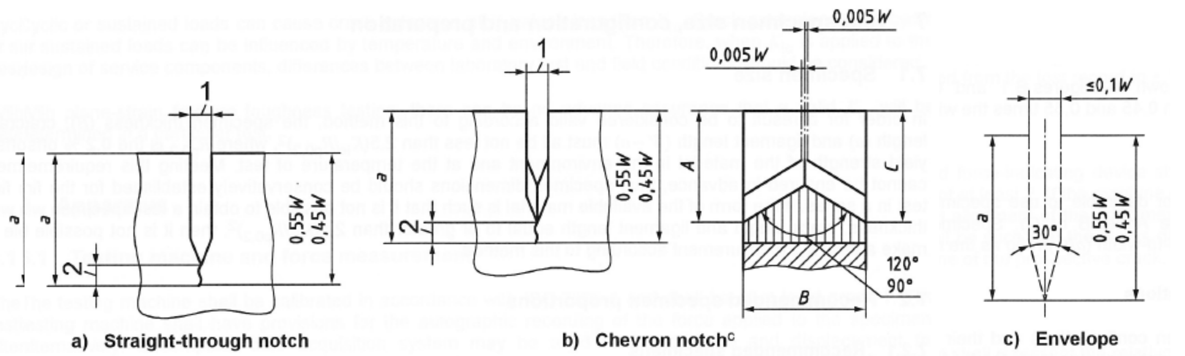


図 2.7　種々のき裂導入用切欠とその許容寸法

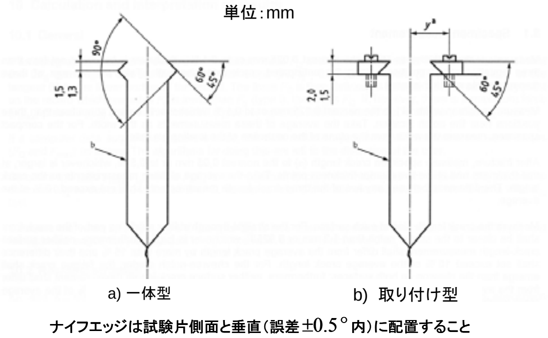


図 2.8 マウス COD 測定用ナイフエッジ

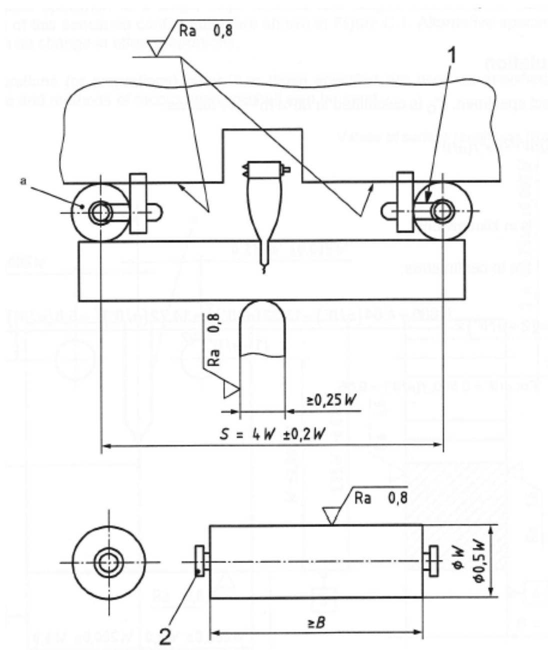


図 2.9 三点曲げ COD 試験の治具ならびに試験状況模式図

は、これらの組織に更なる溶接熱サイクルが作用するので、さらに複雑な組織が点在して現れる。欠陥やき裂の先端前縁にはこれらの組織が混在して存在することになるが、破壊はそれらのなかで最も脆化している箇所から生じる。このため、破壊靭性値は組織に敏感であり、組織敏感性を有すると言われる。

鋼は Fe 以外にさまざまな元素を含む合金であり、C、Si、Mn、P、S が鋼の基本５元素と言われている。この５元素の基本的役割は一般的に以下のように考えられている。C は鋼の最も基本的な元素で、硬さ、強度を高める。Si も C と同様、硬さと強度を高める元素で１％当たり 98MPa 程度強度を高めるのと、製鋼時に脱酸の役割を演じている。Mn は焼入れ性を高める元素で靭性を良くする。P と S は有害物質で前者は低温時に、後者は高温時に鋼を脆くする不純物元素である。そして Mn/C が大きくなるほど、溶接継手ボンド部のエネルギー遷移温度が低くなる（靭性が高くなる）ことが知られている。種々の役割を期待して 5 元素以外の元素も鋼に添加されることがある。

一般的に C が高い鋼では、1200℃程度以上の溶接熱サイクルに晒された箇所は硬くなると同時に結晶粒径も大きくなり、破壊靭性値は低くなる。高張力鋼では C が高くなるので、溶接継手のボンド近傍は発達した C 固溶量が高いオーステナイトから急冷却されるために、C 固溶量の低い体心立方格子に変態時、余った C が Fe 格子間に入ったりすると同時に結晶粒径も大きくなるために硬くなり破壊靭性が小さくなるのが一般的である。1980 年代に日本で実用化研究がなされた TMCP 鋼は製鋼圧延時、A_{r3} 変態点直上で強圧延を施すことで結晶粒を微細化し、C を高くす

ることなく高張力を得ることができる鋼である。そのため、溶接ボンド部は従来の調質高張力鋼ボンド部のようには破壊靭性値は低くならない。ところが、後続の溶接により、このボンド部が２層域（A_1変態点とA_3変態点の間の温度。この温度下では、面心立方体のオーステナイトと体心立方体のフェライトが混在している）に晒されると島状マルテンサイトと称される組織が現れ易くなることが判明している。この領域は mm オーダのもので、せいぜい 2mm×2mm の大きさである。

溶接熱影響部（HAZ）のどこにどのような組織が生じているかを調査する場合、まず溶接断面マクロを採取し、腐食溶液（旧オーステナイト結晶粒界を選択的に腐食する、80℃、100cc 飽和ピクリン酸溶液＋１ｇトリメチルベンゼンスルフォ酸ナトリウムが推奨されている [34]）に応じて現れるボンド部から最も遠い箇所（D 点とする）の最高到達温度と、この位置の等温線に対する法線を引き、それと溶接ボンドとの交点 H を定める。次に下記のアダムスの式 [35]

$$\frac{1}{\theta_{\max}-\theta_0}=\frac{4.13c\rho}{(q/v)}y+\frac{1}{\theta_m-\theta_0} \tag{2.6}$$

ただし　$\theta_{\max}$ ：最高到達温度
θ_m ：溶融温度
θ_0 ：板の温度（室温）
c ：比熱
ρ ：密度
v ：溶接速度
q ：単位板厚当たりの入熱量
y ：溶融線からの距離

より、$4.13c\rho/(q/v)(=A)$ を未定定数とした、

$$\frac{1}{\theta_{\max}-\theta_0}=Ay+\frac{1}{\theta_m-\theta_0} \tag{2.7}$$

に、ボンド部の最高到達温度（1800K）と D 点の最高到達温度（腐食液により決定される）と位置関係を入力することにより未定定数の A を定める。したがって、D-H 間の内点における最高到達温度を推定することができる [36]。このようにして各組織が受けた熱サイクルを推定することが出来る。

図 2.10 の下の２つの図はボンド近傍で受ける多重熱サイクルと、それに伴って生じる組織存在領域を模式的に描いたものである。左下図でハッチングした箇所（一番下の箇所は第２サイクルの最高到達温度が 500℃以下の箇所でボンドではない）が、溶接ボンド部である程度幅を持つので誇張して示している。このボンドに隣接する箇所の結晶が、高温に晒されたことにより粗大化している。高炭素鋼の場合、図 2.10 上図に示すように単一サイクルを受けただけでも破壊靭性

は低くなり、後続の 2 層域温度に晒されるとさらに破壊靭性値は低くなる（しかし元々低いので、それからの脆化は少ない)。

一方 TMCP 鋼のように低 C で、結晶微細化により強度を創り込んだ、高張力鋼の溶接継手ボンド部は、結晶はある程度粗大化するが、図 2.10 上図に示すように、単一サイクルを受けただけでは、あまり脆化せず、高炭素鋼のボンド部よりははるかに大きな破壊靭性値を有している。しかし、後続の溶接（左下図で第 2 パス溶接金属と表示）により、この箇所にはさまざまな組織が晶出する。第 2 パスによる熱サイクルの最高到達温度が 1200℃以上に晒された箇所は第 1 サイクルも結晶が発達する温度のため結晶は粗大化したままである（左下図で黒く塗りつぶした箇所Ⓐ)。第 2 パスによる熱サイクルの最高到達温度が A_{C3} 変態点から 1200℃の場合には再結晶のために結晶粒が細かくなり、破壊靭性値が高くなる領域（左下の図でクロスハッチングしたⒷ領域)、そして第 2 パスによる熱サイクルの最高到達温度が A_{C1} 変態点から A_{C3} 変態点の間にある、いわゆる 2 層域に加熱された場合 Martensite–austenite constituent(M-A:いわゆる島状マルテンサイト)がⒸ領域に現れる。この M-A 組織内の炭素量は母材およびマトリックスと比較して非常に高く、冷却速度が遅くなれば冷却中の炭素の拡散距離が長くなり、M-A 組織中に濃縮される炭素量が多くなることが報告されている [37]。その結果Ⓒ領域が周りに比べて破壊靭性値が極端に低くなる（局部的な劣化域：LBZ（Local Brittle Zone と呼ばれている))。破壊靭性値の分布の様子を図 2.10 上図に示すが、図のように低炭素鋼では M-A 組織のところは周りに比して極端に劣化しているものの、高炭素鋼の破壊靭性値よりも（高炭素鋼での劣化は周りと比して大きくはないものの、全体的に靭性が小さい）高靭性となっている。この M-A は、後の熱サイクルで 450℃以上に加熱されれば、分解してテンパーされ、靭性は回復す

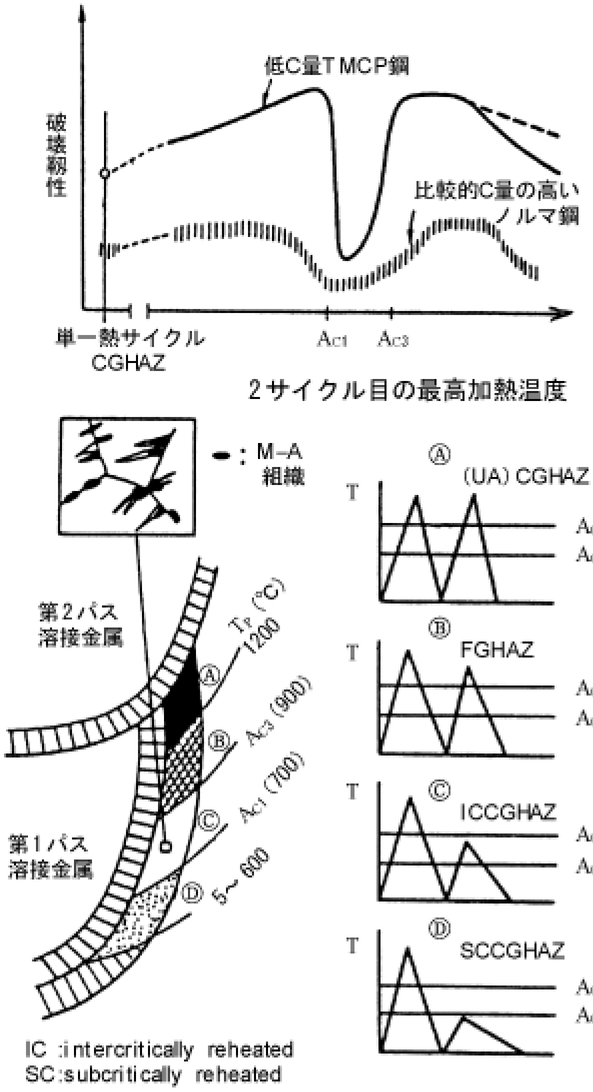


図 2.10 高張力鋼溶接継手ボンド近傍に現れる組織

る[38]。

LBZ からの脆性破壊発生が直ちに構造全体の不安定破壊につながるとは限らないが，脆性破壊が発生し、極僅かしかき裂が生じなかった（Brittle Step と呼んでいる）としても、繰り返し負荷が働く場合には、疲労寿命を大幅に縮めてしまうことになるので、brittle step を起こすことも、構造にとっては致命傷になることもある。そこで最近では，鋼材設計面と溶接施工面から LBZ を生じにくくする手法（LBZ フリー技術）が開発されている[39-42]。

したがって、高張力鋼溶接継手の破壊靭性値を把握するには、これらの現象を十分理解し、目的に合わせて試験片タイプと切欠位置を計画する必要がある。鋼多層盛溶接熱影響部の靭性は，破壊靭性試験によって評価される。破壊靭性試験の方法は下記の試験目的によって異なる。

① 実構造部位で発見された溶接欠陥の構造安全性評価などに用いる破壊靭性の評価

② 材料選定や溶接施工法の承認などに用いる破壊靭性の評価

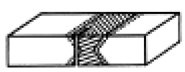
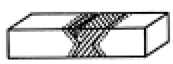
③ 材料開発などのための破壊靭性の比較評価

破壊靭性試験を，①や②の目的で行う場合，通常，疲労予き裂入りの３点曲げ，もしくはコンパクト試験片が用いられる。

表 2.1 には溶接継手の破壊靭性値を把握するための COD 試験について、継手タイプと切欠タイプを示す。それぞれ特徴があり、目的に応じてこれらのタイプを選択する必要がある。

以上のように鋼多層盛溶接熱影響部は，材質不均一が著しいので，靭性評価に当たっては試験結果が何を意味するかを試験目的に照らして吟味することが重要である。これまでの多くの実験

表 2.1 溶接熱影響部の破棄靭性値を求めるための種々のタイプの COD 試験片とその特徴

	板厚貫通切欠きタイプ		表面切欠きタイプ	
	 K 開先	 X 開先	 X 開先	 ビード・イン・グルーブ
目的	Prequalification test	General assessment	Finess-for-purpose assessment	
	・材料や溶接施工条件の選定 ・HAZ の下限的靭性の評価		・特定の欠陥の破壊抵抗評価 ・特定のＨＡＺ組織の靭性評価	
ＨＡＺ組織の特徴	実継手の ＨＡＺ 形態とは必ずしも一致しない	実継手のHAZ 形態とほぼ一致		特定の ＨＡＺ 組織の再現が比較的容易
切欠き前縁の LBZ寸法	必ずしも大きくない（融合線の直線性等に依存）	小さい	亀裂先端を目標組織に当てるのが容易でない（LBZにうまく当てれば亀裂先端のほぼ全域をLBZで覆うことが可能）	
亀裂進展方向の組織変化	少ない		著しい	

と研究の結果をもとに，溶接熱影響部の破壊靭性評価上の注意事項をまとめたものが，日本溶接協会規則 WES 1109-1995[43]として公表された。以下に，靭性評価におけるチェックポイントを列記する。

1）溶接継手の作製

試験溶接継手は，実施工条件をなるべく忠実に再現して作製する。試験目的②では，通常 K 型やレ型開先が用いられるが，その場合でも入熱条件は実施工に合わせる。溶接パスの積層の仕方，熱影響部形状の分かる継手断面のマクロ写真（もしくはスケッチ）を添付するようにする。

2）試験片の選定

試験目的に応じて，試験片が板厚貫通切欠き型か表面切欠き型かを選定する。試験目的①では後者が用いられることが多いが，疲労き裂形状が必ずしも直線状でないため，試験片表面と内部とでき裂先端組織が同じでないことがある。試験目的②では通常，板厚貫通切欠き型が用いられ，き裂が最脆化組織を通るように切欠き位置を選定する。

3）き裂先端の組織と破壊起点の同定

用いた試験片の疲労予き裂先端位置，および破壊がどの組織から生じたかを明らかにするために，図 2.11 に示すセクショニングを実施する。通常は，疲労予き裂面を垂直に切断して調べる(a)図の手順を採用するが，必要に応じて(b)図の破壊起点を通り破面に垂直な断面の調査も行う。(表面切欠き型試験片ではたとえき裂先端が目標組織に位置していても，延性き裂成長などによって破壊がその組織から起きるとは限らないこと[44]，また，母材と溶接金属の強度差の大きい継手では，き裂が湾曲成長して目標組織から破壊経路が逸脱することがある[45]などのため。)

4）破壊靭性値に及ぼすき裂前縁の脆化部寸法の影響

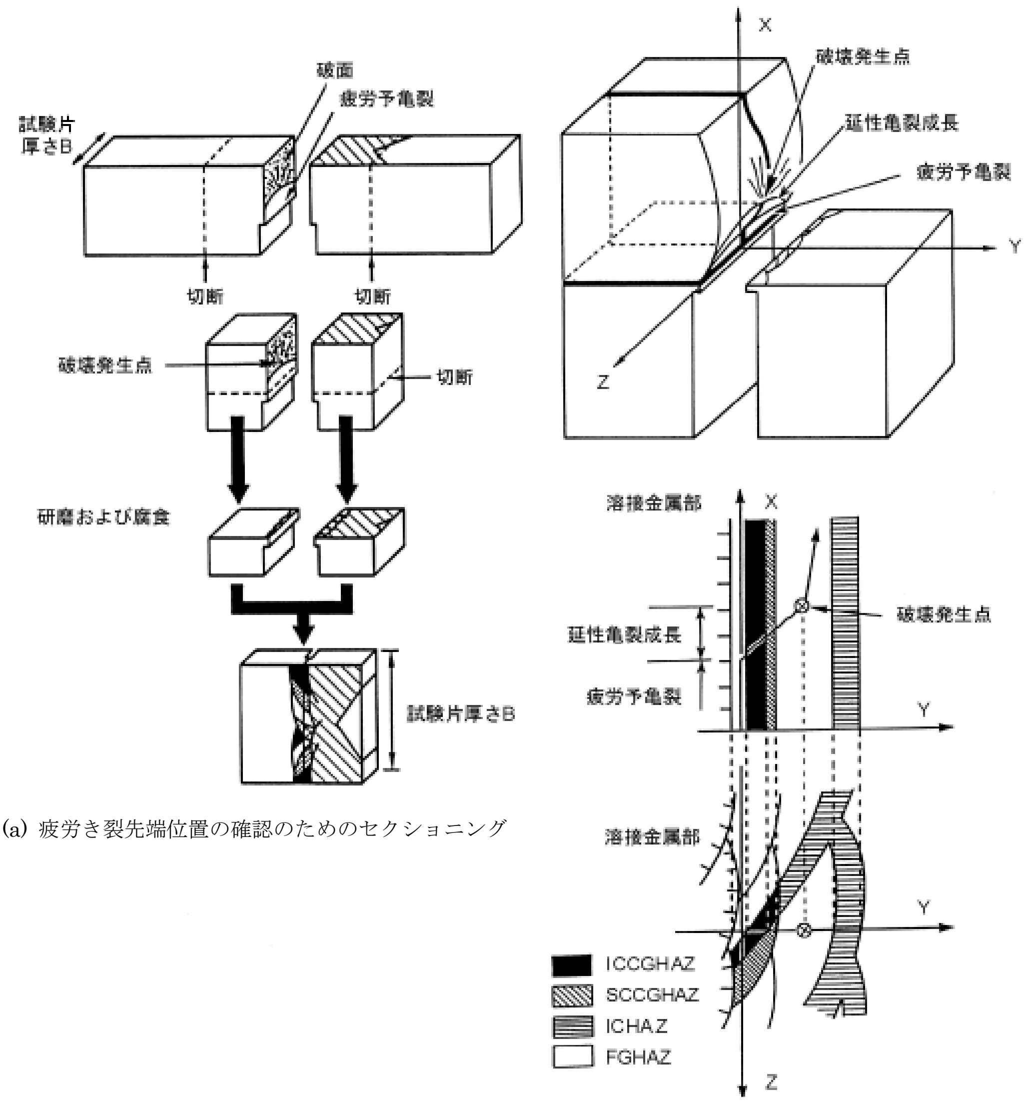
溶接熱影響部の破壊靭性値はき裂先端に存在する脆化部の寸法の影響を受け，脆化部寸法が小さくなると，全体的に破壊靭性値は大きくなる傾向にある。セクショニングにおいては，き裂前縁に沿う脆化部寸法を調査するようにする。破壊靭性値の寸法効果の評価には，最弱リンクモデルが有効である[46]。

5）破壊靭性値に及ぼす強度ミスマッチの影響

母材と溶接金属の強度的ミスマッチが大きい場合には，き裂先端近傍の変形挙動だけでなく破壊靭性値も影響を受ける。特に，溶接金属の強度が母材強度を上回るオーバーマッチ継手では，溶接熱影響部の塑性変形が強度の高い溶接金属に拘束される結果 (塑性拘束)，破壊靭性値が見かけ上小さくなることに注意する必要がある[47]。

6）試験本数

通常は，同一条件で得られた有効な試験データ 3 個のうちの最低値を材料の破壊靭性値として採用する。破壊靭性値の確率的側面を考慮した評価の仕方は WES 2805[19]の解説に記されている。



(a) 疲労き裂先端位置の確認のためのセクショニング

(b) 破壊経路、起点組織確認のためのセクショニング

図 2.11 溶接 HAZ に予き裂をもつ破壊靭性試験片のセクショニング手順

なお、シャルピ-試験片でも LBZ が切欠底にあれば、脆化していることが確認できるが、試験片幅中央の 5mm 内の外側（試験片端部から 2.5mm 内側）にあっても、脆化を捉えることが出来ず、この意味で、シャルピー試験は LBZ に鈍感な試験と考えて良い。すなわち、応力/ひずみ集中が激しいと脆化現象が現れるが、シャルピー試験片程度のひずみ集中では脆化現象が現れにくいと考えられる。

2.3 破壊靭性値の板厚依存

K_C 値や δ_C 値は破壊靭性値と考えられおり、図 2.2 に示したように温度に依存して変化するが、板厚が大きくなるほど小さくなることも判明している。したがって、破壊靭性試験は元

厚の試験片で行うのを原則としている。永井、河野ら[48)]は板厚貫通き裂のき裂開口変位が板厚方向で変化し、板厚中心で最も大きくなっていることを印象材による形採り結果と弾塑性 FEM 解析により明らかにし、板厚方向の拘束効果で板厚中心付近のき裂開口方向の応力が大きくなることに対応していることを示した。さらに、応力増分$\{d\sigma\}$とひずみ増分$\{d\varepsilon\}$の塑性状態での関係

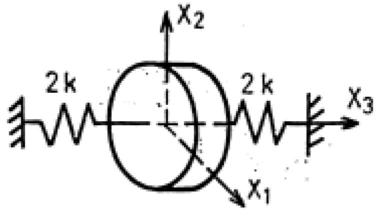


図 2.12　板厚方向の拘束効果のモデル化

$$\{d\sigma\}=\left[D^p\right]\{d\varepsilon\}=\left[d_{ij}\right]\{d\varepsilon\} \qquad (i,j=1\sim 4) \tag{2.8}$$

　　ただし　　d_{ij} ：$\left[D^p\right]$の要素

における応力～ひずみマトリックス$\left[D^p\right]$の板厚方向成分に対して、図 2.12 に示すように板厚方向（x_3 軸）に単位面積当たり$k(B)$の強さのばねで支持されたモデル

$$\frac{d\sigma_{33}}{Bd\varepsilon_{33}}=-k(B) \tag{2.9}$$

　　ただし　B ：板厚

を組み込んだ。(2.8)式と(2.9)式より（$\left[D^p\right]$については、適当な有限要素法の参考書[49)]を参照されたい)、

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{33} &= -\left(d_{31}d\varepsilon_{11}+d_{32}d\varepsilon_{22}+d_{34}d\varepsilon_{12}+d_{35}d\varepsilon_{23}+d_{36}d\varepsilon_{31}\right)/\left(kB+d_{33}\right) \\ &= -\beta\left(d_{31}d\varepsilon_{11}+d_{32}d\varepsilon_{22}+d_{34}d\varepsilon_{12}+d_{35}d\varepsilon_{23}+d_{36}d\varepsilon_{31}\right)/d_{33} \end{aligned} \tag{2.10}$$

　　ただし

$$\beta=d_{33}/\left(kB+d_{33}\right) \qquad 0\le\beta\le 1$$

（β ：板厚拘束影響係数、$\beta=0$ ：平面ひずみ状態、$\beta=1$ ：平面応力状態）

となる。この剛性マトリックスを与えた有限要素法を作成し、種々のβに対してのき裂開口変位δ値を解析すると同時に板厚中央のδ値の実験結果と比較し、板厚Bとβとの関係を求めた[50,51)]。その結果を図 2.13 に示す。さらに、き裂開口方向の応力σ_{22}が破壊応力σ_Fに達したとき破壊すると仮定すれば、上記弾塑性 FEM を用いてδ_c値の板厚効果を推定できることを示した。その結果を図 2.14 に示す[52)]。彼らはβを 1.8 節に示した Hutchinson の基礎式に導入し、応力関数の支配方程式を導いているが、1.8 節で説明したように支配方程式の収束性が極めて悪いためと思われるが、近似解は報告されていない。簡便に破壊靭性値の板厚効果を推定できるようにするためには、βを導入した上記支配方程式を解いて、1.8 節のようにnとβを用いた多項式で$\tilde{\sigma}_{ij}$などを与えることが必要であろう。

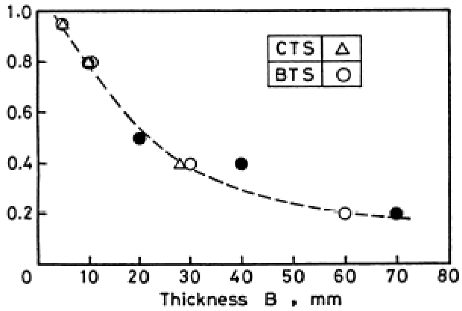
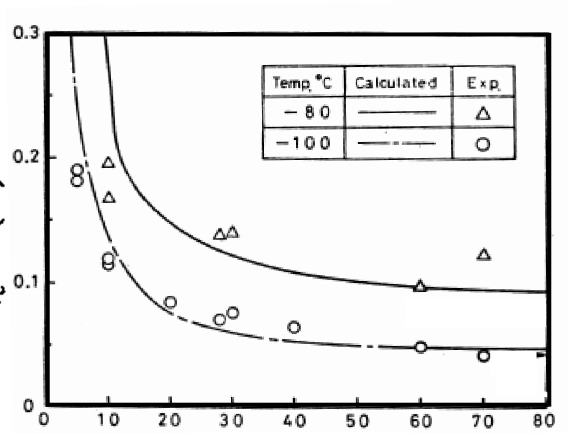


図 2.13　板厚拘束影響係数βと板厚の関係（CTS：コンパクト・テンション試験、BTS：３点曲げ試験、塗りつぶしたものは過去のデータ）



板厚　　(mm)

図 2.14　限界き裂開口変位に及ぼす板厚の影響（試験結果と解析結果の比較）

2.4 CTOD設計曲線ならびにWES2805の概要

これまでに生じた脆性破壊事故では、非常に脆化している場合にはき裂がなくても切欠部から直接生じたものもあるが、大半は構造的不連続などの応力/ひずみ集中場に存在した板厚非貫通き裂を起点にしている。これまで破壊力学は主として一様応力場に存在するき裂を題材として発展してきた（応力集中場についての破壊力学の展開が出来ていないためと考えられるが）。Burdekinは中央き裂形ディープノッチ試験片でき裂を跨いで試験片の中心線上に標点をとり、この標点間の変位とCTODの関係を実験的に求めた。標点間変位/標点間距離は一種のひずみになる（標点間距離を無限に外挿した場合のこの一種のひずみをoverall stainと呼んでいる）が、実構造における欠陥がない場合に作用ひずみの欠陥領域での平均値がoverall stainに対応していると仮定している[53)]。このoverall stainとCTODの関係はCTOD設計曲線と呼ばれている。

実構造で検出された欠陥に対する安全性評価では、欠陥を理想化してそのK値と同じK値を有する板厚貫通き裂長さ（等価欠陥寸法と呼んでいる）を求めると同時に、実構造に作用する最大の負荷時に働く想定欠陥領域の平均ひずみをまず求める。ついでCTOD設計曲線よりこの平均ひずみをoverall stainと読み替えてCTOD（δ）を求める。そして、三点曲げ試験などで得られた限界 CTOD（δ_C）と比較する。$\delta < \delta_C$であれば、検出された欠陥は対脆性破壊に対して安全と見なすという手法が提案された[54)]。

上記を参考にして、日本溶接協会では日本独自の手法を追求し、1976年に欠陥評価法がWES2805として制定された。そして1980年の部分改訂を経て「信頼性工学による検討」部分の解説・増補が行われた。その後各種溶接構造物の安全性評価や事故原因の究明などに活用され、国際的にも評価されてきた。そして長年の運用経験から指摘された問題点や破壊力学の発展を取り込んで、より精度の高い評価法の確立を目指して 1989 年より全面的な改訂作業に入り

WES2805 が 2011 年に改定された [19]。

WES2805 では、CTOD 概念をベースとして、その CTOD の評価の考え方としては一貫して「局所ひずみアプローチ」を用いている。構造物で一般に破壊が問題となる部位は構造的応力集中部であることが多く、き裂が存在した場合、そのき裂をどれだけ開口させ得るかという考え方に基づいている。WES2805 における欠陥評価の流れを図 2.15 に示す。すなわち、非破壊検査などにより発見された欠陥が許容できるか否かの判定を行うことになる。一般的には欠陥像は複雑な形状を示すので、破壊力学的取り扱いが可能となるように単純化する（欠陥の標準化）。具体的には、欠陥像に外接するような半楕円あるいは楕円状のき裂に置き換える。

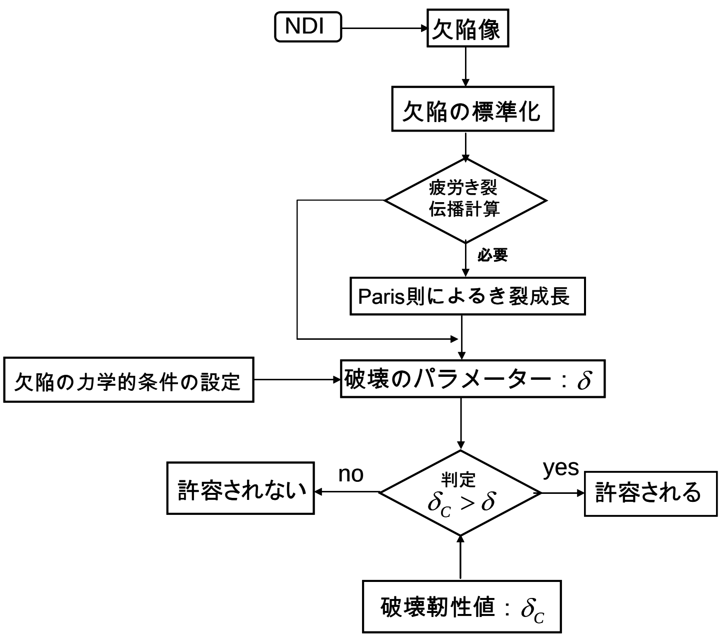


図 2.15　WES2805 における欠陥評価の流れ

ここで必要なら疲労き裂の伝播解析を行う。疲労き裂伝播解析ではき裂開閉口現象を無視し、ΔK_{th} を考慮した Paris の伝播則（後に説明する 3.1 節参照）を簡単のため採用している。欠陥の外縁に凹凸がある場合凹部分は周りより K 値（あるいは CTOD）は大きくなり、場合により外接するような楕円状き裂の K 値よりも大きくなることもあるが、この場合極局所的に大きくなっているだけであるから、この標準化のために破壊が生じにくくなることは考えられないとして安全側の評価になるように配慮されている。

発見された欠陥が疲労により拡大することが予想されるなら、拡大後の欠陥について許容判定を行う必要があるからである。次に簡単な形状に置き換えられたき裂をさらに等価な（危険度が同じ）板厚貫通き裂（二次元き裂）に置き直す。ここで危険度を測る尺度としては K 値を用いている。

一方、き裂部位に生じる外力としてのひずみを、応力解析等をベースに算定しておき、このひずみと先に得た二次元き裂の長さから、後述の CTOD 設計曲線を用いて CTOD（δ）を求める。この δ と破壊靭性試験により得られた限界 CTOD 値（δ_C）（通常 3 本の試験の最低値を採用する）を比較し、$\delta_C \geq \delta$ ならその欠陥は許容出来ると判定する。最新 WES2805 では、判定の部分に信頼性工学的考え方を導入し、信頼性工学的に意味のある安全率を考慮することとしている。

次に δ の評価に用いる諸式を具体的に示す。大規模な実験的研究の結果に基づいて WES2805

の CTOD 設計曲線が次式のように決められている。

$$\delta = \begin{cases} e_Y \bar{a}(\pi/2)(e/e_Y)^2 & : e/e_Y \le 1 \\ e_Y \bar{a}(\pi/8)\left[9(e/e_Y)-5\right] & : e/e_Y > 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

ここで、　e_Y ：降伏ひずみ

$\bar{a}$ ：等価欠陥寸法

評価に用いるひずみ e は、欠陥部に作用する局所平均ひずみ（欠陥がない場合に作用する局所平均ひずみの欠陥領域での平均値）であり、ひずみ集中係数 K_ε により、

$$e = K_\varepsilon \cdot e_{\mathrm{nom}} \tag{2.12}$$

ここで　e_{nom} ：部材に働いている公称ひずみ

（遠方で一様応力が働く場合は一様応力/ヤング率 E）

で求められる。そして K_ε は弾性応力集中係数 K_t を用いて次式で推定される。

$$K_\varepsilon = \begin{cases} K_t & : K_t\sigma \le \sigma_Y \\ K_t + \hat{A}(e/e_Y - 1/K_t) & : \sigma_Y/K_t \le \sigma \le \sigma_Y/\hat{\lambda} \end{cases} \tag{2.13}$$

ただし

$$\hat{A} = \hat{\lambda}\left(K_t^{2/(1+n)} - K_t\right)/\left(1-\hat{\lambda}/K_t\right)$$

$$\hat{\lambda} = \sigma_{net}/\sigma$$

σ_{net} は欠陥がないと考えた場合に作用している実断面応力で、$\hat{\lambda}$ は通常の問題では 1 である。n はひずみ硬化係数で

$$n = 0.12 \cdot \ln(1390/\sigma_Y) \tag{2.14}$$

ここで　σ_Y は MPa 表示による降伏点もしくは 0.2%耐力である（以下、0.2%耐力も降伏点と呼ぶ）。

なる経験式を用いて求められる。K_t の例は幾つか紹介されているが、分らない場合には別途弾性計算が必要としている。

欠陥が溶接継手部もしくは HAZ にある場合には残留応力によるひずみを加算しなければならないが、WES2805 では溶接線と直角に欠陥がある場合、降伏ひずみの 0.6 倍、溶接線に平行に表面き裂がある場合、降伏ひずみの 0.36 倍を(2.11)式の e に足し込むようにしている。また溶接後熱処理がなされる場合、溶接残留応力除去が完全でなかった場合には、溶接残留応力の最大値として、溶接ままの状態における値の 15%が残っているものとして評価することになっている。

$\delta_C \ge \delta$ で欠陥を許容する手法では、欠陥の標準化や破壊靭性値の決定などの手順で安全側となるよう配慮されており、特に安全率は考慮されていない。最新版 WES2805 では評価の信頼性

を確保するために部分安全係数の考え方が導入された。すなわち評価に用いた情報に不確実性が認められる場合には、定められた信頼度を一定に保つために、破壊が生じる条件を、下式のように与えている。

$$\delta\left(\gamma_a \overline{a}, \gamma_e e\right) \geq \phi \delta_C \tag{2.15}$$

ただし、γ_a, γ_e, ϕ ：部分安全係数

最新版 WES2805 では、目標信頼度に応じてこれらの数値が附属書としてテーブル化されている。

2.5 破壊靭性値に及ぼすひずみ速度の影響

鉄鋼材料は準静的に引張負荷を与えた場合、低温になる程、降伏点、引張強さは上昇し、伸びは低下して脆くなる性質がある。負荷速度が大きくなると、温度が低くなった場合と同じような変化が生じる。Bennet ら [55]は活性化エネルギ論的立場から、降伏点はひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ と温度の関数である以下の Strain Rate－Temperature Parameter（R）に依存して変化することを導出した。

$$R = T \ln\left(\frac{10^8}{\dot{\varepsilon}}\right) \tag{2.16}$$

ただし　T：温度（ケルビン表示：K）

図 2.16 は HT-780 鋼の丸棒引張試験を種々の温度、負荷速度下で行って得られた降伏点の計測結果の例である。丸棒試験片の平行部に貼付したゲージによる降伏する直前のひずみ速度と温度から得た(2.16)式の R 値と降伏点の関係を示したのが図 2.17 である [56]。応力ーひずみ関係が(1.102)式で表される Ramberge-Osgood 型であるとして、降伏点 σ_Y とひずみ硬化係

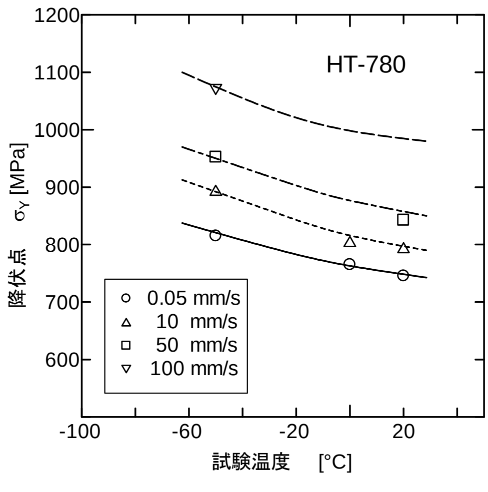


図 2.16　種々の温度、負荷速度下における HT-780 鋼の降伏点計測結果

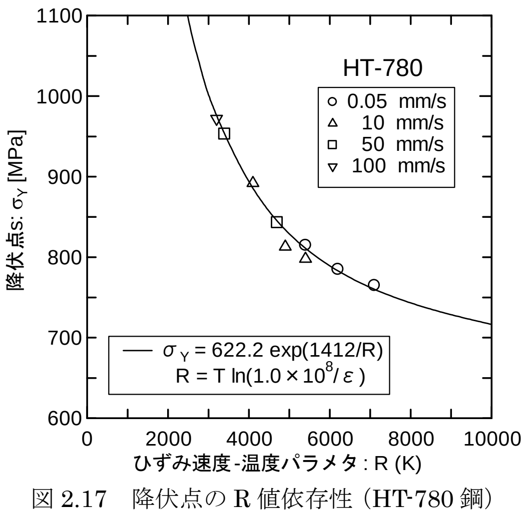


図 2.17　降伏点の R 値依存性（HT-780 鋼）

数 n（ただし降伏直後の値）との相関を調査した結果が図 2.18 である。

負荷速度を制御しない限り、引張試験中負荷速度を一定に保つことはできず、降伏後は試験片のバネ定数が小さくなる（コンプライアンスが大きくなる）ので、負荷速度は大きくなる傾向にある。塑性域に入り塑性仕事がなされるとその約 9 割が熱に変換される [57]。ゆっくりと負荷されると周りに熱が散逸する時間的余裕があるため、ほとんど塑性仕事による温度上昇は生じない。しかし、負荷速度が大きくなると熱が散逸する間も塑性仕事による熱が供給されるため局部的に温度上昇が起こる。負荷速度が大きくなるとひずみ速度が大きくなり、温度上昇が生じるので（2.16）式から分かるように、R 値は負荷中に大きくなる場合もあるし、小さくなる場合もあることが理解できよう。

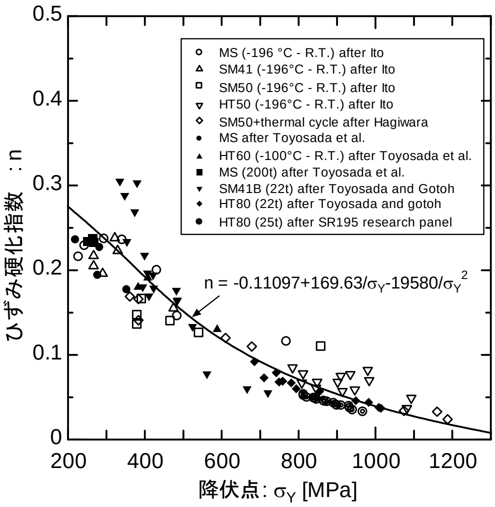


図 2.18　降伏点とひずみ硬化指数の関係

降伏後もひずみ硬化係数 n が一定に保持されると仮定すると、図 2.16～図 2.18 を使用して図 2.19 が得られる。丸棒引張試験片の平行部に貼付したひずみゲージと熱電対による表面の温度計測結果から、充分に負荷速度が小さい場合については、丸棒引張試験片の最小断面はほぼ一様な温度となっているから、(2.16) 式により R 値が求まり、作用ひずみと R 値をもとに図 2.19 により負荷中の応力－ひずみ曲線が推定できる。一方負荷速度が大きい場合には、試験片内部におけるひずみ、ひずみ速度、塑性仕事による発熱と熱伝導による温度上昇が異なり、最小断面における平均温度上昇、平均ひずみならびに平均ひずみ速度を推定しなければ、応力～ひずみ曲線は決定できない。

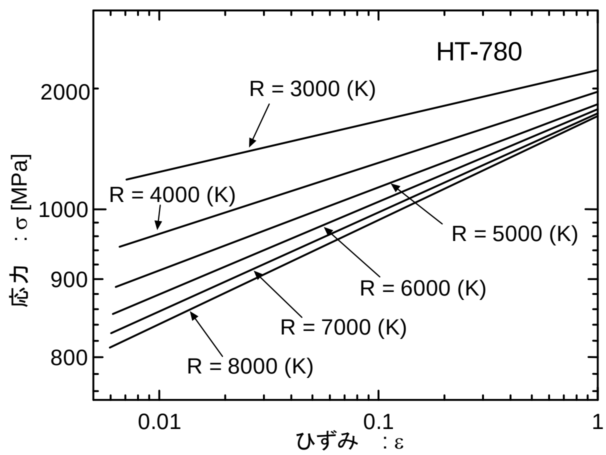


図 2.19　応力―ひずみ線図の R 値依存（HT-780 鋼）

試験片内部のひずみ、ひずみ速度、塑性仕事による発熱量ならびに温度上昇は時々刻々変化する。これらの大きさを推定するためには、R 値変化に伴う応力－ひずみ曲線が既知でなければならない。熱伝導解析と動的弾塑性有限要素法を錬成させたプログラム（この機能を有する汎用プログラムは、今のところ CRC 社による FINAS しかない。2 次元問題（軸対象

回転体を含む）の専用プログラムは九大で開発し、その結果を FINAS に組み込んでいる。）に R 値変化に伴う応力ーひずみ曲線の材料特性を取り込み、境界条件（変位で入力）の時間変化を与えて各点における温度、ひずみ速度から R 値→作用応力→塑性仕事速度→熱伝導→局部温度上昇→R 値と繰り返し計算で収束させ、ゲージ貼付位置でのひずみ、ひずみ速度ならびに熱電対設置位置における温度の時間曲線が計測結果と一致すれば、用いた材料の R 値変化に伴う応力ーひずみ曲線が正解と考えてよい。もし、一致しなければ、応力ーひずみ関係（図 2.19 に対応するデータ）で R 値が小さい領域に関して修正して、上記を繰り返さなければならない。

上記のようにして得られた応力—ひずみ曲線の実験結果と推定結果を比較した例を図 2.20 に示す。このように動的負荷、特に衝撃荷重が作用した場合には、材料の基本特性である応力ーひずみ関係が時々刻々変化し、使用材料に対する R 値をパラメタとした応力ーひずみ関係を求めなければならない。

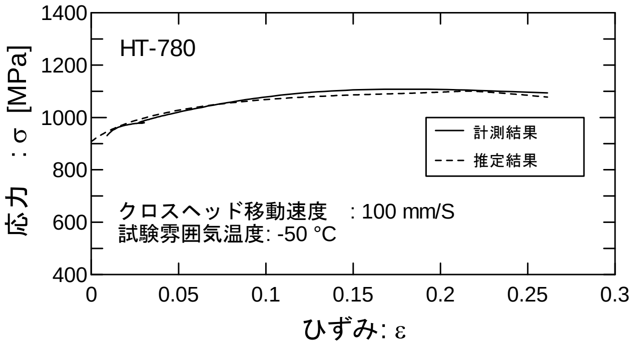


図 2.20　任意負荷速度と温度下における応力ーひずみ曲線の推定結果と実験結果の比較例

これが確定すれば、破壊靭性試験で計測された荷重点変位の時間曲線を入力することにより、き裂近傍の局部温度上昇やひずみ速度、ひずみ、応力などが計算できる。図 2.21 に示す

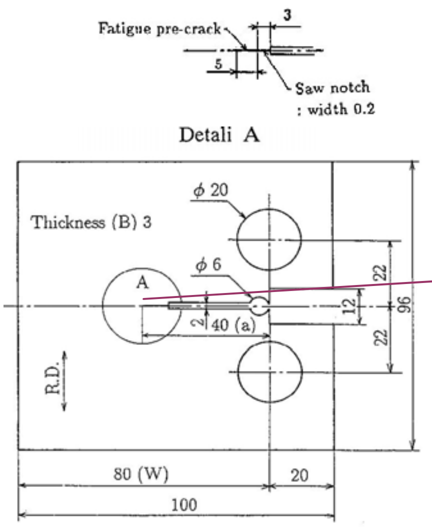


図 2.21　塑性仕事による温度上昇分布測定用ＣＴ試験片

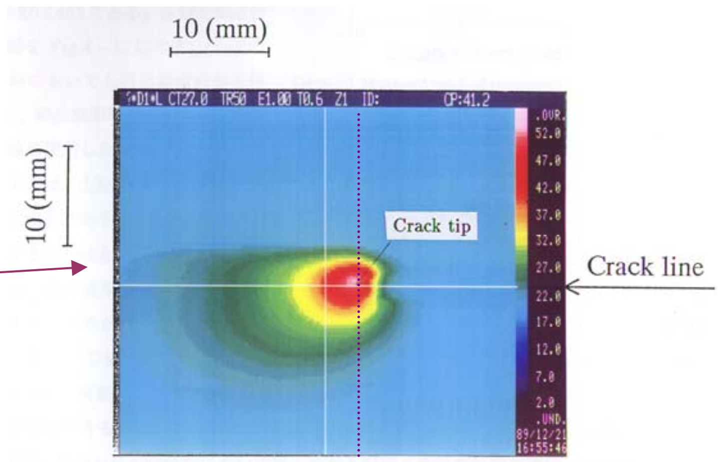


図 2.22　サーモビュアによる負荷中のき裂先端近傍の温度上昇測定例（100mm/s で荷重点変位が 5㎜ に達した瞬間にき裂線にスキャン位置がくるように計測のトリガを設定し、変位を保持して測定した画像。き裂線より上は 5mm 以下の変位で、き裂線より下は変位一定（5mm）に保持されている。画像の一番上から下までのスキャン時間は 0.6 秒）

CT 試験片を用いて 100mm/s で負荷したときにサーモビューアで温度計測した結果を図 2.22 に例示する。このサーモビューア画面は画面上で上から下までスキャンするのに 0.6 秒かかり、き裂線位置に計測線がきた瞬間、負荷を一定に保持するような設定を行って撮影したものである。そしてき裂は右側に位置し、き裂先端と表示した点より左側がき裂前方のリガメント部に対応する。そのためき裂線位置より上側の計測位置では、き裂線に計測線が達した時点より小さな荷重となっており、温度は広がっていない。しかし、下側は温度の広がりは大きいことが分かる。サーモビューアで計測した次の画面では全く温度上昇は認められなかった。すなわち、0.6 秒後には完全に熱が散逸し、温度上昇は 0 となっており、き裂先端のように局部的に塑性仕事がなされる場合には周りが弾性状態であるため熱の散逸が極めて速いことが理解出来よう。

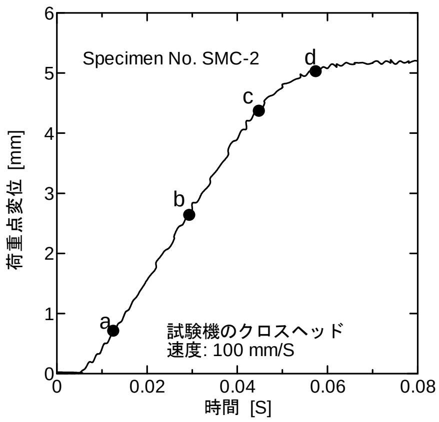


図 2.23　100mm/s の速度で CT 試験片を引張った時の荷重点変位の測定結果

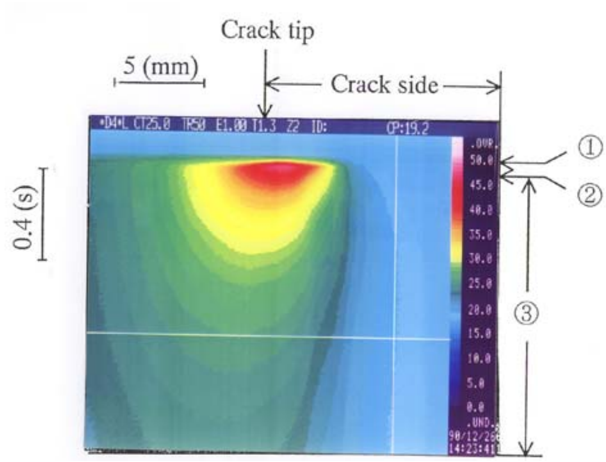


図 2.24　き裂線上位置の温度分布測定（縦軸は時間経過）

図 2.23 に CT 試験片に負荷した変位－時間の計測結果を例示する。温度計測はサーモビューアで行われたが、この場合は面全体の計測でなく、常にき裂線上を計測するように配慮されたものである。その計測結果が図 2.24 であり、図中①が負荷開始時点、②が荷重点変位が図 2.23 で意図された最終変位 5 mm に達した時点であり、その後荷重は保持され、き裂先端近傍で塑性仕事はなされない。そのため②の位置が最も高温域が広がっており、急速に熱が散逸している。図 2.25 に図 2.23 に示した a,b,c,d の各瞬間におけるサーモビューアによる温度計測結果と、上記 FEM による計算結果が示されている。このように、R 値を関数とする応力ーひずみ曲線を組み込んだ動的弾塑性有限要素法と熱伝導解析を錬成させたプログラムにより、塑性仕事による発熱で温度が局部的に上昇し、部位毎に時々刻々応力ーひずみ関係が変化する場合の、温度上昇、弾性ひずみ、塑性ひずみ、ひずみ速度、作用応力などの情報が得られることになる。

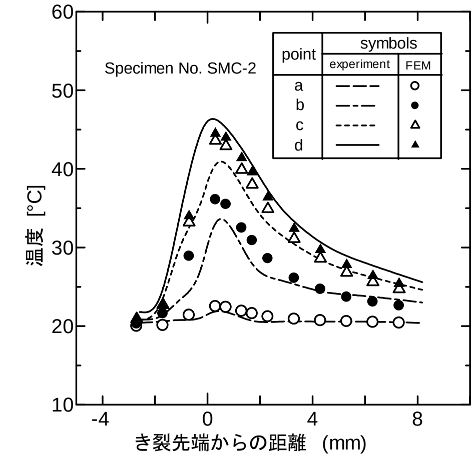


図 2.25　負荷中の塑性仕事による発熱による温度上昇のサーモビュアによる温度測定結果と FEM による解析結果の比較

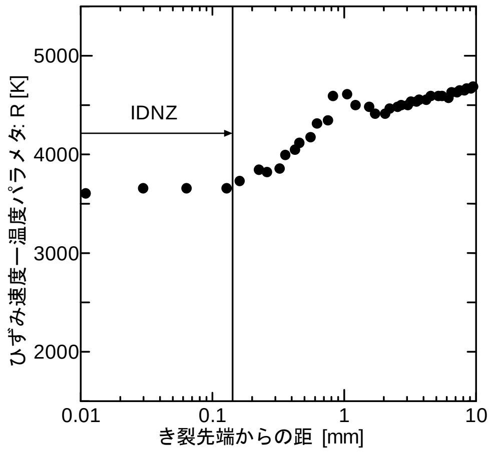


図 2.26　き裂先端近傍の R 値分布（荷重点変位＝0.815mm の瞬間、負荷速度＝2m／ｓ）

図 2.26 は板厚 75mm の降伏点 360MPa 級 HT-50 鋼から採取した標準 CT 試験片（W＝2B）を用いて、雰囲気温度－22℃、負荷速度 2000mm/s の条件下で行われた衝撃荷重下の破壊靭性試験[58]における負荷途中のある時期（荷重点変位が 0.815mm の時点）における R 値分布を、上記熱伝導プログラムと錬成させた動的弾塑性有限要素法で解析（平面ひずみ条件下）した結果の例である。図中に IDNZ と示した領域は、ひずみ分布にき裂鈍化の影響を受ける領域（図 1.31 参照）である。この領域では R 値はほぼ一定になっている。

き裂先端に近づくほどひずみ速度が大きくなると同時に局部温度上昇量も大きくなり、両者の変化の兼ね合いでこのような現象が生じている。種々の条件下で計算されているが、どの条件下でも、き裂先端近傍では R 値はほぼ一様に分布していることが確かめられている。しかしこのような現象が生じない条件が存在するのか否かは未だ明らかにされていない。

この領域の R 値を R_γ とし、R_γ と限界 CTOD（δ_C）が材料特性と考えられている。評価するき裂材の R_γ と CTOD（δ）を求め、これが $R_\gamma \sim \delta_C$ 曲線に交差するときに破壊が生じるとした解析がなされている[59]。図 2.27 は種々の負荷速度下で行われた HT-50 鋼 CT 試験片の破壊靭性試験結果と、熱伝導錬成動的弾塑性有限要素法を用いて上記の手順で推定した結果の比較例を示している。静的条件下の温度（T）$\sim \delta_C$ 曲線が既知で静的条件でのひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ が定義できれば、$R_\gamma \sim \delta_C$ 曲線に換算できる。この観点から静的条件のひずみ速度を検討した結果は、$\dot{\varepsilon}_{static} = 5\times10^{-5}$ s^{-1} となっている*。

*日本溶接協会の WES2808 には、破壊靭性値 δ_C に及ぼすひずみ速度影響が上記結果をもとに取り入れられているが、そこでは静的ひずみ速度を 10^{-4}s^{-1} としている。高速負荷時における静的負荷時に対する降伏点の上昇量と引張強さの上昇量の平均値と、破壊靭性～温度曲線における温度シフト量（ただし上限を 40℃としている）を与え、静的条件下での破壊靭性～温度曲線が既知であれば、任意負荷速度下における破壊靭性値が推定できるとしている。

静的ひずみ速度を 10^{-4}s^{-1} としたのは、地震時（おおよそ 10^{-3}s^{-1} と考えて）における破壊強度を論じる場合に厳しすぎるため、とりあえず地震時のひずみ速度を静的条件よりも1オーダ速くしたもので、約 20℃のシフトにしている。これは、要求破壊靭性値を考慮する場合に材料選定という立場から、欠陥サイズを大きくしたつけから生じている。WES2808 で温度シフトの上限が実験データでは 60℃のものが存在するのに 40℃としていることも同様である。

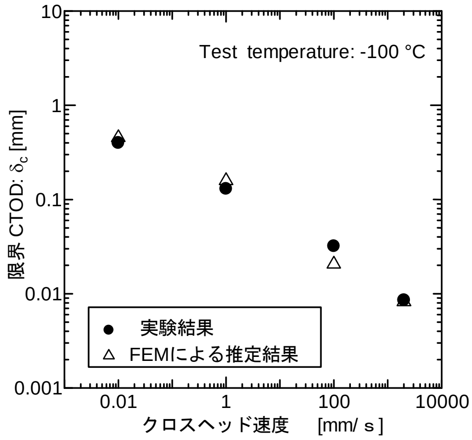


図 2.27　準静的条件下の限界 CTOD 値をもとに FEM による IDNZ 先端の R 値解析結果を用いて、推定した各種クロスヘッド下の限界 CTOD 値の推定結果と実験結果との比較

このように熱伝導錬成動的弾塑性有限要素法を用いれば、任意負荷速度下（負荷径路も含めて）での、き裂材（ただし、板厚貫通き裂）の破壊強度を推定することが可能である。

しかし、この取り扱いは熱伝導錬成動的弾塑性有限要素法のプログラムを必要とするだけでなく、材料選定や溶接施工などの大まかな検討を行うには不向きである。そこで、1.8 節における静的条件下での δ と J 積分値などの関係や公称ひずみ ε_∞ と J 値などの関係を用い、ひずみ硬化指数 n や降伏点 σ_{Y} は考えている ε_∞ と $\dot{\varepsilon}_\infty$ に対応した値で定数という簡易的取り扱いをし、荷重履歴に対応した IDNZ 先端位置の R 値（R_γ 値と等しいと仮定）を簡易的に求める手法が提案されている [59]。そこでは温度上昇を無視しているが、図 1.30 を利用して温度上昇も簡易的に評価できることが明らかにされている [57]。

上記の評価を設計時に用いるのは煩雑すぎるきらいがある。脚注に記したように、ひずみ速度が 1 桁上がると、遷移温度は約 25℃上がる。したがって、実際に評価しようとする破壊発生時の公称ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}$ とすると、

$$\Delta T = 25 \cdot \log \frac{5 \times 10^{-5}}{\dot{\varepsilon}} \tag{2.13}$$

なる温度だけ下げた状態での静的条件下の脆性破壊の可能性を検討すれば、ひずみ速度影響を考慮したことになる。

3．　疲労き裂伝播挙動

3.1　Paris の疲労き裂伝播則

疲労き裂伝播に関する研究は，破壊力学が普及する以前にも，数多くなされており，たとえば，疲労き裂伝播速度 da/dN　(fatigue crack propagation rate)を，以下のような形で表すことが試みられてきた [60]。

$$\frac{da}{dN} = C_1 \sigma^m a^n \tag{3.1}$$

ただし，　a ：　き裂長さ

N ：　負荷繰り返し数
σ　：　応力振幅
C_1, m, n ：材料定数

上式は，材料定数を適当に選択することにより，個々の実験結果をうまくあてはめることはできるが，試験片形状，負荷形式などが異なる広い範囲の実験条件に対しては，必ずしも一般的には成立しない。

破壊力学の研究は，当初は，不安定脆性破壊を対象にしてなされた。この破壊力学を全ての破壊に対して適用し得る可能性を，Paris が 1957 年に指摘し[61]，疲労き裂に対しては，彼自身，その論文で裏付けを行った。そして，アルミニウム合金を用いて，疲労き裂伝播速度と応力拡大係数の関係を調べ，応力拡大係数範囲（最大荷重時と最小荷重時の応力拡大係数の差：stress intensity factor range）と疲労き裂伝播速度との間には，図 3.1 に示すように，両対数上で広い範囲にわたって，直線関係が成立することを示した[62]。すなわち，

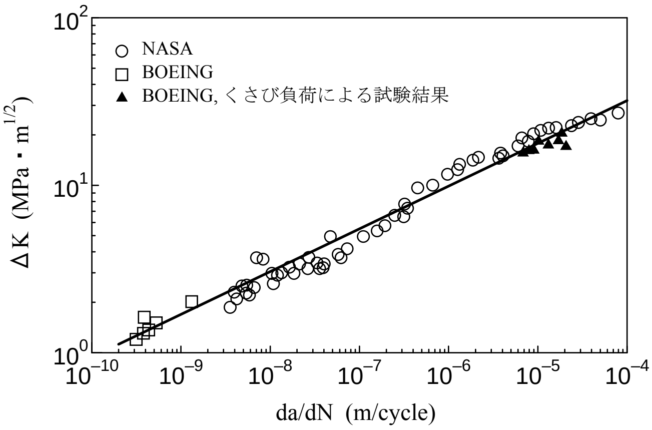


図 3.1　疲労き裂伝播速度の広域特性(7075-T6Al 合金)

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta K\right)^m \tag{3.2}$$

ただし，　da/dN ：疲労き裂伝播速度
ΔK ：応力拡大係数範囲
C, m ：材料定数

上式のように，応力拡大係数を用いると，試験条件に関わらず，き裂先端近傍の応力・ひずみ状態が，一義的に規定されることになり，(3.1)式よりは一般化した形で疲労き裂伝播速度を規定できることになる。上式は Paris の伝播則と呼ばれ，疲労き裂伝播の研究は，これを契機に発展してきた。

しかしながら，疲労き裂伝播速度を ΔK で整理すれば，全ての範囲で，(3.2)式が成立するのではなく，一般に，図 3.2 に模式的に示すように，逆 S 字形を示し，ステージ(I)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の三つの領域に分けられる。ただし，この図は一定振幅荷重を与えるだけで得られるものではない。

すなわち，一定振幅荷重を与えるだけでは，はじめは①，②と軌跡を描き，通常の試験片ではき裂の成長とともに ΔK が大きくなり，(Ⅱ)の領域の実線に沿って疲労き裂伝播速度は速くなり，リガメント全体が降伏する全面降伏状態から，延性破壊（くびれが生じ荷重を上昇させなくても

延性き裂により破壊）へ移る(Ⅲ)の領域に入る。

②のように，(Ⅱ)の領域に入った後，応力比 R (=最小荷重/最大荷重: stress ratio)を一定に保持したまま，荷重振幅を小さくした状態で一定繰り返し負荷を与えると，③と示すように，①のところへは戻らず，(Ⅱ)の領域の実線上を移動し，さらに，徐々に荷重振幅をステップ状に下げていくと，(Ⅱ)の領域の直線上から外れ，ΔK の減少とともに，疲労き裂伝播速度は急激に減少し(ただし, 各荷重ステップ内では, ΔK が徐々に増加するが，厳密には前歴の影響を受け，一旦疲労き裂伝播速度は減少し，極小値を示した後増加する)，ある ΔK 以下では，事実上き裂が伝播しなくなる。もちろん，き裂長さを試験中常時計測し，連続的に徐々に，ΔK を低下させても，実線上を左方向に移動することが確認されている。

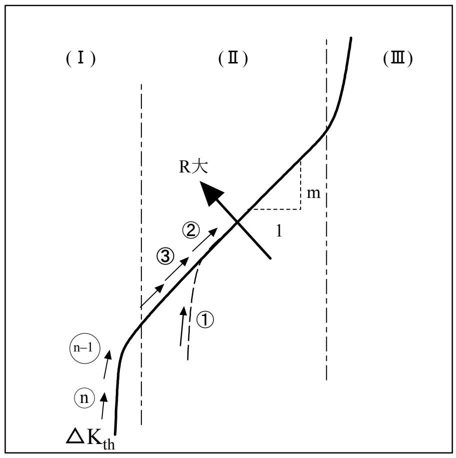


図 3.2 疲労き裂伝播速度と△Ｋとの関係

このき裂が伝播しなくなる限界を，疲労き裂伝播の下限界(threshold) ΔK_{th} と呼んでいる。①の現象は，疲労き裂を発生させるために用いられる鋭い機械切欠(通常切欠幅は 0.1～0.2mm 程度である)を，き裂の一部と見なして，K値を求めた結果生じるものである。(Ⅲ)の領域の上限は，一般的には，静的な破壊靭性値 K_C より低く，疲労破壊靭性値 K_{fC} (fatigue fracture toughness)と呼ばれることもあるが，リガメントが全面降伏状態になると，き裂開口変位が急激に大きくなり，それとともに疲労き裂伝播速度が速くなるので, (Ⅲ)の領域に入る時期，および K_{fC} は，試験条件によっても異なる。

(3.2)式が成立するのは，安定成長域と考えられている(Ⅱ)の領域であり，m は当初の実験から 4 が提案された[61]。これを，Paris の 4 乗則と呼んでいた。しかし，その後の多くの実験により，m は材料が同一でも，試験条件により多少異なり，材料の違いまで含めると，0.5～7 の値となっている。北川ら [63] は，それまでになされた多くの実験結果を整理して，図 3.3 に示すように，C と m の間には，

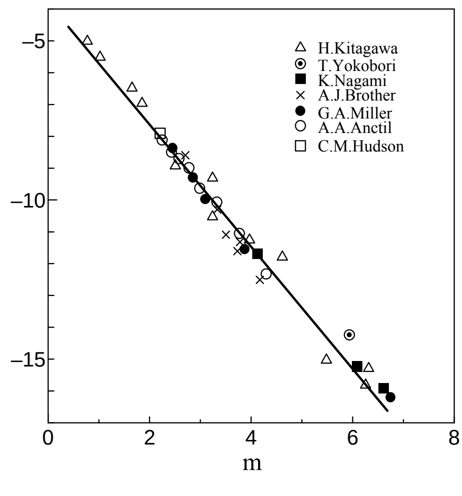


図 3.3　Paris 則におけるＣ値と m 値の関係（c.g.s 単位系において）

$$C = A \cdot B^m \tag{3.3}$$

なる関係があり，(3.2)式の da/dN を $mm/cycle$，ΔK を $kgf \cdot mm^{-3/2}$ の単位で表した場合，Ｂの値は約 1/55，Ａは普通鋼で約 1/20000，アルミニウム合金で約 1/2500 となっており，おおよその疲労き裂伝播速度の目安をつけるのには実用上便利である。

3.1.1　応力比の影響

(3.2)式は，応力比が 0.1 以下の片振引張条件下で得られた結果から，提案されたものであり，その後の研究により，応力比が大きくなると，同一 ΔK で比較して，疲労き裂伝播速度が速くなることが判明した。そして Paris 則を修正する試みが多くなされ，数多くの疲労き裂伝播則が提案された。その中で，最も有名なのは，$\log(da/dN)$ と $\log(\Delta K)$ が，図 3.2 に示したように，逆 S 字形となることに注目し，それまでも表現できる式として提案された Forman による次式 [61] である。

$$\frac{da}{dN}=\frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_C-\Delta K} \tag{3.4}$$

ただし，　K_C ：破壊靭性値

しかし，Pearson[65]は，非常に薄い板に対してしか，(3.4)式で応力比の影響を定量化できないと指摘した。そこで, 石田ら [66]あるいは中沢ら [67]は, (3.4)式を修正した疲労き裂伝播則を提案した。しかし，これらの式では，疲労き裂伝播試験で求めなければならない定数が 3 つ以上存在し，この定数を求めるためには，個々の材料について応力比の異なる試験を実施する必要がある。さらに，(3.4)式中の K_C は，疲労き裂伝播試験における疲労破壊靭性値と解されているが，試験片端部の影響を受けるこの値そのものの物理的意味ははなはだ曖昧である。力学的観点からは，応力比の影響はき裂先端近傍の応力/ひずみ分布に起因すると考えるべきであり，その意味で，応力比そのものの効果を最終破壊における K_C と結び付けるのは物理的におかしい。

そこで，筆者 [68]は，き裂先端の開口変位に着目して，部分片振領域では，

$$\frac{da}{dN}=C\frac{\Delta\delta_1}{\Delta\delta_0}(\Delta K)^m \tag{3.5}$$

ただし，$\Delta\delta_0$ ：完全片振状態における，き裂先端開口変位振幅
$\Delta\delta_1$ ：部分片振状態における，き裂先端開口変位振幅

を提案した。アルミニウム合金クラッド鋼を用いて，種々の応力比のもとで行われた疲労き裂伝播試験結果を図 3.4[69]に示すが，応力比が大きいほど，疲労き裂伝播速度が速くなっていることが分かる。図 3.5 は、図 3.4 の縦軸を $(da/dN)/(\Delta\delta_1/\Delta\delta_0)=da^*/dN$（等価疲労き裂伝播速度 (equivalent fatigue crack propagation rate)：応力比 0 の条件下に換算した疲労き裂伝播速度）として，整理し直したものであり，(3.5)式の妥当性を主張した [68]ものの一例である。この式の有

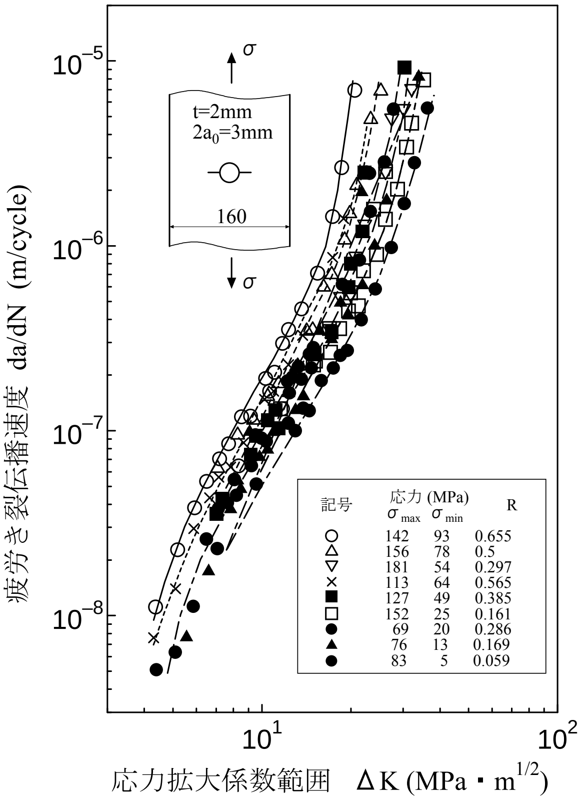


図 3.4　2024Al クラッド合金における疲労き裂伝播速度に及ぼす応力比の影響

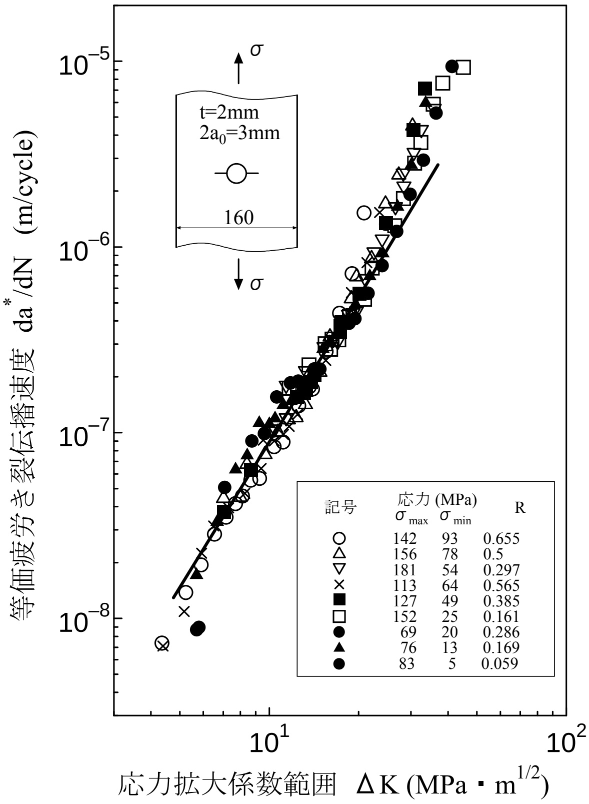


図 3.5　応力比 0 に換算した 2024Al クラッド合金の疲労き裂伝播速度

効性は，軟鋼，HT-50 鋼，9%Ni 鋼，超高張力鋼およびその溶接継手などでも確かめられ，無限板中のき裂に対しては，

$$\frac{\Delta\delta_1}{\Delta\delta_0}=\frac{1+R}{1-R} \tag{3.6}$$

となることを考慮して，溶接継手に存在する欠陥評価の旧規格 19)に取り入れられていた。しかし，後述の 3.2 節に示すように，たとえ引張側の部分片振状態でも，疲労き裂は最小荷重時には閉口することが Elber70)により示され，その現象が確認されるに至り，上記の式は論理の根底を覆されたことになる。なお，応力比効果を考慮するために提案された疲労き裂伝播則は，それを調査した 1985 年当時で，180 以上に上っている。

3.1.2　き裂伝播の下限界条件

き裂伝播の下限界条件 ΔK_{th} が，真に材料定数として存在すれば，これ以下の荷重では事実上き裂は伝播しないため，設計の上限荷重を与えることができるので，工学上強い感心を集めてきた。

図 3.6 は，太田ら 71)により行われた，低 ΔK 領域における，疲労き裂伝播試験結果（徐々に荷重振幅を低下させる試験）であるが，図から分かるように，ΔK_{th} は応力比の影響を顕著に受け，応

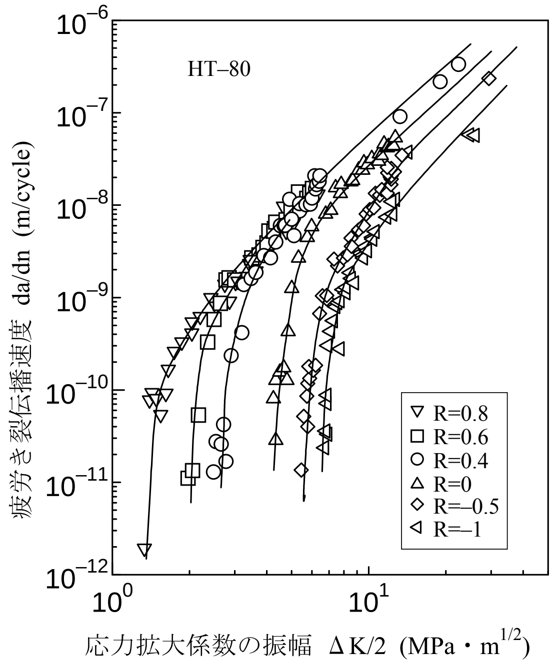


図 3.6　種々の応力比下における低△K領域の疲労き裂伝播速度（HT-80 鋼）

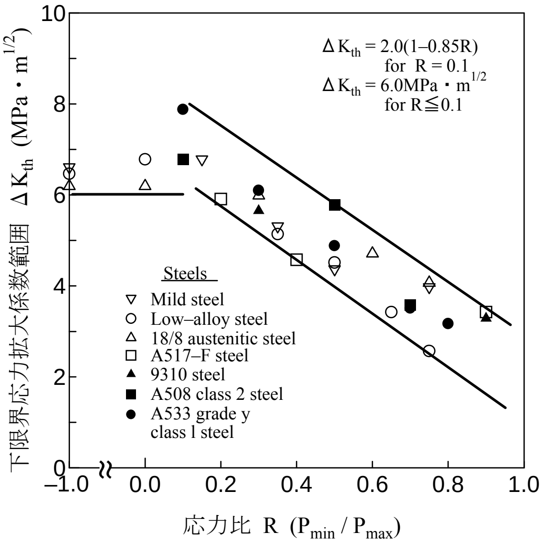


図 3.7　△K_{th} の応力比依存

力比が大きいほど低下する。図 3.7 は，Barsom[72]により，整理されたものであり，応力比の影響は顕著であるが，材料が異なっても，同一応力比下では，ΔK_{th} はほとんど同じ値になっている。また，Bucci ら [73]は大気中では，

$$\Delta K_{th} = \begin{cases} K_{th0}\left(1-R\right) & \left(R<0.6 \quad \text{の場合}\right) \\ 0.4K_{th0} & \left(R \geq 0.6 \quad \text{の場合}\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

ただし，K_{th0} ：完全片振条件下（応力比 R が 0）における ΔK_{th}

なる関係があると報告している。図 3.8 は，日本造船研究協会の共同研究 [72]で得られたもので，上記知見と一致した結果が得られている。

しかし，切欠底や溶接継手止端部などから発生した直後のき裂は非常に小さく，そのため，ΔK 値も始めは非常に小さいにも関わらず，疲労き裂が成長している事実とは矛盾する。そこで，微小き裂の ΔK_{th} は，長いき裂のそれよりも，小さくなると報告されている（3.1.5 項参照)。しかし，なぜ微小き裂では ΔK_{th} が小さくなるのかを物理的に説明した報告は見あたらない。

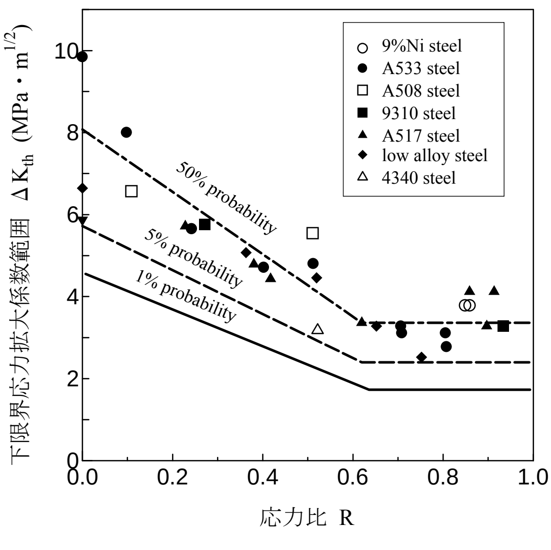


図 3.8　各種材料の△K_{th} 計測結果

3.1.3　変動荷重下の伝播挙動

前項までに，一定振幅荷重下の疲労き裂伝播挙動について説明した。ただし，ΔK_{th} 試験は現象面から考えると，疲労き裂伝播速度に，前歴の影響が含まれていると理解すべきであり，変動荷重下の試験とすべきものであるが，一般的には ΔK_{th} 試験は一定振幅荷重下の試験と分類されているので前項に含めた。

荷重を変動させると，複雑な疲労き裂伝播挙動を呈することが，これまでの研究から判明している。２段ブロックの変動荷重を与えた試験では以下の挙動が現れる。①最大荷重を上昇させた場合には，多少加速現象が認められるが，その影響はあまり顕著でない。②最大荷重を減少させた場合には，一旦減速し，き裂の成長とともに速くなりながら一定振幅荷重下の疲労き裂伝播速度に漸近する（遅延減速現象：delayed retardation phenomenon)。③単一の過大荷重を与えた場合には，その直後は加速し，き裂の成長とともに減速した後(一定振幅荷重下におけるよりも減速し，過大荷重が大きすぎると，この段階でき裂成長が停止する)，一定振幅荷重下の疲労き裂伝播速度に漸近する（遅延加速減速現象(delayed accelerate retardation phenomenon)）という現象が生じる。最小荷重を変化させた場合には，最大荷重を変化させた場合ほど顕著な影響を受けない。

変動荷重下でのき裂進展の非線形挙動の主原因として，初期には，き裂先端前方に生じる残留応力，あるいは，塑性域が考えられていた。

たとえば，Wheeler[75]は，図 3.9 に示すように，定常荷重で形成される塑性域が，過大荷重による塑性域内にある間は，疲労き裂伝播速度が減速されると考え，遅延係数(delay factor) ϕ を図中の $\gamma_e = a_0 + \gamma_{p0} - a_i$ と γ_{pi} に関係づけ，遅延速度が，

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{retarded} = \phi\left(\frac{da}{dN}\right)_{linear} = \phi f\left(\Delta K\right) \tag{3.8}$$

ただし，

$$\phi = \left(\gamma_{pi} / \gamma_e\right)^m \tag{3.9}$$

m ：定数

で表せると提唱した。

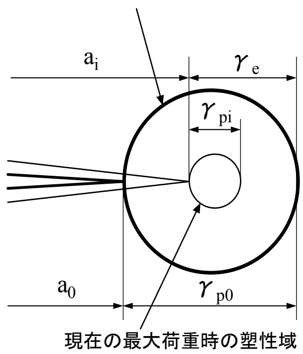


図 3.9　Wheeler モデルの説明図

図 3.10[76]は，一定振幅荷重を与えた場合と，図中に示すように，ある間隔で過大荷重を与え，他のサイクルは，同じ振幅荷重を与えた場合の，き裂成長曲線を示している。図中の単一過大荷重の成長曲線は，第１サイクルで，過大荷重を作用させた場合のものである。第１サイクルで過大荷重が作用した場合，過大荷重の影響を受けた大きな残留引張変形層をき裂内部に取り込むことになるので，遅延減速現象が生じる。そのため，過大荷重が作用する場合の方が，き裂伝播寿

命が長くなっていることが分かる。また，一定振幅荷重の繰り返し途中に過大荷重が作用した場合には，一旦あたかも自然き裂となるので，加速現象が生じる。そのため，周期的に過大荷重を受ける場合，そのき裂開閉口挙動はより複雑となる。この例では，周期が長いほど，寿命が長くなっており（ΔN=10,000 とΔN=20,000 の結果は，き裂発生寿命が長すぎるきらいがあり，この２つのデータは左側にずらして立ち上がり部分を重ねたものが一般的に得られる結果である)，単一過大荷重あるいは一定振幅荷重を与えた場合(過大荷重を与える周期が，非常に長い場合と見ることができる)が短寿命となっていることと合わせて考えると，大略，ある特定の周期で最も減速効果が現れるものと考えられる。

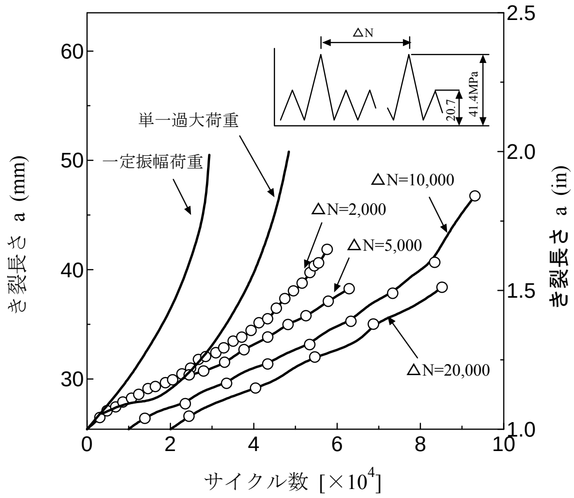


図 3.10　周期的に過大荷重を受ける場合に計測されたき裂成長曲線

3.1.4　面外曲げを受ける板厚貫通き裂の伝播挙動

角回し溶接止端部などから発生・伝播した表面き裂が，板厚貫通き裂となった直後，き裂前縁線は図 3.11 に示すように，楕円き裂の一部のような形状で伝播する。ここで，図 3.11 の A 点，B 点を通る楕円は次式のように表せる。

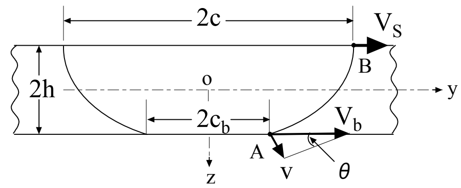


図 3.11　板厚貫通直後のき裂の座標系

$$\frac{y^2}{c^2}+\frac{\left(z+h\right)^2}{4c^2h^2/\left(c^2-c_b^2\right)}=1 \tag{3.10}$$

また，面外曲げ応力振幅$\Delta\sigma_b$と面内引張応力振幅$\Delta\sigma_t$が重畳して作用する場合には，板厚貫通切欠から伝播する場合でも図 3.11 に示すようにき裂前縁線は楕円の一部のようになり，き裂前縁線は板表面に垂直とならない。$\Delta\sigma_b$と$\Delta\sigma_t$の比により，き裂前縁線の全体的な傾きも異なる。特に，$\Delta\sigma_b$と$\Delta\sigma_t$が同位相で同期して作用する場合にはき裂伝播速度は，曲げ応力比β〔bending stress ratio：$=\Delta\sigma_b/\left(\Delta\sigma_t+\Delta\sigma_b\right)$と定義されている。〕により，以下のように推定することができる。

まず，引張応力と面外曲げ応力が重畳して作用する場合（図 3.11 の$-z$側で曲げ応力が正の側になる)，き裂前方に形成される引張塑性域と圧縮塑性域を考え，圧縮塑性域は降伏応力が$2\sigma_Y$（σ_Y：材料の降伏応力）で，作用応力が 0 の領域になっていると仮想的に考え，引張塑性域の先

端部分の応力を，圧縮塑性域に充当して板厚方向にならし，一様な引張降伏域となるように平準化した引張塑性域寸法をもとに等価引張応力σ_{cor}が求められている[75)]。その結果を図 3.12 中に実線で示す。

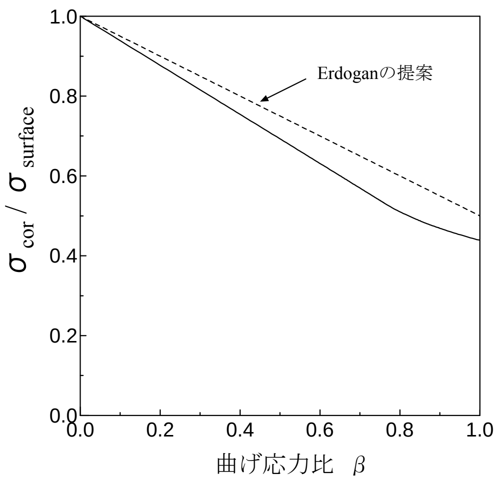


図 3.12　引張応力と面外曲げ応力を受ける板厚貫通き裂に対する等価引張応力

図 3.13 は，板厚貫通切欠材に引張荷重振幅と面外曲げ荷重振幅を同時（位相は同位相で）に作用させて，表面（曲げ応力が引張となる側）での疲労き裂伝播速度を計測し，それと，引張側表面における表面応力が板厚内にまで一様に作用していると仮定して形式的に求めた応力拡大係数範囲$\Delta K_{surface}$との関係を調査した結果である。この場合には、βが大きくなるほど，疲労き裂伝播速度は遅くなっている。図 3.14 は，図 3.12 の等価引張応力（実線）をもとに，等価引張ΔK値(ΔK_{cor})を求め，図 3.13 の結果を整理し直したものである。これより，引張荷重振幅と面外曲げ荷重振幅を受ける板厚貫通き裂は，ΔK_{cor}を媒体にすることにより，２次元問題として取り扱うことができるということが分かる。一方，Erdogan

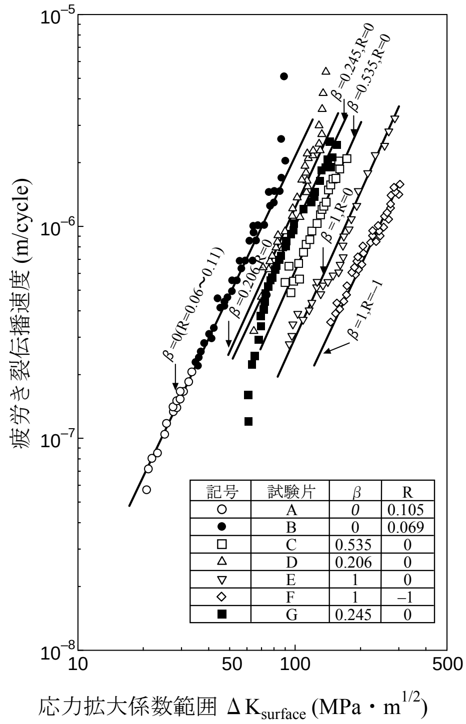


図 3.13　引張と面外曲げの荷重振幅を同時に受ける板厚貫通き裂材の疲労き裂伝播速度と，表面における形式上の応力拡大係数範囲の関係（９％Ni 鋼）

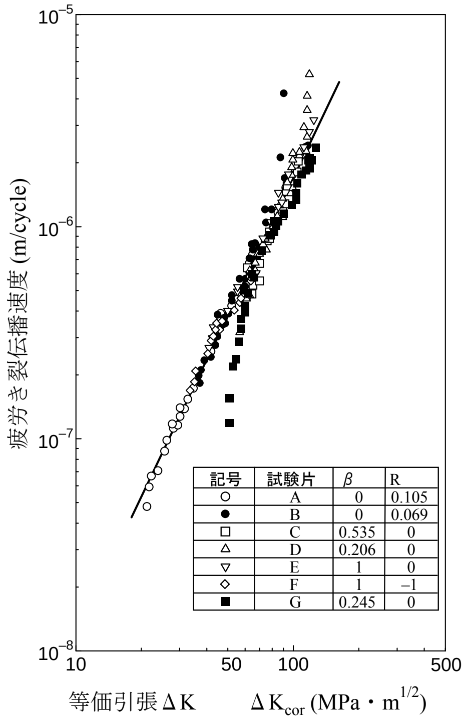


図 3.14　左図のデータについて，図 3.12 の等価応力（実線）を用いて整理し直した結果

ら [78]は，疲労き裂伝播解析に限るならば，面外曲げ振幅応力は面内振幅応力の 1/2 の寄与をなすものとして，等価な K 値を算定できるとしている。この Erdogan による関係が，図 3.12 中に点線で示されている。実線と点線は，対数グラフ上ではほとんど差がなく，実用的には，面外曲げ応力振幅は，その 1/2 の振幅を引張応力振幅に加えれば，２次元問題に置き換わると結論できる。

また，裏面での疲労き裂伝播速度は，き裂前縁線の法線方向に定義し，その速度 v と，裏面上の伝播速度 V_b との関係は，(3,10)式より（図 3.11 の A 点参照），

$$v = V_b \sin\theta = \frac{2c_b h V_b}{\sqrt{\left(c^2 - c_b^2\right)^2 + \left(2c_b h\right)^2}} \tag{3.11}$$

そして，裏面に対しては,

$$\hat{K}_{cor} = \sigma_m \sqrt{\pi c} \tag{3.12}$$

とすれば，すなわち，き裂長さを表面の値を採用し、曲げ応力を無視した応力拡大係数範囲を考えれば, 図 3.15 のように, 疲労き裂伝播速度が推定できることが実験的に明らかにされている [79]。

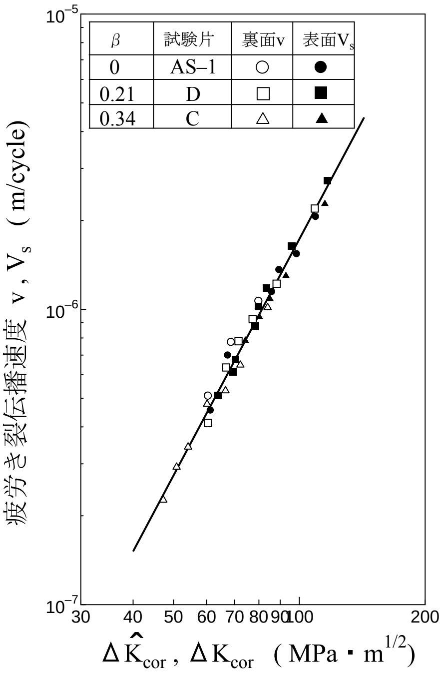


図 3.15　引張と面外曲げの荷重振幅を受ける裏面における板厚貫通き裂の等価応力拡大係数範囲と疲労き裂伝播速度の関係（表面に関して横軸は ΔK_{cor}）

3.1.5 微小疲労き裂の伝播挙動

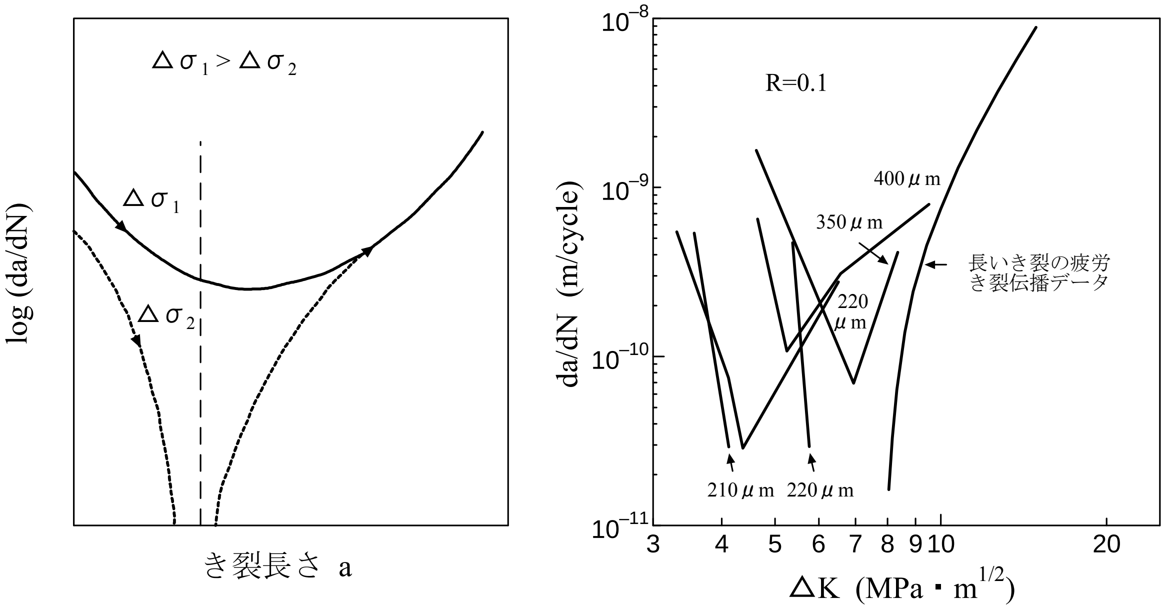
溶接鋼構造物では，疲労き裂は構造的高応力集中場（ここには通常引張残留応力が作用している）から発生し，低応力場（ここは圧縮残留応力場となっていることが多い）へ向かい進展していくので，疲労寿命の大半はき裂伝播寿命となる。これに対し，機械部品などでは，き裂発生箇所近傍の応力勾配が溶接鋼構造物に比して緩やかであるため，疲労寿命の大半はき裂発生寿命であると考えられている。

いづれにしても，疲労寿命はき裂発生寿命(crack initiation life)とき裂伝播寿命(crack propagation life)の和であるが，き裂発生とはいくらのき裂長さとなった場合かということが現時点では明確でない。すなわち，疲労き裂発生寿命は，S-N 曲線をもとに議論されているが，試験片あるいは構造要素モデル試験体で，個々に採用されているき裂発生の定義がばらばらであると同時に，小さな試験片と構造要素モデル試験体とで同じき裂発生の定義（同じ形状で同じ寸法）をしても，その寿命を実験的に計測することが困難な場合が多々生じる。しかも，疲労き裂は，辷りを核に連続的な安定破壊として成長するので，き裂が発生した，していないという yes，no

の判定にはそもそも馴染まない現象である*。

したがって，き裂発生から伝播寿命までを含めて，疲労寿命を定量的に評価できるようにするためには，微小き裂(physically small crack)の伝播挙動を明らかにする過程で，き裂発生寿命とき裂伝播寿命を同一の理論体系下で評価できる手法の模索が必要となる。この観点からだけではなく，破壊力学で取り扱うことのできる，き裂長さの限界を知る上でも，微小き裂の伝播挙動を明らかにする必要がある。なお、き裂が存在していない応力集中場から辷り帯に沿ってせん断き裂が発生・成長するき裂発生・成長曲線の定量化に世界で始めて成功したモデルを第３編５章で示し、さらにそれを進化させたモデルを第４編 3.1 節で説明する。

図 3.16 は，Taylor と Knott[80]による，微小き裂と長いき裂の挙動を説明した図である。繰り返し応力振幅が大きい場合($\Delta\sigma_1$)には，き裂発生後は，き裂の成長とともに一旦疲労き裂伝播速度は低下し，その後，き裂の成長とともに疲労き裂伝播速度が速くなっていくが，繰り返し応力振幅が小さい場合($\Delta\sigma_2$)には，き裂が結晶粒径オーダまで進展しても，ΔK が下限界条件を超えないために，微小き裂は停留することを示した模式図が図 3.16(a)である。図 3.16 (b)は，アルミニウム青銅(結晶粒径約 100 μm)で測定された微小き裂の疲労き裂伝播速度データを示している。図中の数字は最終き裂長を示している。ΔK_{th} 付近の長いき裂のデータと比較すると，微小き裂の疲労き裂伝播速度が非常に速いことが理解できる。また， ΔK_{th} 以下でも微小き裂は発生・伝播するが，



(a)微小き裂の伝播挙動の模式図

(b)アルミニウム青銅の微小き裂と長いき裂に対する疲労き裂伝播速度の計測結果

図3.16　微小き裂と長いき裂の疲労き裂伝播挙動

* 引張荷重振幅と曲げ荷重振幅を与えた場合，疲労強度は引張荷重下の方が小さくなることから明らかなように，疲労き裂発生点の応力振幅だけでなく，その近傍の応力振幅，すなわち応力勾配も，疲労強度に影響を与える。さらには，平均応力や残留応力ならびにそれらの勾配も，疲労強度に影響を与える。したがって，１点の応力振幅のみで疲労強度を論じる，Ｓ－Ｎ曲線を用いる寿命予測は，概略の寿命目安を意図したもので，全く大まかな寿命予測しか期待していないことと等しい。

き裂によっては発生後少し伝播して停留することもあることが分かる。図 3.17 は Chopra ら[81]により示されている微小き裂段階のき裂成長曲線の説明図であり、せん断き裂として成長する間は、き裂が成長するにつれてその伝播速度が遅くなり、上に凸のき裂成長曲線となると説明している。

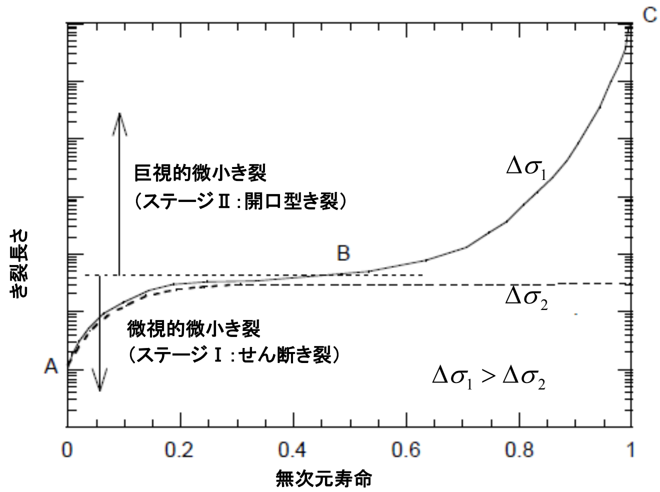


図 3. 17　微小き裂領域のき裂成長曲線の模式図

北川らは，平滑材の片振疲労限が降伏点より遙かに低い HT-80 鋼と，若干高い SM-50 鋼より平板試験片を採取し，その中央に $50\mu m$ の深さを有するピット状表面切欠を加工し，完全片振の引張繰り返し荷重を与えた。そして，き裂が表面と最深部で一体となった状態から，最大応力を 3%づつ階段状に下げ，き裂成長速度を僅かづつ低下させ，ある一定の応力範囲で 10^5 回繰り返してもき裂の成長が認められなかった応力範囲を，下限界応力範囲 $\Delta\sigma_{th}$ と定義した。そして $\Delta\sigma_{th}$ と，その時の表面でのき裂長さの関係を調査した[82]。

その結果が図 3.18 に示されている。図には，長い板厚貫通き裂に対し得られた ΔK_{th} より推定される下限界の応力振幅 $\Delta\sigma_{th}$ とき裂長さの関係が，細い点線で示されている。さらに，き裂が発生しなかった平滑材の疲労試験より得られた疲労限(HT-80 鋼では $549MPa$，SM-50 鋼では $378MPa$)も同時に示されている。$2a$ が，0.3～0.5mm 以上のき裂材の $\Delta\sigma_{th}$ は，ΔK_{th} より推定される下限界の応力振幅 $\Delta\sigma_{th}$ と良い一致を示している。しかし，平滑材での疲労限以上にはき裂材の疲労限は上昇しないので，き裂長さが短くなるにつれて ΔK_{th} より推定される下限界の応力振幅 $\Delta\sigma_{th}$ より下限界は小さくなり，平滑材のそれに漸近していくことが分かる。したがって，小さなき裂の ΔK_{th} は，大きなき裂の ΔK_{th} より小さくなる。しかし，物理現象として，なぜ小さいき裂になると ΔK_{th} が小さくなるのかが明らかにされていない（図 3.18 は，Kitagawa diagram と欧米の研究者

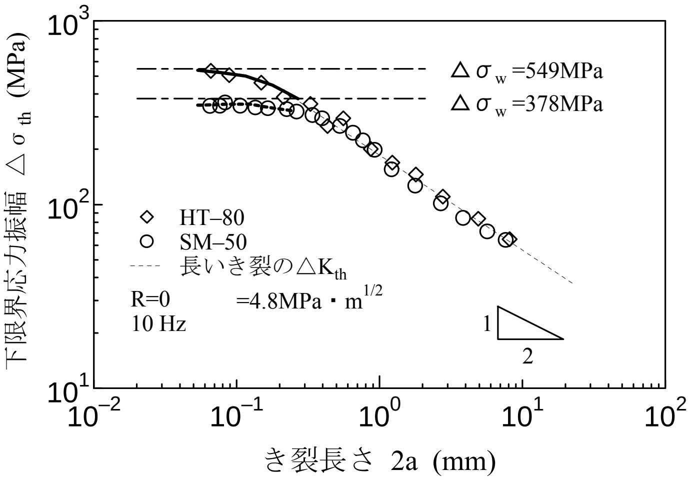


図 3.18　疲労き裂伝播の下限界応力振幅とき裂寸法の関係

が呼ぶほど，世界的に知れ渡っている図である)。

ところで，長い貫通き裂で得た ΔK_{th} から，貫通き裂に対する K 値の式を用いて下限界における貫通き裂長さを推定した結果と，ある大きさ以上の微小表面き裂の下限界における表面き裂長さが一致するという結論は，表面き裂の K 値が貫通き裂の K 値と異なることを考慮すると論理的に矛盾がある。北川らが求めた，長い貫通き裂で応力比 0 の条件下で $\Delta K_{th} = 4.8 MPa \cdot m^{1/2}$ という値は，図 3.7 や図 3.8 と比べると分かるように，従来データの 0.6～0. 7 倍の値であり，表面き裂の表面における K 値は，同じ長さの貫通き裂の K 値に比して，a/w および b/h が小さくて $a \approx b$ の場合（図 1.26 参照)，(1.81)式より約 0.65 となることと対応していると考えるべきであろう(ただし，ΔK_{th} は前歴の影響を受けるので，各ステップの荷重減少率を非常に小さくし，さらに，そのステップで，前段階で生じた塑性変形域の数倍程度以上進展させてから，次のステップに移行するような試験(実験期間は莫大なものになるが)を実施すれば，ΔK_{th} はどんどん低下する可能性がある)。

3.2　き裂開閉口挙動と Paris-Elber 則(Paris-Elber's law)

(1.78)式から分かるように，き裂に垂直な方向の荷重を作用させた後，除荷するとき裂は開いたままになる。そのため長い間，疲労き裂は除荷時には開口していると考えられてきた。しかし，十分成長した疲労き裂は除荷時に閉口していることが Elber[70)]により示された。この結果から，き裂開口区間に対応する応力拡大係数範囲が，疲労き裂伝播速度を律しているという考え方が一般的に認められるようになった。

3.2.1　き裂開閉口現象

疲労き裂は,高応力比下での状態を除くと,たとえ,引張応力が作用している場合でも，最小荷重時には閉口している。この現象を最初に指摘したのは Elber である。

図 3.19 は彼による疲労き裂の閉口現象についての説明図であり，左図が疲労き裂，右図が繰り返し荷重を受けないで生じたき裂〔たとえば，溶接割れが生じた後，残留応力除去焼鈍されたき裂（このき裂を，理想き裂と以後呼ぶ)〕に対応する。左図の疲労き裂では，引張塑性域となった部分を連続してき裂が進展していく結果，き裂縁に引張の残留変形層を残し，これが周

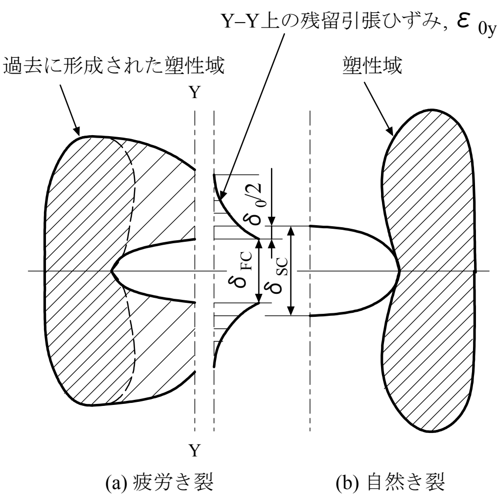
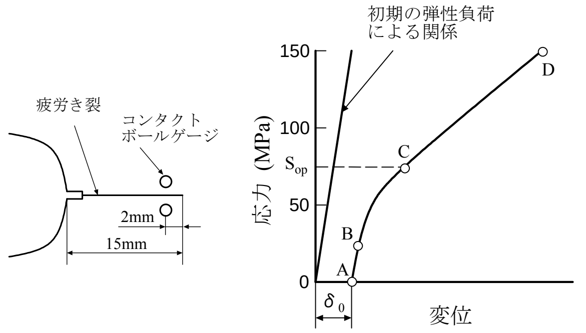


図 3.19　Elber による疲労き裂と自然き裂に対するき裂開閉口現象の違いの説明図

りの弾性域に拘束されて図に示すようにき裂縁近傍に圧縮の残留ひずみが生じるようになる。

このため，同一荷重下において，残留引張変形層(residual tensile deformed layer)が生じていない右図の理想き裂に比べ，疲労き裂の開口量は小さくなる。すなわち彼は，き裂先端に生じる塑性域の影響ではなく，き裂縁に残留する引張変形層の影響により，疲労き裂の開口量が小さくなることを指摘した。



（a）き裂とコンタクトボールゲージ取付位置　(b) 作用応力とコンタクトボール間の変位の関係

図 3.20　Elber によるき裂開口点の測定

さらに，彼は図 3.20(a)に示すように，き裂先端近傍でき裂を跨いで変位計を取り付け，荷重－変位ヒステリシス曲線を実験的に求めた。その結果が図 3.20(b)である。き裂が閉口すると，荷重を受け持つ断面が増加するので，コンプライアンスが小さくなり，ヒステリシス曲線の勾配が大きくなる。したがって，高荷重側のコンプライアンスが一定となる領域より離れだす C 点をき裂開閉口点と定めた。このように通常，疲労き裂はたとえ片振引張荷重[⊕]が作用している場合でも最小荷重時には閉口する。

き裂が閉口している状態では，き裂先端における応力の特異性が消滅するので，き裂伝播に影響を与えるのは，き裂が完全に開いている範囲に対応する応力拡大係数範囲 ΔK_{eff} (effective stress intensity factor range based upon the crack opening load)であると彼は考えた。すなわち，

$$\Delta K_{eff} = \left(P_{\max} - P_{op}\right)\sqrt{\pi a}\, f = K_{\max} - K_{op} \tag{3.13}$$

ただし，　ΔK_{eff} ：有効応力拡大係数範囲
P_{op} ：き裂開口荷重(crack opening load)
$P_{\max}$ ：最大荷重
K_{op} ：き裂開口時点の応力拡大係数
$K_{\max}$ ：最大荷重時の応力拡大係数
f ：き裂位置と自由境界までの距離などき裂先端の応力特異場の強さに２次的な影響を与える係数(magnification factor)（修正係数(correction factor)とも言う）

そこで，Paris 則を修正し，以下の疲労き裂伝播速度則を提案した。

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta K_{eff}\right)^m = C\left(U\Delta K\right)^m \tag{3.14}$$

ここで，

⊕ 最大荷重と最小荷重の符号が同じ場合を片振，異符号の場合を両振という。そしてどちらか一方が 0 の場合を完全片振，等値逆符号の場合を完全両振荷重という。

$$U=\frac{P_{\max}-P_{op}}{P_{\max}-P_{\min}}=\frac{K_{\max}-K_{op}}{K_{\max}-K_{\min}} \tag{3.15}$$

であり，U はき裂開口比(crack opening ratio)と呼ばれている。そして，2024-T3 アルミニウム合金を供試材とした疲労き裂伝播試験での，U 計測結果では，

$$U=0.5+0.4R \tag{3.16}$$

ただし　R ：応力比（＝最小荷重/最大荷重）

が，$-0.1\leq R\leq 0.7$ の条件下で成立し，これによって，2024-T3 アルミニウム合金に対する応力比の影響が定量化できていることを示した。すなわち，応力比効果がき裂開閉口挙動に依存して生じていることを明らかにした。

この後，疲労き裂伝播に関する基礎研究は，き裂開口比U を推定するためのものが大半を占めるようになってきた。

3.2.2　き裂開閉口荷重の計測

前項で示したように，伝播中の疲労き裂は，引張応力下でも閉口している場合がある。この現象が，Elber により実験的に確認されて以来，閉口しているき裂先端近傍での応力特異性は消失するため，(3.2)式の Paris 則は，物理的な意味を持たないことが明確となり，Elber が提案した(3.13)式の妥当性に関する研究が各所で行われるようになった。

しかし，き裂開閉口挙動は，図 3.19 に示されているように，塑性変形した中をき裂が進展する結果生じるものであるから，き裂開口荷重を純粋に解析的に求めることはかなり困難であり，実測を通じての研究がなされてきた。

疲労き裂伝播中のき裂開口変位は非常に小さく，かつ通常は高繰り返し速度下で試験がなされるため，その計測精度が問題となる。そのため，種々の計測法が検討されてきた。たとえば，超音波法(supersonic wave method)[83]，電位差法(potential method)[84]，き裂が伝播していく表面部分にあらかじめ斜めに引いた細線のずれから開口量を求める方法[85],およびレーザ干渉計法(laser interferometer method)[86,87]などが提案されている。しかし，前 3 者は精度の良い測定がかなり難しく装置も複雑となる。またレーザ干渉計法は，精度は良いものの装置が高価になる。

これらに対し，比較的安価にき裂開閉口挙動を高精度で測定できると考えられているものは，菊川ら[88]が提案した除荷弾性コンプライアンス法(unloading elastic compliance method)である。

図 3.21 は，彼らが作成した除荷弾性コンプライアンス法で用いる引算回路(subtraction circuit)を示している。試験片は板状のもので，その端部に貫通切欠を挿入し，切欠前方の端部の板厚中心にひずみゲージ(背面ゲージ)を貼付し，図に示す引算回路に，このゲージ出力と荷重出力を入力することでき裂開口点を明確に決定できるとしている。図 3.21 の A 点は荷重、B 点はひずみ入力

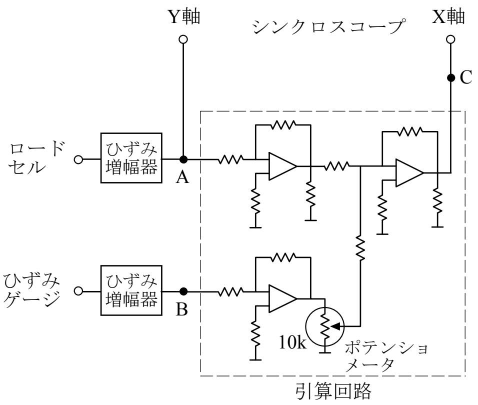
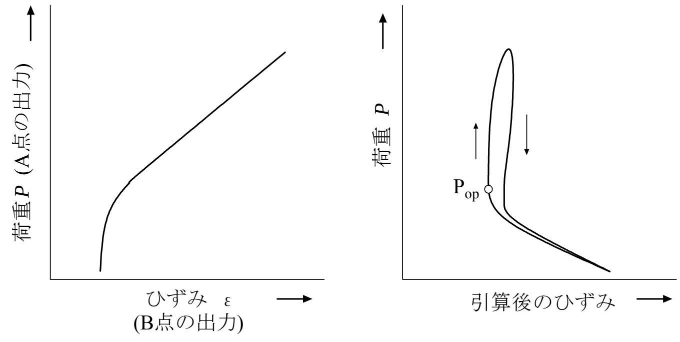


図 3.21　菊川らが開発したヒステリシス
ループを得るための引算回路



(a)　直接出力図
横軸：B 点
縦軸：A 点

(b) 引算回路を通した後
の出力
横軸：C 点　縦軸：A 点

図 3.22　除荷弾性コンプライアンス法での出力

（出力）であり、この直接の関係は図 3.22(a)に示すようになる。

一方, 図 3.21 中の回路内のポテンショメータを回し, B 点のひずみ入力を増幅(増幅率＝α)し, 増幅したひずみ出力を, ほぼ荷重出力と等しくなるように調整し, それから A 点の出力(荷重出力)を減じたものを拡大したのが, 図 3.22(b)の横軸（C 点の出力）である。背面ゲージによるひずみ出力を拡大しているため, 負荷過程と除荷過程の差が明確となり, き裂開口荷重 P_{op} は, 縦軸に平行な線から離れる位置として, 精度良く求められるとしている。しかし, なぜ, 縦軸に平行な線から離れる位置が P_{op} となるのかの明確な理由は述べられていない。

図 3.23 は, 片側貫通き裂材に完全両振条件下で, 曲げ荷重を与えて疲労き裂を進展させ, き裂がほぼ停留（この曲げ荷重下では, K値がき裂進展とともに小さくなっていくので, ついにはき裂は停留する）した時点で, 荷重振幅を保持したまま, 完全片振となるように, 平均荷重を増加させた試験で得られた結果である。

図中の(b)が, き裂がほぼ停留した時点, すなわち, 両振条件下の下限界レベルで計測された背面ゲージ A, および, き裂近傍の表面に貼付したゲージ B の引算回路を通した後の出力である。下限界レベルでは, 負荷過程と除荷過程で, ひずみ－荷重関係の差はなくなるとしている。

また図 3.23 中の(c)は, (b)における荷重振幅を一定に保ちながら, 平均荷重を上昇させた場合に計測された結果であり, B 点すなわち試験片表面で計測した場合には, 引張荷重下でのヒステリシスは, 緩やかな曲線となり, 開口部の除荷弾性線が不明確となるため, 両振から片振に変化させるだけで,

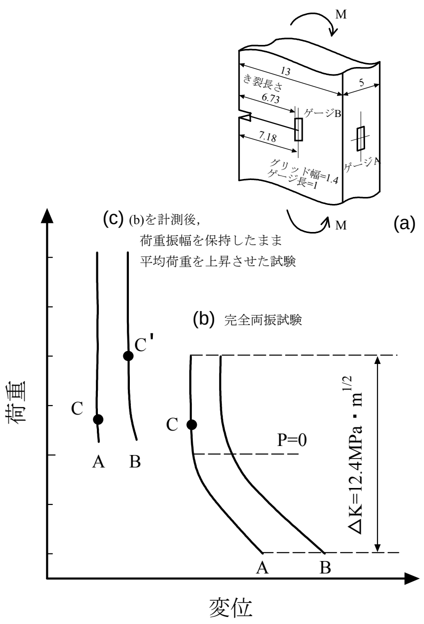


図 3.23　下限界レベルにおける引算
ひずみのヒステリシス計測結

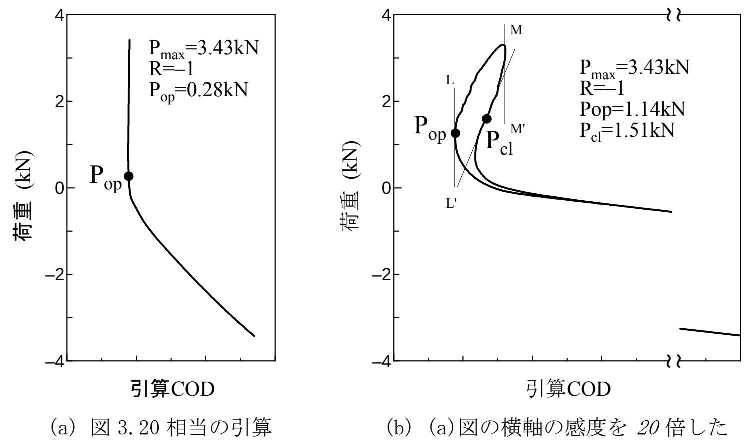
き裂開口荷重が C から C′ へとき裂開口荷重が上昇したように計測される（き裂開口荷重は上昇しないと決めつけているが，平均荷重を上昇させた場合に，き裂開口荷重は変化しないで前のままで保持されるという保証はない。平均荷重を上昇させた瞬間は，当然き裂開口荷重は変化しないが，上昇させた直後少しでもき裂が伝播すると，き裂開口荷重は上昇するはずである)。

一方，背面ゲージによる計測結果では，両振下と片振下で，き裂開口荷重は同じになっている。これは，試験片表面と内部ではき裂開閉口挙動が異なるためであり，き裂進展挙動を支配すると考えられる試験片内部の挙動を調べるためには背面ゲージによる必要があり，試験片表面の観察のみでは誤った結論を導く恐れがあると主張している。

西谷ら [89]は，図 3.21 の B 点に，ある一定電圧を負荷し，一定電圧が加えられたひずみ出力電圧と荷重出力電圧との関係が，全体的にほぼ原点を通る直線になるようにすると同時に，C 点の出力を増幅する回路を作成し，環状切欠付丸棒引張試験片のコンプライアンスを計測した。この場合，マウス部の開口変位を，回路のひずみ入力端子に入力している。C 点の電圧を菊川らの回路より増幅する関係上，ノイズが大きくなるため，彼らはコンデンサーを随所に配している。そのため，荷重との位相差が問題となるので，コンプライアンスの計測時には，繰り返し速度を 0.1Hz まで落としている。

図 3.24 は荷重振幅を徐々に小さくし，き裂の進展がかなり遅くなった時点における計測例である。図 3.24 (a)は図 3.21 の回路を通したものに相当する。COD 出力に一定電圧を加え，この加算後の電圧と荷重出力がほぼ原点を通る直線になるようにする。さらに，その加算後電圧を増幅して，荷重出力電圧とほぼ等しくする。そのようにした後，荷重出力電圧を減じて 1 サイクル中，ほぼ 0 電圧とした後，20 倍増幅した結果が図 3.23 (b)である。図に見るように，菊川らのような結果となっていたとしても，アンプを介して増幅すると負荷過程と除荷過程で，引算ひずみ－荷重関係に差が現れることもあり，き裂停留時には負荷過程における荷重－ひずみ(変位)曲線と，除荷過程のそれが一致するとは断言できないことが分かる。

彼らは，除荷過程で閉口する時，コンプライアンスが小さくなることから，除荷過程の荷重－ひずみ(変位)曲線上に現れる変曲点がき裂閉口点であるとした。その結果，き裂開口荷重とき裂閉口荷重



(a) 図 3.20 相当の引算回路での出力　(b) (a)図の横軸の感度を *20* 倍した場合の出力

図 3.24　完全両振荷重を受ける環状切欠付丸棒試験片で得られた荷重とマウス COD の関係（引算回路通過後）

(crack closing load)は異なることを実験を通して明らかにした。そして，き裂停留後は，き裂閉口荷重は最大荷重と一致し，この時点では引算ひずみを増幅しても，負荷過程と除荷過程のヒステリシスは一致すると主張している。

上記の結果から彼らはき裂閉口荷重を(3.13)式あるいは(3.14)式のき裂開口荷重と入れ換えれば，その有効応力拡大係数範囲 ΔK_{eff}^{cl} と疲労き裂伝播速度との関係には下限界が生じないと主張した。

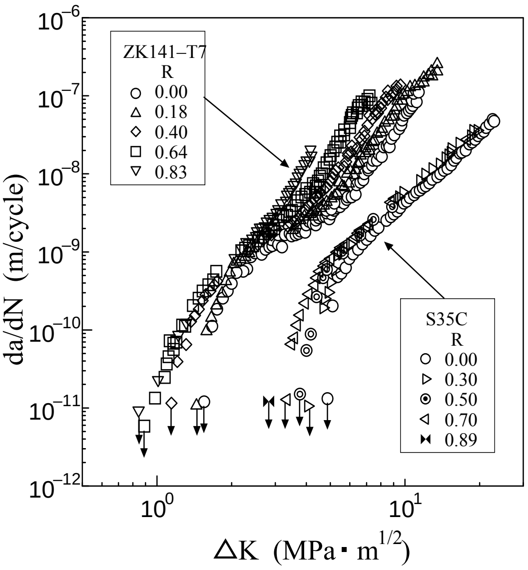
ただし，彼らは，コンプライアンスの計測時には，繰り返し速度を 0.1Hz まで落としているので，荷重振幅を一定に保持するには，試験機の荷重摘みを，微妙に変化させる必要があり，正確に定常状態におけるコンプライアンスが測定できているか否かは判断できない。

菊川らおよび西谷ら，さらには Elber は，いずれも，き裂開閉口挙動とコンプライアンス変化の詳細な考察を行わずに，き裂開閉口荷重を定めており定量的にはかなり問題がある。き裂が閉口して荷重を受け持つようになるためにコンプライアンスが小さくなることに対応して，Elber は図 3.20(b)で高荷重領域のコンプライアンスが一定となる直線から離れ出す点をき裂開口点と定めたが，なぜ高荷重領域でコンプライアンスが一定になるのかの考察がなされていない。実際には，高荷重領域では，負荷に伴い引張塑性域が成長するので，コンプライアンスは一定になるはずがない。すなわち，塑性変形によるコンプライアンスの変化が現れないほど，図 3.23 の計測は鈍感な感度で行われていることになる。このような鈍感な量で現象の変化の特徴点を決定することは問題である。き裂の周りで生じている現象と測定された量との対応を物理的に考察することによって意図する瞬間を決定できるが, Elber および菊川らのグループとも詳細な検討を行っていない。彼らが計測したき裂開口荷重は，実際よりも，かなり低くなっている可能性があることを第 3 編で説明する。

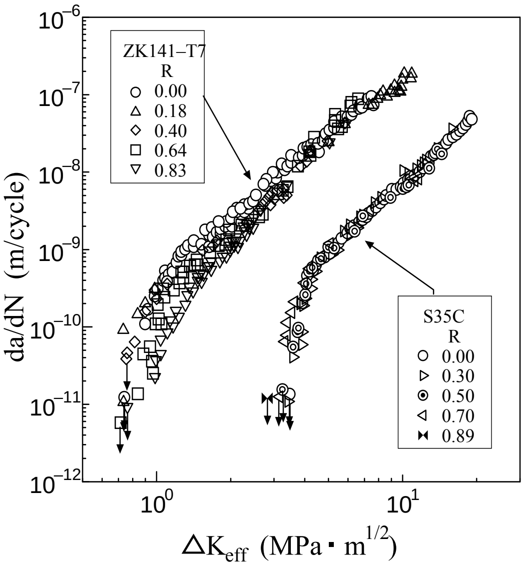
また, 西谷らが採用した下限界付近のき裂閉口荷重の決定方法も, 直感に頼ったところがあり, ΔK_{eff}^{cl} (effective stress intensity factor range based upon the crack closing load)には下限界が現れないという結論には疑問が残る(これについては第 3 編で述べる)。また，西谷らは，回路内のポテンショメータを手動で制御しており，計測に多大の労力が必要となる。

3.2.3　応力比の影響

3.2.1 項で述べたように，Elber はき裂を跨いで変位計を取り付け，コンプライアンス変化を計測した。しかし，この方法では，試験片表面におけるき裂開口点を計測することになり，前項で紹介したように，疲労き裂伝播を支配している板内部のき裂開口点が求められないとの考えのもとに，き裂前方の自由縁上の板厚中央にひずみゲージを貼付し，この出力と荷重との関係からき裂開口荷重が計測された。そしてこのき裂開口荷重とき裂伝播速度の計測結果を用いて，(3.14)式で応力比の影響が定量化できていることが報告されている [90]。



(a) ΔK による整理



(b) ΔK_{eff} による整理

図 3.25　疲労き裂伝播速度におよぼす応力比の効果

図 3.25 は，その報告より抜粋したものであるが，図 3.25 (a)による整理では，チタン合金 ZK141-T7 ならびに S35C 鋼とも，応力比が大きくなるほど疲労き裂伝播速度が速くなっている。しかし，図 3.25 (b)に示すように ΔK_{eff} で整理すれば，応力比が異なっても 1 本のカーブ上に疲労き裂伝播速度が載り，実測されたき裂開口荷重から U を定めれば応力比の影響を定量化できることが分かる。

板表面の変位計測では，試験片内部のき裂開口荷重が計測されないという指摘は，もっともらしく聞こえるが，荷重は試験片全体で受け持っているのでコンプライアンス変化を詳細に調べれば，板内部のき裂開口点を求められる可能性がある。また，背面ゲージが試験片内部のき裂開閉口挙動を捉えていると主張しているが，背面ゲージが試験片の板厚内部の挙動を反映しているとは必ずしも言えない。特に，き裂先端と背面の距離が板厚オーダであると，St. Venant の原理によって平準化されたひずみ出力しか捉えられないので，き裂先端が背面に近づいた最終段階，すなわち，ステージ(Ⅲ)においてしか，彼らの意図は計測に反映されない。

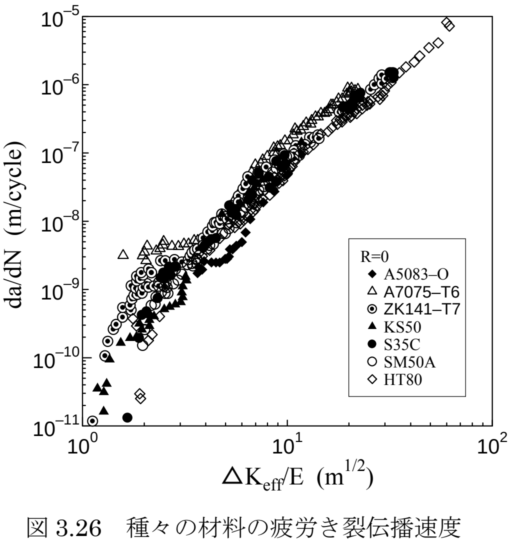


図 3.26　種々の材料の疲労き裂伝播速度
（$\triangle K_{eff}/E$ による整理）

さらに，彼らは，コンプライアンス変化の詳細な考察をしないで，き裂開口荷重を定めているので，その決定法に若干問題があり，第 3 編で説明するように，少し低めのき裂開口荷重となっている可能性が強い。しかし，両対数グラフ上での整理をしてい

るので，U の若干の違いは，応力比の影響を定量化できるという結論を変えるようなものではない。

また，図 3.26 に示すように，$\Delta K_{eff} / E$ で整理すれば，材料が異なってもほぼ 1 本の線で疲労き裂伝播速度が与えられることが報告されている [90]。

3.2.4　き裂伝播の下限界条件

低速度領域の疲労き裂伝播データを得るには，3.1.3 項で説明したように，通常は外荷重振幅を段階的に減少させることになる。しかし，その減少率が大きいと，前段階で形成された塑性域の影響を受けて，き裂が成長しなくなることも生じる。したがって，前歴の影響を受けない状態での，疲労き裂伝播速度を得るには注意を要する。

この試験は ΔK_{th} 試験と呼ばれており，ASTM では経験的に以下の試験方法を推奨している [91]。すなわち，

(1)　K 値減少率 $\left(dK/da\right)/K$ は，平均的な意味で $-0.08/\mathrm{mm}$ 以上とする(ここで，K は ΔK あるいは $K_{\max}$ を意味する)。

(2)　荷重を段階的に減少させる場合の 1 回の荷重減少量は，その時点での最大荷重の 10%を超えてはならない。また，次の荷重減少までの間に 0.5mm 以上き裂が進展していなければならない。ただし，1 回の荷重減少量が 2 %以下の場合はこの限りではない。

(3)　da/dN を求める際の Δa は，0.25mm 以上あること。ただし，ΔK_{th} 付近では，Δa はき裂長さ測定精度の 10 倍以上あれば良い。

田中ら [92] は，降伏点が 163MPa から 1165MPa という広範囲の強度レベルにある，7 種類の溶接構造用鋼板を用いて，応力比を 0.1，0.4，0.8（一部の鋼材に対しては－0.5，－1.0 も実施）の条件下で，上記 ASTM の手法に準拠して，疲労き裂伝播試験を実施した。荷重をロードセル，試験片変位(mouth COD)をクリップゲージにより測定し，A/D コンバータを介してコンピュータに取り込み，コンプライアンスを計測し，あらかじめビーチマーク法(beach mark method) * で得た較正曲線を用いてき裂長さを求めた。そしてき裂長さと荷重から K 値をオンラインで求め，上

* 図 A-1 に示すように，疲労き裂伝播試験の途中で，通常は，最大荷重を保持したまま，最小荷重を上げ，疲労き裂破面上にビーチマークと呼ばれる跡を残す方法である。このマークは，荷重振幅が減少したために，疲労き裂伝播速度が低下し，破面の様相が変化(破面の傾斜が微小量変化する)することにより生じる。最大荷重を一定にするのは，き裂の停留を防ぐためである。図 A-2 にはビーチマークの一例を示す。このマークをつけた時点のコンプライアンスと，き裂発生箇所からビーチマークまでの平均距離，すなわち，き裂長さとの関係を求め較正曲線を得る。

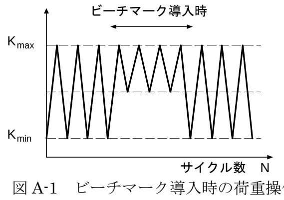


図 A-1　ビーチマーク導入時の荷重操作

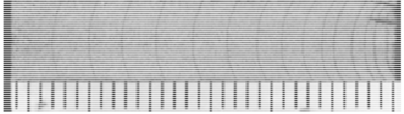


図 A-2　板厚貫通切欠材の疲労き裂面に形成されたビーチマーク

記の ASTM の要求を満たすよう荷重の制御を行った。実験周波数は 5〜40Hz で行われているが，き裂長さの計測時には，クリップゲージの周波数特性を考慮して，試験周波数を 1Hz に落としている。さらに，コンプライアンスを求める際には，ノイズを低減するため，10 サイクルのデータを平均している(アベレージング)。これらのデータをフロッピーディスクに格納し，実験終了後コンピュータ上で菊川らの引算回路に対応する処理を行い，図 3.24(b)に相当する図を作成し，き裂開口荷重を定めた（このように，計測ひずみを直接コンピュータに取り込み，コンピュータ上で引算ひずみを求めることができる。しかし，この場合には，負荷過程と除荷過程の差が生じる程度に拡大すると，A/D コンバータの分解能やノイズのため，ヒステリシス曲線は凹凸の激しいものになり，正確にき裂開閉口荷重を求めることが困難な場合が多い)。そしてき裂伝播挙動が調査された。

ΔK と疲労き裂伝播速度の関係では，応力比が大きくなるほど疲労き裂伝播速度が速くなるという従来の実験結果と同じ結果が得られている。また，ステージ(II)領域(図 3.2 参照)のき裂成長安定領域では，鋼種による差はほとんど生じていないが，低疲労き裂伝播速度領域では，高強度になるほど疲労き裂伝播速度が速くなっている。ところが，測定されたき裂開口荷重を用いて，ΔK_{eff} で整理し直すと，図 3.27 に示すように，応力比が正の条件下では，強度レベルによらずほぼ 1 本の曲線で表され，

$$\frac{da}{dN} = C\left\{\Delta K_{eff}^{m} - \left(\Delta K_{eff}\right)_{th}^{m}\right\} \tag{3.17}$$

なる形の，修正 Paris－Elber 則(modified Paris-Elber's law)と呼ばれている式で表現でき，平均線は，$m = 2.75$、$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th} = 3.45 MPa \cdot m^{1/2}$ となっている。すなわち，ΔK_{th} は応力比あるいは鋼材の強度レベルが上昇するほど小さくなるが，$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ は応力比あるいは鋼材の強度レベルに関係なくほぼ一定の値になる。

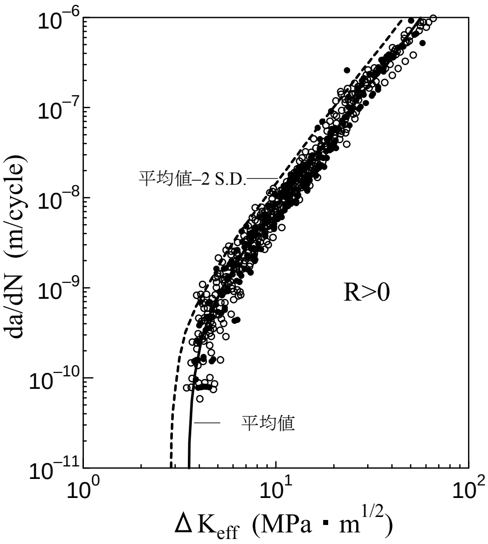


図 3.27　広範囲の強度レベル（降伏耐力が 163MPa から 1165　MPa）の 7 種の鋼材に対する Paris－Elber 則による回帰とばらつきの標準偏差の 2 倍の安全率を見込んだき裂伝播速度の設計曲線

この現象はき裂開閉口挙動を考慮すると説明できる。図 3.28 に示すように，ΔK が小さい領域では，き裂開口比は高強度材ほど大きくなる(き裂開口荷重は小さくなる。すなわち，高強度材ほど，残留引張変形域が小さくなるため，より自然き裂に近くなり，開口しやすくなることを意味する)ことに対応している。また，菊川ら[93]も，応力比を変えても $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ はほぼ一定になることを報告している。

菊川ら [94]は応力比 0 の条件下で，荷重を漸減し始める時の $K_{\max}$ を変化させた ΔK_{th} 試験を実施

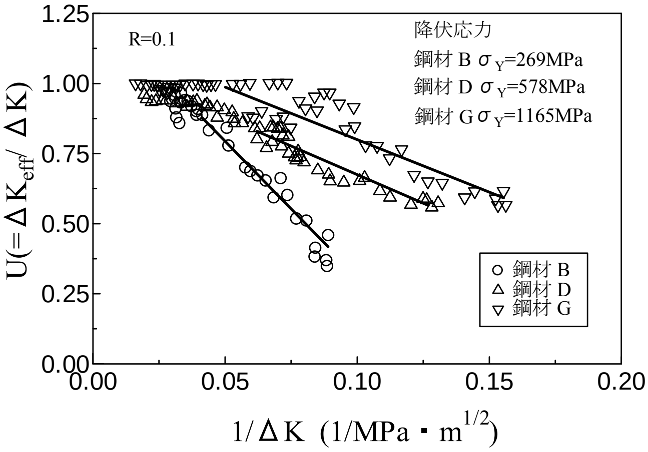


図 3.28 強度レベルが異なる鋼材のき裂開口比 U の変化挙動（応力比 0.1 の一定振幅疲労試験）

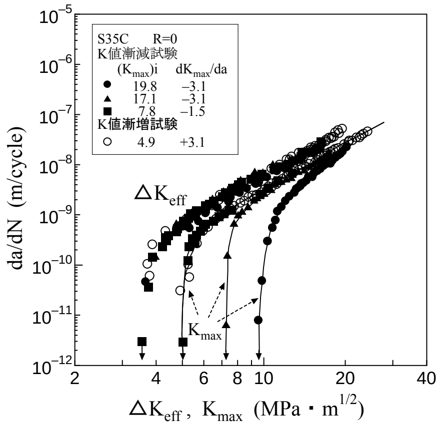


図3.29　ΔK_{th} 試験開始前の K_{max} が ΔK_{th} におよぼす影響（$R=0$）

した。図 3.29 がその結果であるが，ΔK －疲労き裂伝播速度線図では，荷重を漸減し始める時の $K_{\max}$ 〔図では $\left(K_{\max}\right)_i$ と示す〕が大きいほど ΔK_{th} は大きくなっており，ΔK_{th} は荷重を減少させ始める時の $\left(K_{\max}\right)_i$ に影響されることが分かる。

図 3.30 は，その実験中に，除荷弾性コンプライアンス法で計測された K_{op} の変化を示している。始めの K 値上昇試験過程では，K_{op} は ΔK が大きくなるにつれて大きくなっていくが，その後 $\left(K_{\max}\right)_i$ から荷重を小さくして ΔK を減少させても，一旦上昇した K_{op} はほとんど低下せずほぼ一定に保たれ，疲労き裂伝播速度が極めて遅くなると，K_{op} は逆に上昇し，$K_{\max}$ と K_{op} の差，すなわち ΔK_{eff} が一定となるところで K_{op} は急上昇してき裂伝播が停止している。

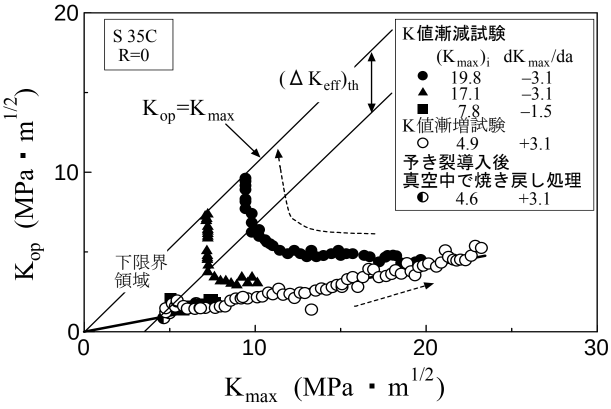


図3.30　$R=0$ の条件下で K を上昇させた後，K を小さくしていった過程で計測されたき裂開口荷重 P_{op}

この結果，図 3.29 には，ΔK_{eff} で整理された結果も示されているが，ΔK_{eff} で整理すると，すべての条件下の試験結果がほぼ同一の曲線で表されている。

さらに，菊川ら[95]は図 3.31 に示す 2 段繰り返し変動荷重を与え，彼らが開発した除荷弾性コンプライアンス法（図 3.21 参照）を用いてき裂開口点を計測した。彼らは，サイド・グルーブを付けた片側切欠付帯板を試験片として選び，応力比 0 の面内曲げ荷重を与えた疲労き裂伝播試験を実施した。まず，

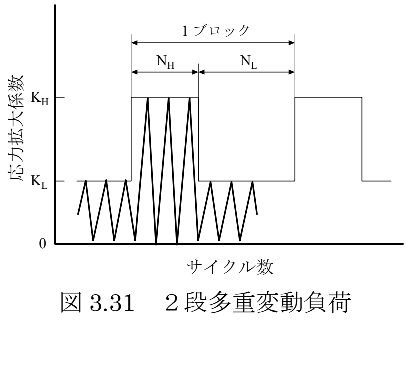


図 3.31　2 段多重変動負荷

$d\left(\Delta K\right)/da = -3.1\ GPa \cdot m^{-1/2}$ なる ΔK 値制御の正弦波のもとで基準の材料特性を求め，$\Delta K_{th} = 9.6\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ ならびに $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th} = 2.0\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ なる結果を得た。その後，応力比を 0 として，$\Delta K_{th} = 9.6\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ を挟むように，$K_H =$ 15.5 $\mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ ならびに $K_L =$ 9.0 $\mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ と固定し，それぞれのサイクル N_H および N_L の頻度を変化させた実験を実施した。

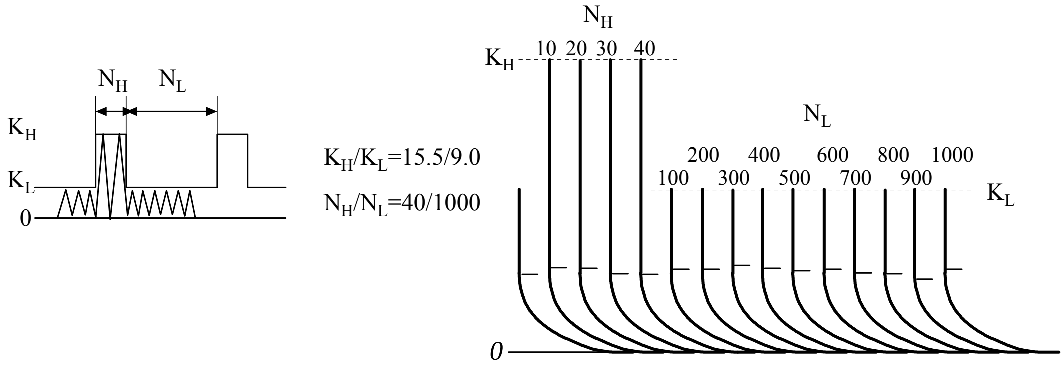


図3.32　２段多重変動負荷の疲労き裂伝播試験中に引算回路を通して計測された荷重－変位ヒステリシスとき裂開口荷重レベル（図中の数字はブロック中何サイクル目で計測したかを示す）

図 3.32 は，$N_H = 40cycle$，$N_L = 1000cycle$ の場合に計測された，引算回路を通して得られた，荷重－変位のヒステリシスである。図中の数字は各ステップの何回目のサイクルかを示しており，短い横線はき裂開口点と決定された荷重レベルを表している。この結果では，最大荷重を低下させてもき裂開口点はほとんど変化していない。そして，彼らは，背面ゲージを用いているので，試験片内部のヒステリシスが得られており，表面では遅延現象が生じても内部では認められないと主張している。

２段多重変動試験で N_H の頻度比が小さい場合は，高低レベルの進展速度は分離して計測することが困難であるため，彼らは高レベル荷重下の疲労き裂伝播速度 $\left(da/dN\right)_H$ は，同じ ΔK（または ΔK_{eff}）に対する一定振幅荷重試験の疲労き裂伝播速度と等しいと仮定し，さらに，線形累積を仮定して低レベル荷重下の疲労き裂伝播速度を次式で計算している。

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_L^* = \frac{1}{N_L}\left\{\left(\frac{da}{dN}\right)_{HL} \times \left(N_H + N_L\right) - \left(\frac{da}{dN}\right)_H \times N_H\right\} \tag{3.18}$$

ただし，$\left(da/dN\right)_{HL}$：実測された変動荷重１ブロックの平均疲労き裂伝播速度

図 3.33 は，上記のようにして行われた結果であり，大きな記号が(3.18)式より得られた疲労き裂伝播速度と ΔK，あるいは ΔK_{eff} の関係である。

図 3.34 は，その破面のフラクトグラフィを例示したものであり，図中に示されている Δl_H は高レベル荷重で進展した部分，Δl_L は低レベル荷重で進展した部分を示している。そして，この縞模(ストライエーション(striation)と呼ばれるものの集合)間隔を，作用させた繰り返し数で除して，

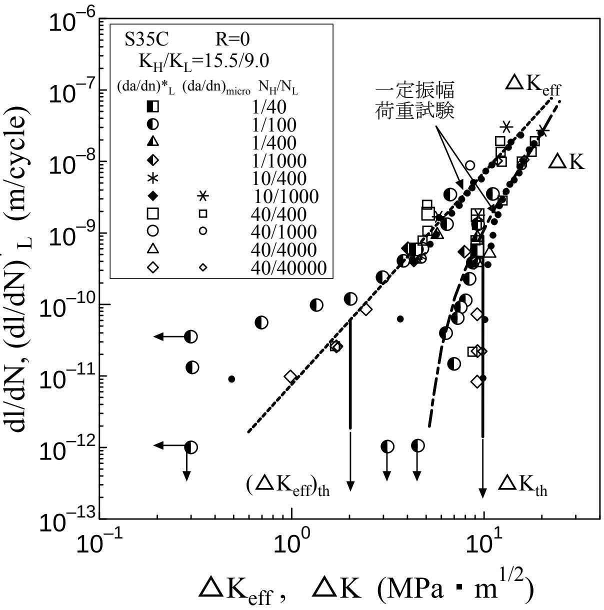


図3.33　２段多重試験における等価き裂伝播速度（小さい記号はストライエーションから求めた結果）

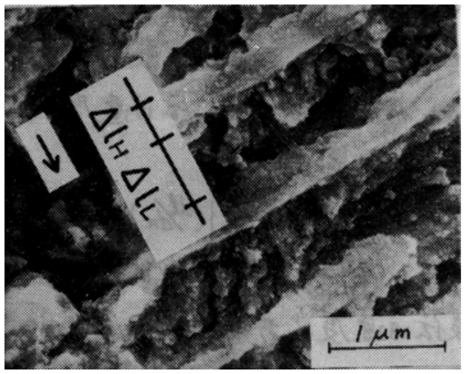


図 3.34　２段多重変動負荷を与えた疲労破面のフラクトグラフィ写真（Δl_H は高レベル荷重で進展したところ，Δl_L は低レベル荷重で進展した箇所に対応する。図中の矢印は巨視的な伝播方向）

ミクロな平均疲労き裂伝播速度を求めた結果が，図 3.33 中の小さな記号である。ミクロな平均疲労き裂伝播速度と，(3.18)式による疲労き裂伝播速度がほぼ一致することから，(3.18)式の取り扱いが妥当と主張している。

本結果より，ΔK_{th} あるいは $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ 以下でも，変動荷重下ではき裂が進展しており，変動荷重下における $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ 以下においての ΔK_{eff} と疲労き裂伝播速度との関係は，$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ より大きな領域(ステージ(Ⅱ))における関係の延長線上に載り，修正マイナー則(modified Miner’s law)流の取り扱いができるとしている。

しかし，図 3.32 より明らかなように，ひずみ増幅が十分でなく，負荷過程と除荷過程の差も判別できない（十分に引算ひずみを増幅した場合には，第２編で示すようなヒステリシスが得られる)。さらに，図 3.32 で縦軸に平行な線と離れ出す点がき裂開口点としているが，ひずみ増幅を大きくして負荷過程と除荷過程が明確になるようにヒステリシスを計測すると，自由転位(non-sessile dislocation)の存在により荷重と引算ひずみの間には線形となる区間が存在しない(第３編参照－精密な測定をすると，上記試験より低減率の小さい ΔK_{th} 試験でも，最大荷重低減後に K_{op} が上昇し最大値を示した後，減少することが確認されている)ので，上記のき裂開口点の決定法には問題がある。

そのため，修正マイナー則流の取り扱いで変動荷重下のき裂伝播寿命が推定できるという結論には疑問が残る。また，$\Delta K_{th} = 9.6\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ という結果は，図 3.7 や図 3.8 と比較すると大きい。実際は ΔK_{th} はもっと小さいので，ΔK_{th} を挟んだ２段多重変動荷重を作用させたことにならず，変動荷重下では，ΔK_{th} あるいは $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ 以下でもき裂が成長するという結論も疑問が残る。しかし，

２段多重変動荷重では，荷重の変化率は基礎材料特性を求める場合に採用された条件，すなわち，$d\left(\Delta K\right)/da=-3.1\mathrm{G\ Pa}\cdot\mathrm{m}^{-1/2}$ よりも絶対値が大きい。したがって，荷重の変化率が大なる条件下における ΔK_{th} よりも小さい ΔK の下で疲労き裂が伝播していることは疑いのない事実と考えられよう。また，き裂開口荷重の計測に問題があり $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}=2.0\mathrm{MPa}\cdot\mathrm{m}^{1/2}$ という結果（一定振幅荷重下の試験における低 ΔK_{eff} 領域では，き裂伝播速度ではなく，き裂開口比の計測値が非常にばらついている。これは，き裂開口荷重の計測がばらついていることを意味し，精度の良い計測はかなり難しいことが理解できよう）は，図 3.25 の結果（$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}\approx 3.4\mathrm{MPa}\cdot\mathrm{m}^{1/2}$）と比較して小さくなっており，その値の信憑性は欠けるものの，この振幅よりも低荷重振幅下での ΔK_{eff} が小さい領域でき裂が伝播していることから，$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ 以下の ΔK_{eff} において，２段多重変動荷重下では疲労き裂が伝播していると考えるべきであろう。したがって，彼らが主張しているように，変動荷重下では $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ が消失するとは言えないまでも小さくなると認めざるを得ない。

しかし，なぜ変動荷重下では $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ が小さくなる，あるいは消滅するのかという物理的意味は明確にされていない。

3.3　Newman によるき裂開閉口モデル [96]

3.3.1　モデルの考え方と定式化

疲労き裂の wake zone(疲労で進展したき裂面近傍の疲労被害を受けた跡の領域)における残留引張変形層の形や，き裂閉口領域の接触直応力分布の研究が，Dill と Saff[97] ならびに Führing[98] によりなされた。Newman はこれらを参考にして Dugdale モデルを応用・改良し，各種荷重条件下での，中央き裂形ディープノッチ試験片の疲労き裂開閉口モデルに発展させた。彼は，現時点の塑性域が過去の塑性域先端を飛び越える場合，仮想き裂の大きさならびにき裂開口変位は，1.6 節の Dugdale モデルがそのまま成立すると考えた。仮想き裂部では実際には開口変位は生じないが，Dugdale モデルで現れる仮想き裂開口変位と同じ長さの完全剛塑性体の棒要素が，仮想き裂の上下面に配置されていると仮想した。すなわち弾性状態では，この棒要素の長さは変化しないと考えた。

疲労き裂の伝播は，この棒要素がその中央で上下に分断されることに対応し，この棒要素は，完全剛塑性体と仮定しているので、棒の長さは塑性状態にならない限り変化しない。最大負荷応力より低い負荷応力状態では，仮想き裂の寸法は最大負荷応力時のそれを保持するとし，除荷過程ではき裂縁に配置されて切断された上下の棒が接触することで，圧縮荷重を分担するようになると考えた。図 3.35 は，中央き裂形ディープノッチ試験片の 1/4 部分（第１象限）を示したもので，最初から疲労き裂が進展したとしているので，中央($x=0$)でも棒要素が実き裂面に配置されている。

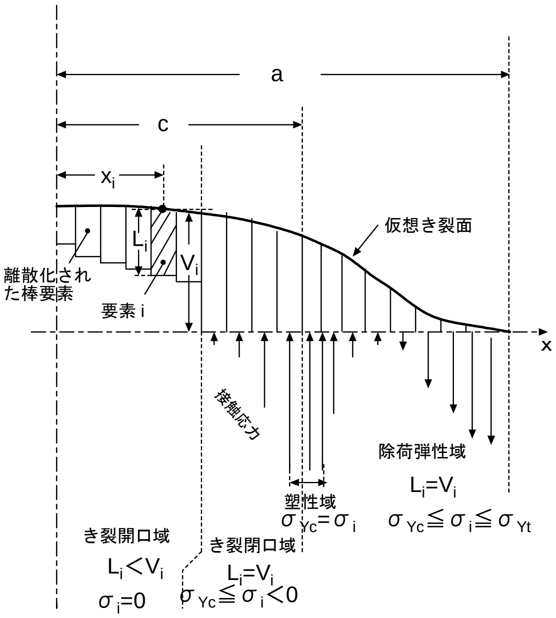


図 3.35Newman のき裂開閉口モデルにおける最小荷重時における状態 99)

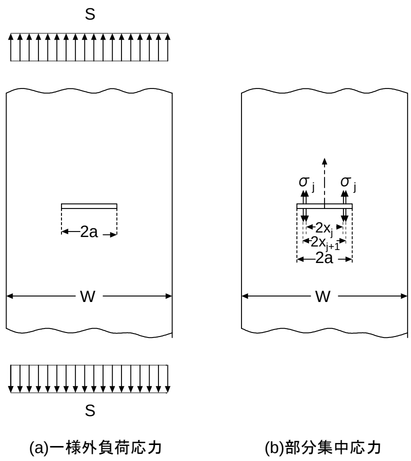


図 3.36　各種荷重を受ける中央貫通き裂

彼は一様応力を受ける中央貫通き裂について，以下のように定式化している。まず，負荷過程で引張塑性域が過去に生じた塑性域を越えて成長する場合を考える。最大荷重において，仮想き裂先端位置 a は，外力による仮想き裂の K 値と，結合力による仮想き裂の K 値の和が 0 となる条件（一様応力を受ける中央貫通き裂では，(1.79)式の下に示した条件式）から決定される。き裂（仮想き裂を含む）部に隙間なく棒要素が n 個配置されている状態（ただし、棒要素間にはせん断応力は作用しないと理想化する）を考えると，き裂面(仮想き裂部を含む)のき裂開口変位 V_i は

$$V_i = Sf_i - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j g_{ij} \quad \left(i, j = 1, \cdots, n\right) \tag{3.19}$$

ただし，　S ：一様外負荷応力（図 3.36(a)参照）

V_i ：i 要素中央部のき裂開口変位

f_i ：単位外負荷応力が作用した場合の i 要素中央部のき裂開口変位

g_{ij} ： j 要素が配置された位置のき裂面間に単位応力が作用した場合に i 要素位置の中央部で生じるき裂開口変位

σ_j ： j 番目の棒要素に作用する応力（図 3.36(b)参照）

f_i および g_{ij} は，それぞれ，図 3.36(a)ならびに図 3.36(b)で，単位応力が作用する場合の，i 点（座標は x_i ）におけるき裂開口変位となり，

$$f_i = \frac{2\left(1-\eta^2\right)}{E}\sqrt{\left(a^2 - x_i^2\right)\sec\frac{\pi a}{w}} \tag{3.20}$$

$$g_{ij} = \frac{2\left(1-\eta^2\right)}{\pi E}\left\{\left(x_{j+1}-x_i\right)\cosh^{-1}\frac{a^2-x_{j+1}x_i}{a\left|x_{j+1}-x_i\right|}\right.$$

$$\left.-\left(x_j-x_i\right)\cosh^{-1}\frac{a^2-x_jx_i}{a\left|x_j-x_i\right|}+\sqrt{a^2-x_i^2}\left[\sin^{-1}\frac{x_{j+1}}{a}-\sin^{-1}\frac{x_j}{a}\right]\right\}$$

$$\times\frac{\sin^{-1}B_{j+1}-\sin^{-1}B_j}{\sin^{-1}\left(x_{j+1}/a\right)-\sin^{-1}\left(x_j/a\right)}\sqrt{\sec\frac{\pi a}{w}} \tag{3.21}$$

ただし，

$$B_k = \frac{\sin\left(\pi x_k / w\right)}{\sin\left(\pi a / w\right)}, \qquad \eta = \begin{cases} 0 & \text{（平面応力状態）} \\ \nu & \text{（平面ひずみ状態）} \end{cases}$$

E　：ヤング率　，　ν　：ポアソン比

と近似的に与えられる。

S に，最大荷重時に相当する外応力を与えると，(3.19)式より最大荷重時のき裂開口変位が求められる。ただし，実き裂内に配置された棒要素に働く作用応力 σ_j は 0，実き裂から仮想き裂先端位置間の σ_j は，引張降伏応力に塑性拘束係数を乗じた σ_{Yt}（引張側相当降伏応力(equivalent yield stress)と呼んでいる）となる（引張塑性拘束係数 $\lambda_t = \sigma_{Yt} / \sigma_Y$）。このき裂開口変位は(1.79)式で得られる結果と同じになる（ただし，σ_Y には σ_{Yt} を代入する。近似解のため，厳密には少し異なる）。ここで，実き裂前方の仮想き裂部では，仮想的にき裂が開口していることになる。実際には，この部分では引張荷重（作用応力は σ_{Yt} となっている）を受け持っている。そこで，仮想き裂位置のき裂開口変位と等しい長さの完全剛塑性体の棒を，き裂上下面に隙間なく配置して，この箇所では棒が荷重の伝達をすると考える（最大荷重時には，仮想き裂位置の棒要素には，σ_{Yt} なる引張応力が作用していることになる）。

この状態より除荷過程に入る。仮想き裂領域で除荷された箇所の作用応力は，σ_{Yt} より小さくなるが，完全剛塑性体のため棒要素の長さ L_i は，圧縮降伏しない限り，最大荷重時の i 点の仮想き裂変位 V_i のまま保持される。したがって，除荷過程における弾性域（実き裂部のき裂開口領域を除いたき裂閉口域も含めて）においては，

$$L_i = Sf_i - \sum_{j=1}^{n}\sigma_j g_{ij} \tag{3.22}$$

が成立する。(3.22)式を書き換えると，

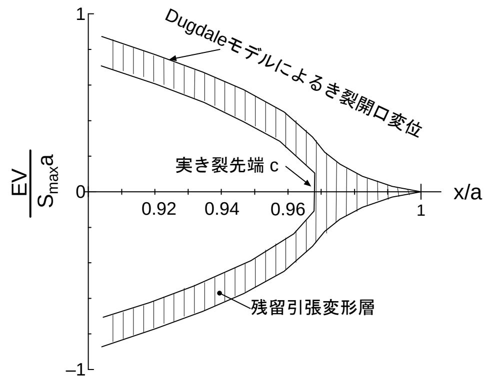
$$\sigma_i = \left(Sf_i - L_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\sigma_j g_{ij}\right) / g_{ii} \tag{3.23}$$

実き裂内では，圧縮応力しか作用せず，き裂が開口すると，作用応力 σ_i は 0 となる。さらに，圧

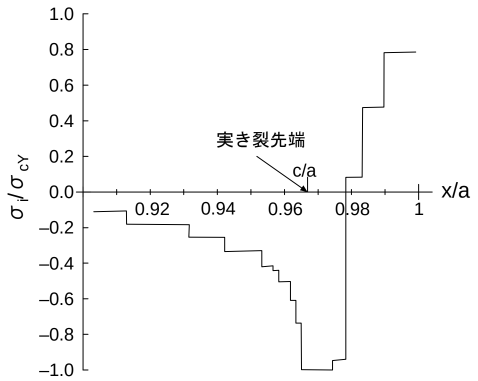
縮側相当降伏応力 σ_{Yc} （圧縮塑性拘束係数 $\lambda_c = -\sigma_{Yc} / \sigma_Y$ ）以下にならないことを考慮し，(3.23)式（ただし， S を最小荷重時の外応力とする）を解く（ $\sigma_i < \sigma_{Yc}$ となれば， $\sigma_i = \sigma_{Yc}$ ，実き裂位置では $\sigma_i > 0$ となれば $\sigma_i = 0$ と置き直して解く。Gauss-Seidel 法(Gauss-Seidel iteration method)で求めるのが最も簡単）ことで，最小荷重時の作用応力を求めることができる。そして，得られた σ_i を(3.19)式に代入することで，最小荷重時のき裂開口変位を求めることができる。その結果，圧縮降伏した位置の開口変位は L_i よりも小さくなり，その位置の棒要素の長さ L_i は， $L_i = V_i$ に置き換わる。

そして，き裂を Δc 成長させた（すなわち，Δc の位置の棒要素は，その中央で上下に切断され，圧縮応力は働くが引張応力は働かなくなる）後，負荷過程に入るが，最大荷重時に仮想き裂先端が，前段階の仮想き裂先端を越えて成長していれば（(1.79)式の下の式から求められる），(3.19)式で最大荷重時のき裂開口変位を求めることができる。しかし，前段階よりも仮想き裂先端が成長しなければ，仮想き裂先端は前段階のそれを保持し，(3.22)式あるいは(3.23)式がそのまま成立する。負荷過程では，作用応力は σ_{Y_t} 以上になることはなく，また実き裂部では引張応力は作用しないことを考慮して，(3.23)式（ただし，S は最大荷重時の作用外応力）を解けば，最大荷重時における作用応力分布 σ_i が求められ，(3.19)式にそれを代入することで，最大荷重時のき裂開口変位を求めることができる。以下，上記を繰り返すことにより，最大荷重と最小荷重における作用応力ならびにき裂開口変位を求めることができる。

図 3.37 には，一定振幅荷重条件下に対して Newman が求めた結果の一例を示す(次項で示すように，降伏応力の代わりに塑性流れ応力 σ_o を用いて解析している)。き裂開口変位，残留引張変形層の厚さ，最小荷重時にき裂閉口域に働く応力，ならびに実き裂前方の応力の分布形状は定性的に理に適った結果となっている。



(a) 最大荷重時のき裂開口形状ならびに残留引張変形層



(b) 最小荷重時、棒要素に働く応力（実き裂内はき裂閉口域に働いている接触応力）

図 3.37　一定振幅荷重下におけるき裂開閉口挙動の解析例（w=50.8mm の中央貫通き裂材に完全片振荷重を与え,c=34mm となった時点の最大荷重時の変形と,最小荷重時の作用応力分布）（Smax=138MPa,　Smin=0MPa, λ_t=2.3,　λ_c=1, σ_Y=360MPa, σ_B=455MPa, σ_0=407.5MPa：2219-T851Al 合金を想定）

き裂開口応力 S_{op} は，最小外応力 $S_{\min}$ から S_{op} に至る応力増分に対する K値(K_1)が，$S_{\min}$ 時のき裂閉口領域に働いている接触直応力と等値逆符合の応力による K値(K_2)に等しい($K_1 = K_2$)として，

$$S_{op} = S_{\min} - \sum_j \frac{2\sigma_j}{\pi}\left[\sin^{-1}\bar{B}_{j+1} - \sin^{-1}\bar{B}_j\right] \tag{3.24}$$

ただし，　$\bar{B}_k = \dfrac{\sin\left(\pi x_k / w\right)}{\sin\left(\pi c / w\right)}$

j ：実き裂内の全ての要素

と初期には与えていた [96]。

しかし，上記は負荷過程でき裂先端部が最後に開口する場合に対して適用できるもので，ある種の荷重条件下では上記の現象は必ずしも生じないとして，最後に開口する wake zone の要素番号を i とする時,

$$\left(S_{op,i} - S_{\min}\right) f_i = \sum_j \sigma_j g_{ij} \tag{3.25}$$

ただし，j：実き裂内全ての要素

となるから，き裂開口領域の内の i 点に対して上式より $S_{op,i}$ を求め，この内の最大値を，き裂開口応力とすべきであると修正している [100]。

3.3.2　Newman モデルでの取り扱いとその問題点

(3.24)式あるいは(3.25)式は一見正しいように考えられるが、外力が保たれたままで閉口域で働いている接触応力の一部が解放されると圧縮降伏域が成長し、き裂はさらに閉口しようとすることから理解出来るように、これらの式はき裂開口荷重を小さく見積もることになる。さらに最小荷重からき裂開口荷重に至る荷重範囲の任意の段階での応力分布を求めることが出来ないという根本的な欠陥を有している。

図 3.38 [101] 中の実線は，塑性拘束係数を導入しないで，すなわち $\lambda_t = \lambda_c = 1$ として，一定振幅荷重下における中央貫通き裂のき裂開口応力 S_{op} を(3.24)式（この場合は(3.25)式でも同じ結果となる）から求めた結果である（き裂は最小荷重時に進展するとし，後述の塑性収縮係数も考慮されていない）。この計算には，前項の棒要素を完全弾塑性体とし, 弾性状態でも Hook の法

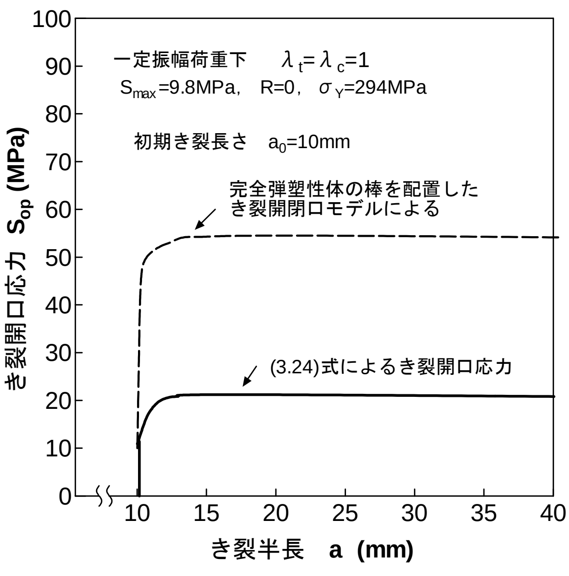


図 3.38　定式化の違いによるき裂開口応力推定結果の比較

則に従い変形すると修正（第 3 編参照）して求められた最小荷重時のき裂閉口域に働く応力分布が使用されている。

塑性域はそれ自身では何の抵抗力も持たないとして，き裂線垂直方向への塑性域の自由な拡大を保証できるように仮想的に塑性域をき裂と考えたのが Dugdale モデルである。そして，き裂線垂直方向の仮想き裂部の変位は，周りの弾性域の拘束と，仮想き裂面間の結合力が降伏応力となる弾性体という仮定より求められるとして定式化されている（完全剛塑性体とすると，ヤング率は無限大となり，(1.79)式もしくは(3.19)式において，き裂開口変位は 0 となることからも，Dugdale モデルでは塑性体という取り扱いはしておらず，仮想き裂とすることで弾性問題に置き換え，塑性変形を近似していることが分かる)。したがって，Newman が導入した完全剛塑性体の棒要素とは，モデル上で整合性が取れていない。すなわち，Dugdale モデルでは，塑性域も仮想的にき裂とし，引張塑性域となる箇所のき裂開口変位は，外力による弾性き裂開口変位と，引張塑性域の仮想き裂上下面に，降伏応力に等しい弾性応力を結合力として作用させた変位の和で与えられている。この弾性開口変位は，仮想き裂上下面間の応力の流れはないと仮定した弾性解析結果から生じるものである。ここで，配置する棒の挙動に着目すれば，除荷弾性域では弾性変形し，作用応力が頭打ちになってからは，作用応力の上昇なしに塑性変形が進行する。すなわち，Dugdale モデルとの整合性を取るためには，棒要素は弾完全塑性体でなければならない。

弾完全塑性棒を配置すると，仮想き裂部における弾性変形が考慮できるようになるために，仮想き裂部が除荷弾性状態にある任意の負荷段階についても，応力分布およびき裂開口変位を求めることができる（第 3 編参照)。Newman のき裂開閉口モデルでは，配置する棒要素の弾性変形を無視したために，仮想き裂部が除荷弾性域にある場合の変位挙動を考慮できなくなると同時に，最小荷重時からき裂が開口するまでのこの領域における応力変化が外応力に影響することを無視しているために，S_{op} は実際より相当小さく（図 3.38 の例では半分以下）推定されることになることが，点線と実線を比較することにより分かる。

このように Newman の定式では S_{op} の推定が小さくなりすぎる。そのため，両側き裂帯板の平面ひずみ状態における塑性拘束係数が 3*であることに着目して, Newman は非常に大きい見掛け上の降伏応力を与えた。しかし，それでもき裂開口応力が，実験結果よりも小さくなるため，降伏応力の代わりに塑性流れ応力

$$\sigma_0 = \left(\sigma_Y + \sigma_B\right)/2 \tag{3.26}$$

ただし，　σ_0　：塑性流れ応力（flow stress）
σ_Y　：降伏応力
σ_B　：引張強さ

を用い，降伏応力の代わりに $\lambda\sigma_0$（ただし，λ：塑性拘束係数*）を与え，見掛け上は，λ を 3 以下に抑えている。しかし，6mm 程度の 2219-T851Al 合金薄板帯板の中央貫通き裂材でも，2.7

（0.2％耐力ベースでは 3.06）という大きな値となっている [102]。図 1.21 などの実験結果から分かるように，25mm 程度の板厚では塑性拘束係数は１に近い値を取り（通常溶接構造用鋼に対してではあるが），λ=3.06 という値はいかにも大きすぎる。

さらに，単に降伏応力を上昇させるだけでは，推定されるき裂開口応力が小さすぎるため(文献では，このことには触れていない)，引張降伏に対する塑性拘束係数 λ_t を大きくし，き裂開口変位が引張側であまり大きくならないように配慮し，それと同時に圧縮降伏に対しては λ_c を小さくして圧縮塑性域を大きく成長させ，最小荷重時のき裂閉口域を大きく形成されるようにしている。

具体的には，$\lambda_c = 1$ とし，引張降伏に対し見掛けの降伏応力を flow stress とし，λ_t を変化させて S_{op} が実験結果と合うようにしており，図 3.37 に例示したように，λ_t は２以上の大きな値を採用している。そして，圧縮降伏に対しては，local flow stress と降伏応力の比($\lambda_c = 1$)という，あまり大きくない係数を採用しているのは，疲労破面上に形成される波紋，すなわちストライエーションに大きな圧力痕が認められないためである [102] としている（圧縮降伏応力が大きいことが，必ずしも圧力痕を大きく残すこととは対応せず，降伏応力が小さくなる(この場合，き裂閉口域に働く圧縮応力は小さくなるが)方が，き裂閉口域が大きくなり，作用ひずみが大きくなって大きな圧力痕を形成することになることも考えられる)。

Newman のき裂開閉口モデルが公表されてから，このモデルを適用するプロジェクト研究が世界規模で実施された。このき裂開閉口プログラムは FASTRAN と名付けられ，商用ソフトに供せられ種々の改良を行いながら，主として航空機業界での安全性照査に用いられてきた。それでも実験結果と合わないため，一定振幅荷重下での実験結果をもとに，引張塑性拘束係数を図 3.39 に示すように変化させるよう提唱 [105] している（FASTRAN の修正版 FASTRANⅡに組み込まれている）。ここで，$(da/dN)_1$ より遅い低疲労き裂伝播速度領域では，板表面に垂直で平坦な破面が形成され，$(da/dN)_2$ より速い領域では傾斜した破面が形成されると主張しており，その中間は遷移領域であるとしている。しかし，その領域の境界は曖昧である。いづれにしても，ある特定の荷重条件下での疲労き裂成長曲線の実験結果と推定結果がほぼ一致するように，疲労き裂伝播速度に応じて図 3.39 のように塑性拘束係数を変化させている。その結果，特に航空機が受ける

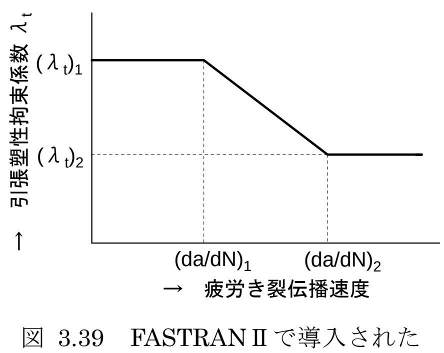


図 3.39　FASTRANⅡで導入された引張塑性拘束係数の変化

多軸応力状態下において降伏する瞬間の垂直応力成分の内，絶対値の最大のものを単軸応力下の降伏応力で除したものとして定義される。初期降伏時点と，荷重を受け持つ最小断面全体が降伏する時点の２つが考えられるが，通常は後者が採用される。両側き裂を有する帯板が引張負荷を受け平面ひずみ状態下にある場合，リガメントが全面降伏した時点の辷り線場理論から，リガメント部の y 方向応力は，

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2+\pi\right)\sigma_Y \approx 3\sigma_Y$$

となる [103]。この場合が最も塑性拘束係数が大きくなり，約３となる。

荷重履歴を与えた疲労き裂伝播試験結果が定量的に推定できるとしている。しかし，すべての荷重条件に対して，定量的な解析ができるという理論的根拠は皆無である。

すなわち，本来，塑性拘束係数は，単調負荷試験あるいは静的弾塑性解析によって得られるき裂開口変位や，塑性域寸法などから求められるものであり，繰り返し荷重下で計測されるき裂開口応力から決定される物理量ではない。さらに，図 3.39 の取り扱いのように，破面の荷重軸に対する垂直度によって塑性拘束係数を変化させる理由も見当たらない。

このように，Newman のき裂開閉口モデルは，塑性域を仮想き裂と近似し線形弾性体の重ね合わせとしているのが Dugdale モデルであることを無視し，き裂開閉口モデルに完全剛塑性体の棒を配置したことの無理が種々の局面で生じ，き裂開口荷重の計測結果と合致させるために種々の不合理な修正を施しており，種々の条件下における定量的き裂伝播寿命の予測に有効であるとは言い難い。

第２編参考文献

1) G.R.Irwin: Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate, Transactions, ASME, Journal of Applied Mechanics,Voi.24,(1957),p.361

2) E.Smith, Proc. Conference Physical Basis of Yield and Fracture, Inst. Phys. Soc., Oxford,(1966),p.36

3) F.M.Beremin : A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel, Metallurgical Transaction A, 14(11),(1983),p.2277-2287

4) 岡本弘之：線形破壊力学入門、培風館、(1976)

5) N.I.Muskhelishvili: Some Basic Problems of the Theory of Elasticity, 4th ed., Noordhoff,(1963)

6) R.J.Hartranft and G.C.Sih: Alternating Method applied to Edge and Surface Crack Problems, Mechanics of Fracture, Vol.1, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Edited by G.C.Sih, Noordhoff,(1973), Chapter 4,p.179-238

7) 豊貞、丹羽、後藤他：二次元化による表面き裂の K 値近似解法、日本造船学会論文集、Vol.178,(1995),p.535-543

8) K.C.Kaya and F.Erdogan: Stress Intensity Factors and COD in an Orthotropic Strip, International Journal of Fracture, Vol.16,(1980),p.171-190

9) 豊貞、後藤、丹羽、牧：き裂面に集中荷重が作用する場合の K 値推定法について、西部造船会会報、Vol.93,（1997),p.103-110

10) D.S.Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, Journal of Mech. Phys. Solids, Vol.8,(1960),p.100-104

11) H.M.Westergaard: Bearing Pressures and Cracks, Trance. ASME, Journal of Applied Mechanics, Series A,Vol.66,(1939),p.49

12) P.C.Paris: The Mechanics of Fracture Propagation and Solutions to Fracture Arrester Problems, Document No.D2-2195, The Boeing Company,(1957)

13) A.A.Wells: Application of Fracture Mechanics at and beyond General Yielding, British Welding Journal,(1963-11),p.563

14) 矢田、酒井、飯野、阪野：切欠平板引張試験片の弾塑性挙動と破壊特性に関する一考察、日本造船学会論文集、Vol.134,(1973),p.425-435

15) 佐藤、豊田、伊藤、川口、有持、鈴木、多々良：切欠をもつ鋼材の破壊遷移現象と破壊 overall strain に及ぼす諸因子の影響、日本造船学会論文集、Vol.142,(19737),p.148-155

16) 豊貞、後藤、村上、中山、渡辺：Dugdale model における仮想き裂の物理的意味に関する一考察、西部造船会会報、Vol.105,（2003),p.249-255

17) J.C.Newman,Jr. and I.S,Raju: Stress Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodied, NASA TM-83200,NASA Langley Research Center, Hamoton, Virgia,August,(1981)

18) M.T.Kirk and R.H.Dodds：J and CTOD Estimations for Shallow Crack in Single Edge Notch Bend Specimens, J. Testing and Evaluation, Vol.21,4,(1993),p.228-238

19) WES2805: Method of Assessment for Flaws in Fusion Welded Joints with Respect to Brittle Fracture and Fatigue Crack Growth, Revised on October 1,(2011)

20) S.J.Maddox；Application of Fracture Mechanics to the Problem of Fatigue in Welded Structures, Elsevier B.V,, (2004)

21) M.B. Civelek and F. Erdogan: Elastic-plastic problem for a plate with a part-through crack under extension and bending, International Journal of Fracture, 20-1, (1982), pp. 33-46

22) J.W.Hutchinson: Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material, J.Mech.Phys.Solids,Vol.16(1968)、p.13

23) C.F.Shih and J.W.Hutchinson: Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problem, Materials and Technology, Trans. ASME, Oct.(1976),p.289

24) 伊藤：切欠をもつ構造用鋼およびその溶接継手の全面降伏状態における不安定脆性破壊に関する研究、大阪大学博士論文、Jan.(1979),p.33

25) 後藤：動的荷重を受ける鋼板の脆性破壊強度評価法に関する研究、九州大学博士論文、Sept.(1994)

26) J.R.Rice and M.A.Johnson: The Role of Large Crack Tip Geometry Changes I Plane Strain Fracture to appear in Inelastic Behavior of Solids, Eds.M.F.Kanninen et al.,McGraw-Hill (1970),p.641

27) J.W.Hutchinson:Fundamentals of the Phenomenological Theory of Nonlinear Fracture Mechanics, Trans. ASME, J.Appl. Mech.,vol.50(1983),p.1042

28) 河野：構造用鋼の大規模降伏下における脆性破壊靭性に及ぼす板厚効果に関する基礎的研究、広島大学博士論文、(1984)

29) 金沢、町田、豊貞、粟飯原：限界 COD 値に及ぼす切欠尖鋭度の影響、日本造船学会論文集、Vol.148,(1980),p.183-192

30) 日本造船研究協会第 3 基準研究部会：危険物の特性および運搬船の特殊設備に関する調査研究報告書（別冊）－危険物専用船の船体構造部材の研究－、研究資料 No.59R,(1979)

31) T.Ingham, G.R.Egan, D.Elliott and T.C.Harrison ： The Effect of Geometry on the Interpretation of COD Test Data, Instn Wech. Engineers, C54,(1971),p.200

32) British Standard Inspection: Methods for Crack Opening Displacement(COD) Testing, DD19,(1972)

33) 川口：溶接構造用鋼板の脆性破壊特性からみた材質の評価と判定についての一考察、東京大学博士論文、(1974)

34) 亀田、高橋、鈴木：高張力鋼溶接継手の熱影響部微視組織と破壊靭性、溶接学会誌、45-6,(1976),p.457-462

35) Z.Paley, J.N.Lynch and C.M.Adams: Heat Flow in Welding Heavy Steel Plate, Welding Journal, 43,(1964),p.2

36) 豊貞、萩原、野原、大塚：溶接継手の限界 CTOD とその板厚効果について、日本造船学会論文集、Vol.159,(1986),p.345-354

37) Narasimha-Rao V. Bangaru and A.K.Sachdev: Influence of Cooling Rate on the Microsructure and Retained Austnite in an Intercritically Annealed Vanadium Containing HSLA Steel, Metal Trans.,13A-11,(1982),p.1899-1906

38) 濱田：低合金鋼溶接部の強度と靭性の制御(1)-溶接熱影響部の強度,靭性の制御-、溶接学会誌 71(7)、(2002), ｐ. 510- 514

39) 堀井、大北：溶接金属の組織予測-1-軟鋼・高張力鋼、溶接学会誌、60(8)、(1991)、p632～636

40) K.Arimochi,K.Isaka：Approaches to LBZ free technologies, Proc.10thInt.Conf.OMAE, Vol. ３A, p.213,（1991）

41）岡本：造船用、海洋構造物用、建築用各鋼板の高強度化（利用技術の進歩とともに）、日本鉄鋼協会第 141，142 回西山記念技術講座資料，p.23,（1992）

42）川端，天野，板倉，南，荊，豊田：鋼溶接熱影響部靭性に及ぼす局部的硬化部の形態効果、日本造船学会論文集，第 173 号,(1993) p.349-357

43) WES1109：溶接熱影響部 CTOD 試験方法に関する指針,（社)日本溶接協会,（1995)

44) 豊田、南：溶接 HAZ 靭性評価のための CTOD 試験片採取のあり方、日本造船学会論文集,第 169 号,（1991) p.279-287

45) 豊田，南ら：溶接学会論文集，第 12 巻第４号,（1994）p.568

46) F.Minami,M.Toyoda,K.Satoh：Trans.Japan Welding Society, Vol.19, No.２（1988）, p.125

47) F.Minami,M.Toyoda et.al.：溶接学会論文集，第 13 巻第４号,（1995) p.508,

48) 永井、清水、岩田、河野、小園：大規模降伏脆性破壊強度に及ぼす板厚の影響について、日本造船学会論文集，Vol.146,(1979),p.497-505

49) たとえば
山田：コンピュータによる構造工学講座　Ⅱ-2-A 塑性･粘弾性　倍風館の３章

50) 永井、清水、河野、栗林：大規模降伏脆性破壊強度に及ぼす試験片形状および板厚の影響について、日本造船学会論文集，Vol.148,(1980),p.177-182

51) 永井、清水、河野、平本：板厚の影響を考慮した大規模降伏脆性破壊特性の破壊力学的考察、日本造船学会論文集，Vol.151,(1982),p.231-237

52) 永井、梶本、谷口、日本造船学会論文集：構造的応力集中部における脆性破壊発生特性について、Vol.144,(1978),p.120

53) F.M.Burdekin, M.G.Dawes: Practical Use of Linear Elastic and Yielding Fracture Mechanics with Particular Reference to Pressure Vessel, IIW Doc.X-641-71,(1971)

54) BSI PD 6493: Guidance on Same Methods for the Derivation of Acceptance Levels for Flaws in Fusion Welded Joints,(1980)

55) P.E.Bennet and G.M.Sinclar: Parameter Representation of Low-Temperature Yield Behavior of Body-Centered Cubic Transition Metals, ASME paper65-MET-11(1965)

56) 豊貞、後藤；ひずみ速度及び温度を考慮した軟鋼の構成方程式について、西部造船会会報、81 号、(1991)、p.259－268

57) 豊貞、後藤、相良：高速負荷時におけるき裂先端近傍の局部温度上昇について、日本造船学会論文集，Vol.170,(1991),p.651

58) M.Toyosada, E.Fuiji, K.Arimochi and K.Isaka: A Proposal of Assessment Method for the Effect of Strain rate on Fracture Thoughness, Proceedings of EVALMAT89,ISIJ,(1989), p.687-694

59) 豊貞、藤井、野原、川口、有持、井坂：破壊靭性に及ぼすひずみ速度の影響、日本造船学会論文集，Vol.161,(1987),p.343-356

60) N.E. Frost: The Growth of Fatigue Cracks, Proc. 1st Int. Conf. Fracture,(1966),p.1433

61) P.C.Paris: A Critical Analysis of Crack Propagation law, Trance. ASME Ser.D,83-1,(1961),p.24

62) P. C. Paris：The fracture mechanics approach to fatigue, in Fatigue-An Interdisciplinary Approach(Edited by J.H.Burke N.L.Reed and V.Weiss),Syracuse University Press,(1964)

63) 北川、西谷、松本：疲労き裂成長の下限界応力係数 ΔK_{th} とき裂材・切欠材の疲労限度との関係について、日本機械学会論文集（第１部）、42-356，(2976),p.996

64) F. G. Forman, V. Kearney and V. E. Engle: Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic Load Structures,Trans. ASME, Ser. D, Vol.189, (1967),p.459

65) S. Pearson: The effect of mean stress on fatigue crack propagation in half-inch (12.7 mm) thick specimens of aluminium alloys of high and low fracture toughness, Eng. Fract. Mech., Vol.4, (1972), p.9-24

66) 石田，寺田，角田：機講論，No.710-9,(1971),p.73

67) 中沢，小林　他：機講論，No.730-1,(1973),p.41

68) 豊貞：部分片振領域における疲労亀裂伝播速度について、日本造船学会論文集， Vol.133,(1973), p.265－276

69) D.Broek and J. Schijve: The Influence of the Mean Stress on the Propagation of Fatigue Cracks in Aluminum Alloy Sheet, NLR-TR, M2111, (1963), p.41

70) W. Elber: Fatigue crack propagation: some effects of crack closure on the mechanisms of fatigue crack propagation and cyclic tensile loading, Ph.D.Thesis, University of New South

Wales,(1968)

71) 太田　他：日本機械学会論文集, Vol.43, No.373, (1977),p.3179

72) J. M. Barsom: Fatigue-Crack Propagation in Steels of Various Yield Strengths, Journal of Engineering for Industry, ISSN 0022-0817, Volume 93, Issue 4,(1971), p. 1190

73) R. J. Bucci, P. C. Paris, R.W. Hertzberg and A.F. Anderson: FATIGUE THRESHOLD CRACK PROPAGATION IN AIR AND DRY ARGON FOR A Ti-6Al-4V ALLOY, ASTM Special Technical Publication, (1972), p.125-140

74) RR843 委員会：LNG 運搬船の安全基準に関する調査報告書、日本造船研究協会第８規準部会報告, (1978)

75) O.E .Wheeler:Spectrum Loading and Crack Growth, J. Basic Eng., Trans. ASME, Vol. 94, No. 1 (1972), pp. 181-186

76) L. G. Vargas and R. I. Stephen, Subcritical crack growth under imtermittent overloading in cold-rolled steel, 3rd Inter- national Conference on Fracture, Munich, Germany (1973). p.1-5.

77) 金沢，町田，峰久，永井，豊貞，岡本，田中：曲げと引張を受ける貫通欠陥の疲労き裂伝播速度と脆性破壊発生について，日本造船学会論文集、Vol.136,(1974),p.191－205

78) F.Erdogan and M. Bakioglu: Crack opening stretch in a plate of finite width,International Journal of Fracture, Volume 11, Issue 6, (1975), p.1031-1039

79) 豊貞；機械の研究，Vol.31，No.10，(1979),p.1145

80) D. Taylor and J.F. Knott：Fatigue crack propagation behaviour of hort cracks; the effect of microstructure,Fatigue Engng Mater. Struct., 4 (1981), p. 147–156

81) O.K.Chopra, W.J.Shack: Review of the Margins for ASME Code Fatigue Design Curve-Effect of Surface Roughness and Material Variability, U.S. Nuclear Regulatory Commission Office of Nuclear Regulatory Research Washington, DC 20555-0001, NUREG/CR-6815 ANL-01/39,(2003)

82) 北川，高橋：日本機械学会論文集 A, Vol.45, No.399, (1979),p.1289

83) O.Buck, C.L. Ho and H.L. Marcus: Plasticity effects in crack propagatio, Eng. Frac.Mech.Volume 5, Issue 1, (1973), p.23–34

84) T.C. Lindley and C.E. Richards: Mater.Sci, Eng. ,Vol.14, No.3, (1974), p.281

85) H. Nisitani and K. Kaga: ICF-4, Vol.2, (1977), P.1099

86) W.N. Shape Jr. and X. Su, Eng. Frac. Mech., Vol.30, (1988), p.275

87) Y.Akiniwa, S. Harada and Y. Fukushima: Fatigue Fract. Eng. Mat. Struct., Vol.14, No.2/3, (1991), p.317

88) 菊川，城野，田中，高谷：材料, Vol.25, No.276, (1976), p.899

89) 西谷，陳：日本機械学会論文集 A, Vol.51, No.465, (1985),p.1436

90) 城野　他：日本材料学会第 116 回疲労シンポジュウム前刷，(1982),p.21

91) ASTM Designation E647-83, (1983), p.710

92) 田中，征矢：日本造船学会材料溶接研究委員会材料分科会資料，1-692-87,(1987)

93) 菊川、城野、近藤：ランダムを含む定常変動荷重下の疲労き裂開閉口挙動とき裂進展速度の推定法 、 第 2 報,高進展速度領域への拡張、日本機械学會論文集. A 編 49(439), (1983)、p.278-285

94) 菊川、城野、近藤：疲労き裂進展下限界条件試験法に対する検討 ： き裂開閉口挙動に及ぼす荷重履歴の影響、材料、Vol.30, No.330,(1981),p.276-282,

95) 菊川，城野，近藤：低 K 領域における変動荷重下の疲労き裂進展挙動と進展速度の評価法、日本機械学会論文集 A, Vol.47, No.417, (1981),p.468-482

96) J.C.Newman,Jr.,NASA Tech. Memo,81941,(1981)

97) H.D.Dill and C.R.Saff: Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads, ASTM STP-595,(1976,p.306

98) H.Fuhring: Numerical Methods in Fracture Mechanics,Proc.2nd Conf.Swansea, U.K.(1980) ,p.645

99) M.Skorupa, J.Schive, A.Skorupa and T.Machniwicz,Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct, Vol.22,(1999),p.879

100) J.C.Newman,Jr. : Behaviour of Short Cracks in Airframe Components, AGARD, Proc. Conf.,N0.328,(1983),p.6-1

101) 豊貞、岡本、藤原：き裂開閉口を考慮した疲労き裂伝播モデル、日本造船学会論文集、Vol.152,(1983),p.381－389

102) J.C.Newman,Jr.,NASA Tech. Memo,81942,(1981)

103) G.S.Wang and A.F.Blom, Eng. Fract. Mech. Vol.40,(1991),p.507

104) Jl. M.カチャノフ原著、大橋義夫訳：塑性理論の基礎、養賢堂、(1971),p.171

105)J.C.Newman,Jr:FASTRAN Ⅱ － A Fatigue Crack Growth Structual Analysis Program ,NASA Tech. Memo,104159,(1992)

付録２A　　シャフトの表面き裂最深部の K 値簡易推定

シャフトの疲労寿命を推定するためには、シャフト表面に生じるき裂について、その成長に伴う K 値変化を与える必要がある。シャフトには軸力＋曲げ荷重が重畳して作用する。引張荷重が作用する場合の K 値については、図 2A-1 に示すように特定の表面き裂に関してしか求められていない。また、曲げ荷重が作用する場合については、$a/b \leq 1$ の領域で $a/r \leq 0.5$ の領域について表で与えられている[1)]。

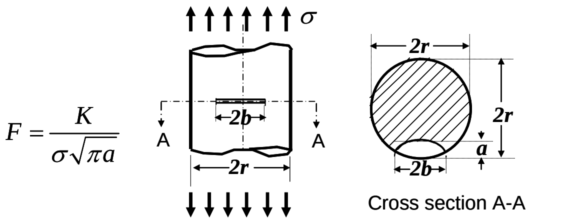


Table of Magnification factor F

a/b \ a/r	0	0.0625	0.125	0.1875	0.25	0.375	0.5
0.25	0.996	1.003	1.022				
0.5	0.884		0.890		0.920	0.976	1.064
0.75	0.759			0.780		0.840	
1.0	0.660		0.665		0.683	0.714	0.758

図 2A-1　これまでに求められているシャフトに入った半楕円表面き裂最深部の応力拡大係数

これらの情報をもとに、以下ではシャフトの疲労寿命を推定するに必要な表面き裂の K 値変化を与える手法について検討する。シャフト中の表面き裂も平板中の表面き裂と同じく、半楕円き裂状に成長しそのアスペクト比変化は平板中の表面き裂とほぼ同じになると考えられる。したがって任意のアスペクト比に対する K 値を与える必要がある。この場合 K 値としては平板中の表面き裂と同じく最深部の K 値を推定すれば良い。

図 2A-1 に示す一様引張を受ける半楕円表面き裂付きシャフトのき裂最深部の K 値を、

$$K = F\sigma\sqrt{\pi a} \qquad (2A\text{-}1)$$

ここで

K ：応力拡大係数
σ ：一様引張応力（公称応力）
a ：き裂深さ
F ：修正係数

とし、図 2A-1 中の表から修正係数 F をプロットしたのが図 2A-2 である。ところでシャフト中の表面き裂最深部の K 値は、第一近似

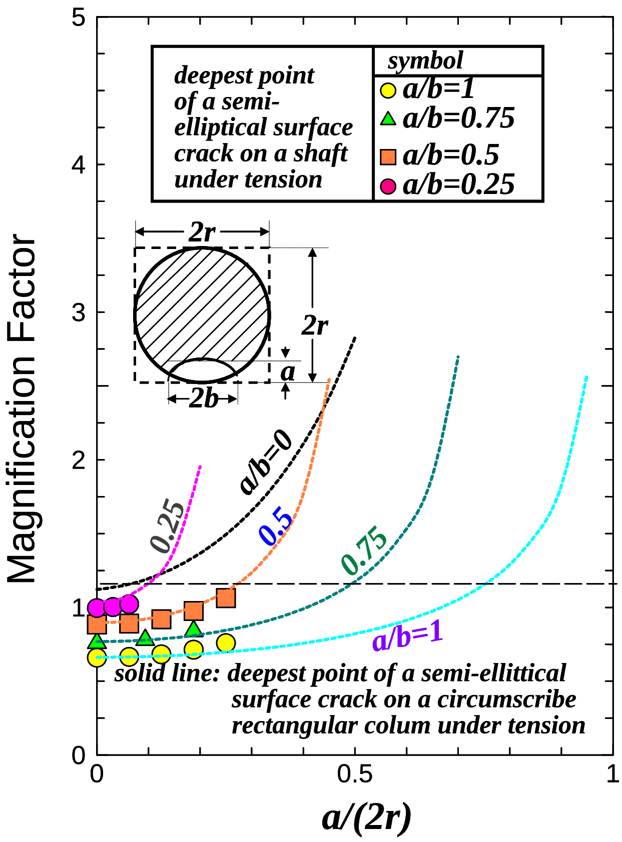


図 2A-2 引張を受けるシャフトに存在する表面半楕円き裂最深部の K 値に対する近似解の検討

としてはシャフトに外接する角柱に存在する表面き裂の K 値とほぼ同じになると考えることが出来よう。図中の短点線は軸荷重を受ける場合の上記角柱に存在する表面き裂最深部 K 値の修正係数を Newman＆Rajue 式(第２編(1.81)式）で求めた結果である。アスペクト比が 0.75 以上の半円形に近い表面き裂はシャフト直径（板厚）の２割以上深くなると、Newman＆Rajue 式での K 値よりも若干大きくなる傾向にある。逆にアスペクト比が 0.5 以上の偏平な表面き裂の場合には、き裂が浅い間は角柱に存在する Newman＆Rajue 式で与えられる K 値と良く一致しているが、深くなると Newman＆Rajue 式による K 値よりも小さくなっている。

シャフトには軸力だけが作用することは殆どなく、ねじりと曲げが作用することが多い。すなわち、小さな表面き裂から成長する場合、偏平なき裂になりやすい。したがって、アスペクト比の大きな領域でよりも、小さい領域で K 値を大き目に設定することが、安全性検討では重要となる。

$a/b=0$ の黒点線は無限遠で一様引張を受ける片側貫通き裂付き帯板の K 値についてのものである。偏平なき裂が深くなると、角柱に存在する Newman＆Rajue 式で与えられる K 値は、シャフトに存在する半楕円表面き裂の K 値よりも、大きくなっている。したがって一様引張を受けるシャフトに前縁線が直線に近い形状のき裂が存在する場合の K 値は、無限遠で一様引張を受ける片側貫通き裂付き帯板の K 値よりも小さくなることになる。

したがって、一様引張を受けるシャフトに存在する半楕円表面き裂最深部の K 値は、シャフトに外接する正方形断面の角材に存在する半楕円表面き裂最深部の K 値と、シャフトの直径に等しい幅の帯板に最深部の深さと等しい片側貫通き裂が存在する場合の K 値を比較し、その小さい方の値になるという取り扱いをすれば良いことになる。

次に面外曲げを受ける場合の K 値について検討する。図 2A-3 は半楕円表面き裂を有するシャフトに面外曲げが作用した場合のき裂最深部の K 値に関してのものである。図 2A-3 で横軸が 0～0.25 の領域（き裂深さがシャフトの直径の 1/4 までの表面き裂）で示す太長点線は、半楕円表面き裂が存在するシャフトに面外曲げが作用した場合のき裂最深部の K

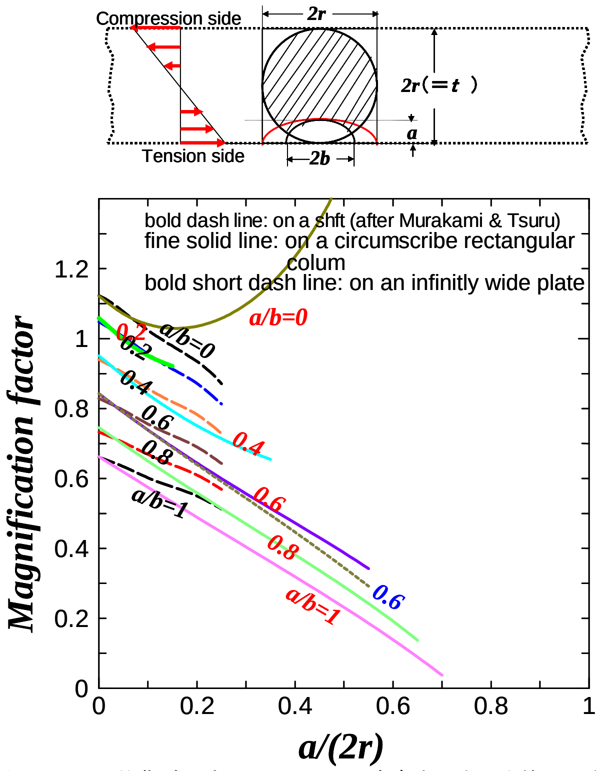


図 2A-3 面外曲げを受けるシャフトに存在する表面半楕円き裂最深部の K 値に対する近似解の検討

値修正係数を村上らが求めた結果である[2)]。彼らは、図 2A-1 の結果を使って、Maddox 流の近似[3)]を行い、面外曲げが働く場合の K 値を求めている。すなわち、図 2A-4 に示すように、(a)面外曲げを受けるシャフトに存在する半楕円表面き裂最深部の K 値は、(b)一様引張を受けるシャフトに存在する半楕円表面き裂最深部の K 値(図 2A-1 中の表)に、(c) 最深部のき裂深さと等しい長さの端部き裂を有するシャフトの直径と等しい幅の帯板に面外曲げが作用する場合の K 値を乗じたものを、(d) 最深部のき裂深さと等しい長さの端部き裂を有するシャフトの直径と等しい幅の帯板に一様引張が作用する場合の K 値で除したもので近似している。

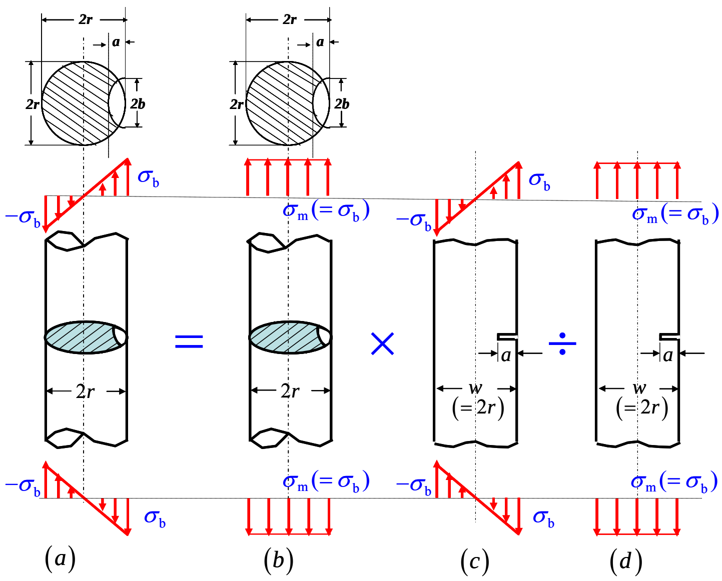


図 2A-4　面外曲げを受けるシャフトに存在する半楕円表面き裂の K 値を求めるために村上らが用いた近似

すなわち、(c)の面外曲げを受ける幅 $2r$ で、長さ a の端部き裂付き帯板のき裂の K 値修正係数、

$$F\left(\frac{a}{2r}\right)=\sqrt{\frac{4r}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{4r}}\cdot\frac{0.923+0.199\left(1-\sin\frac{\pi a}{4r}\right)^4}{\cos\frac{\pi a}{4r}} \tag{2A-2}$$

（実際に村上らが使用したのは、(2A-2)式より精度が劣るとされる西谷ら[4)]が求めた多項式である）

(d)の一様引張を受ける幅 $2r$ で、長さ a の端部き裂付き帯板のき裂の K 値修正係数、

$$F\left(\frac{a}{2r}\right)=\sqrt{\frac{4r}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{4r}}\cdot\frac{0.752+2.02\left(\frac{a}{2r}\right)+0.37\left(1-\sin\frac{\pi a}{4r}\right)^3}{\cos\frac{\pi a}{4r}} \tag{2A-3}$$

（実際に村上らが使用したのは、(2A-3)式より精度が劣るとされる Brown ら[5)]が求めた多項式である）

ならびに、(b)の修正係数（図 2A-1 中の表）を多項式近似した

$$\begin{aligned}F(\beta,\lambda)=&\left(1.122-0.230\beta-0.901\beta^2+0.949\beta^3-0.280\beta^4\right)\\&\times\left(1.0+0.157\tilde{\lambda}-0.634\tilde{\lambda}^2+4.590\tilde{\lambda}^3-6.628\tilde{\lambda}^4\right)\end{aligned} \tag{2A-4}$$

から、$a/2r$ として 0～0.25 の範囲で 0.01 きざみ、a/b として 0～1.0 の範囲で 0.1 きざみに(a)の面外曲げを受けるシャフトに存在する半楕円表面き裂最深部の K 値修正係数表を与えており、精度は 10%以下と示している（この 10%以下という根拠は曖昧であり、希望的数値であろう)。

そこで、図 2A-2 と同様、面外曲げを受ける角柱（シャフトに外接する）に存在する表面き裂の K 値で近似できるとして、本文(1.81)式の Newman＆Rajue 式より、(a)の面外曲げを受けるシャフトに存在する半楕円表面き裂最深部の K 値修正係数を求めた。その結果を図 2A-3 中実線で示す。アスペクト比が 0.4 以下の偏平な半楕円表面き裂の場合には、村上らが求めた K 値と、曲げを受ける角柱に対してのものとほぼ一致しているが、アスペクト比が 0.6 以上のき裂に対しては、後者の方が村上らによるものより小さな K 値を与えている。なお、図中にはアスペクト比が 0.6 の場合に関して幅が無限大の場合（面外曲げを受ける半楕円表面き裂付き幅広試験片）についての結果も短点線で示している。

上記の結果からは、表面き裂付きシャフトに面外曲げが作用した場合の K 値は村上らの結果の方が妥当なのか、面外曲げを受けるシャフトに外接する角柱の表面き裂問題として Newman & Rajue 解で近似する方が良いのかの判断が出来ない。

そこで。半楕円表面き裂付き平板（幅は無限大）に対して、Maddox 流の近似が成立するか否かを検討する。すなわち、面外曲げを受ける表面き裂付き広幅平板のき裂最深部の K 値が、一様引張応力を受ける表面き裂付き広幅平板のき裂最深部の K 値を、き裂最深部を含む板断面に面外曲げが作用した場合の K 値で乗じ、同板断面に一様応力が作用する場合の K 値で除したものと等しくなっているか否かを検討した。図 2A-5 にその結果を示す。横軸はき裂深さ a を板厚 t で除した無次元き裂深さである。図中黒色の線は、一様引張応力を受ける表面き裂付き広幅平板の Newman & Rajue 式を、面外曲げを受ける片側端部き裂付き帯板の K 値、すなわち(2A-2)式（ただし $2r=t$）で乗じ、一様引張を受ける片側端部き裂付き帯板の K 値(2A-3)式)で除したものである。

一方赤色の線は面外曲げを受ける表面き裂付き広幅平板のき裂最深部 K 値を Newman & Rajue 式で求めた結果である。本結果より、き裂深さが浅い場合には Maddox 流の近似が成立

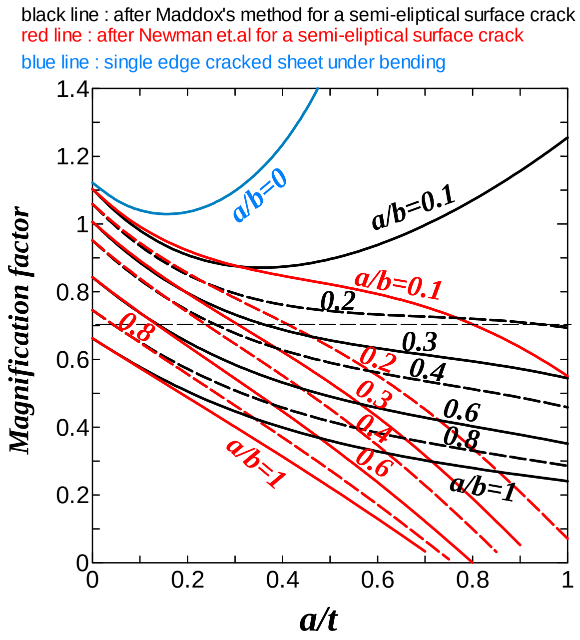


図 2A-5 面外曲げを受ける表面半楕円き裂付き幅広平板のき裂最深部の SIF に関し、Maddox 流の近似法を適用した結果

するが、き裂が深くなると Maddox 流の近似は精度が極めて悪くなることが理解できる。また Maddox 流の近似が成立する無次元き裂深さはアスペクト比が大きくなるほど浅くなっており、図 2A-3 での結果と良く対応している。すなわち、Madox 流の補正は、応力集中など局部的に応力が変化している問題に対してのものであり、引張問題から曲げ問題を類推するという公称応力分布が異なるような場合には適用範囲を拡大することは出来ないことになる。

図 2A-2 ならびに図 2A-3 の結果より、半楕円表面き裂付きシャフトに面外曲げが作用する場合においても、シャフトに外接する角柱に半楕円表面き裂が存在し、それに面外曲げが作用する問題に近似できると判断できよう。

したがって、引張と面外曲げの受ける表面き裂付きシャフトのき裂最深部の *K* 値は、シャフトに外接する角柱問題として近似し、Newman & Rajue 式で求めた *K* 値と、最深部を含む断面に引張と面外曲げが作用する場合の *K* 値（引張に関しては(2A-2)式、面外曲げに関しては(2A-3)式で *K* 値を求め、両者を加えた値）を比較し、小さい方の値を採用することで近似できることになる。

シャフト中の埋没欠陥から表面き裂への成長過程の *K* 値変化も、板幅を板厚と同じとすれば 5 章の取り扱いをそのまま採用して推定できることになる。

付録 2A 参考文献

1) Committee on Fracture Mechanics：STRESS INTENSITY FACTORS HANDBOOK Vol.2, The Society of Materials Science, Japan, Y. Murakami Ed in Chief, The Society of Materials Science, Japan & Pergamon Press, (1987)

2) Y.Murakami and H.Tsuru：Stress-Intensity Factor Equations for a Semi-Elliptical Surface Crack in a Shaft under Bending, STRESS INTENSITY FACTORS HANDBOOK, Soc. Mater. Sci., Japan, (1986)

3) S.J.Maddox: An Analysis of Fatigue Crackc in Fillet Welded Joint, The Welding Institute E/49/72, (1972)

4) H.Nisitani and K.Mori：Influence of Supporting Conditions on Stress Intensity Factors for Single-Edge-Cracked Specimens under Bending, Technology Reports of Kyushu Univ. , Vol.58, No.5(1985),p.751-755

5) W.F.Brown, Jr. and J.E.Srawley, Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Materials, ASTM=STP No.429(1966), p.12

第３編 新しい疲労き裂伝播則

－応力集中場におけるき裂発生から大きなき裂に至る疲労寿命推定法－

まえがき

第 1 編 2 章で説明したように、実働荷重下に於いてき裂発生から任意の大きさに至る疲労寿命を推定できる一応の目処が得られている。このアルゴリズム確立に当たり解析の簡便さを考え、疲労き裂伝播試験では中央貫通き裂形ディープノッチ試験片が用いられてきた。そこでは、新しいき裂面が形成されるなど新しい状態になるためには塑性仕事が必要であり、疲労き裂が伝播するには最大荷重において引張塑性域、最小荷重において圧縮塑性域が形成されることが必要との考えから検討された疲労き裂伝播則の妥当性が検証されている。疲労き裂は、辷り帯に生じる”突き出し・入り込み”のせん断き裂として発生し、辷り線に沿って進展すること、ならびにせん断き裂状態では、最小荷重時は勿論のこと最大荷重時においてもき裂は閉口したまま進展している [1] ことが判明している。そこで、転位論的考察からせん断き裂が最初の結晶粒界に到達後、結晶方位の関係からその向きを変えることによって開口モードが現れ始めると仮定した取り扱いと、上記伝播則を組み合わせて最初の結晶粒内でのせん断き裂の成長曲線を推定する試みがなされた [2]。そして、その妥当性が、切欠付き超薄板試験片を用いて確認されている [3]。

これにより、健全な応力集中部から発生・伝播する疲労き裂成長曲線を、発生と伝播を区別することなく推定することに世界で初めて成功している [3)、4)]。この２次元問題を拡張して、表面き裂問題に適用するため、き裂成長に伴う K 値変化が同じならば、同じ疲労き裂発生・成長曲線が得られると破壊力学的に考察できるので、この K 値変化を無限板の直線き裂に再現する応力、すなわち等価分布応力概念が導入されている [5]。単位外力ならびに残留応力による等価分布応力をそれぞれ求め、このもとでの疲労き裂発生・成長シミュレーション（任意分布応力下におけるシミュレーション・プログラムを FLARP (Fatigue Life Assessment by RPG load)(RPG load: Re-tensile Plastic zone's Generating load)と称している）が実験結果と対比する形で行われた [6]。そして、このアルゴリズムの理解を深めることと、その発展のため著者が主宰となり FLARP 研究会が組織され、4 年間研究教育活動が行われた [7]。そこでは、部分片振引張を受ける面内および面外ガセット試験片、部分片振引張を受けるビードオンプレート試験片、両振り面外曲げを受けるブラケットを有するタンクコーナモデル試験体、片振り曲げ荷重を受けるパッド付き I ビーム試験体、および片振り引張荷重を受けるビードオンプレート試験片を用いた検討が行われた。前 4 者には一定振幅荷重、後 2 者には一定振幅荷重に加えてブロック・ランダム荷重が与えられた。FLARP はこれらの実験結果を定量的に妥当にシミュレートしていることが確認されている。

上記の FLARP では、仮想き裂を含めてき裂部を細かく分割し、分割された区間には一様応力

が働くとして階段状応力分布下でのき裂開閉口問題を取り扱っている。そしてき裂面の一部に一様圧力が作用した場合のき裂開口量の計算で現れる積分はガウスの 10 点公式により行なわれている。したがって精度を要求すると分割を細かくしなければならず、計算時間が膨大になる。しかし、FLARP のアルゴリズムを理解するのに適している。そこで本編では、繰返し負荷中に生じる物理現象の説明に加えて、分割要素内では一様な作用応力が働く問題を重ね合わせることにより、任意応力分布が働く場合を表現した FLARP に関わる問題も説明する。

すなわち、本編では、現時点では世界的にはまだ知られていないが、実働荷重下において疲労き裂の発生から伝播にいたる挙動を机上でシミュレートできる世界で始めてのアルゴリズムを説明すると同時に、それを構造物に適用する手法について解説する。

1.　繰返し荷重１サイクル中のき裂材コンプライアンス変化について

Elber[8)]あるいは菊川ら[9)]は、コンプライアンス変化からき裂開口点を決定しているが、き裂材がどのような基本挙動をしているかの考察をしていない。以下は巨視的観点から、1 サイクル中に生じるき裂材の挙動を捉え、その挙動に対応して、どのようなコンプライアンス変化が生じるか

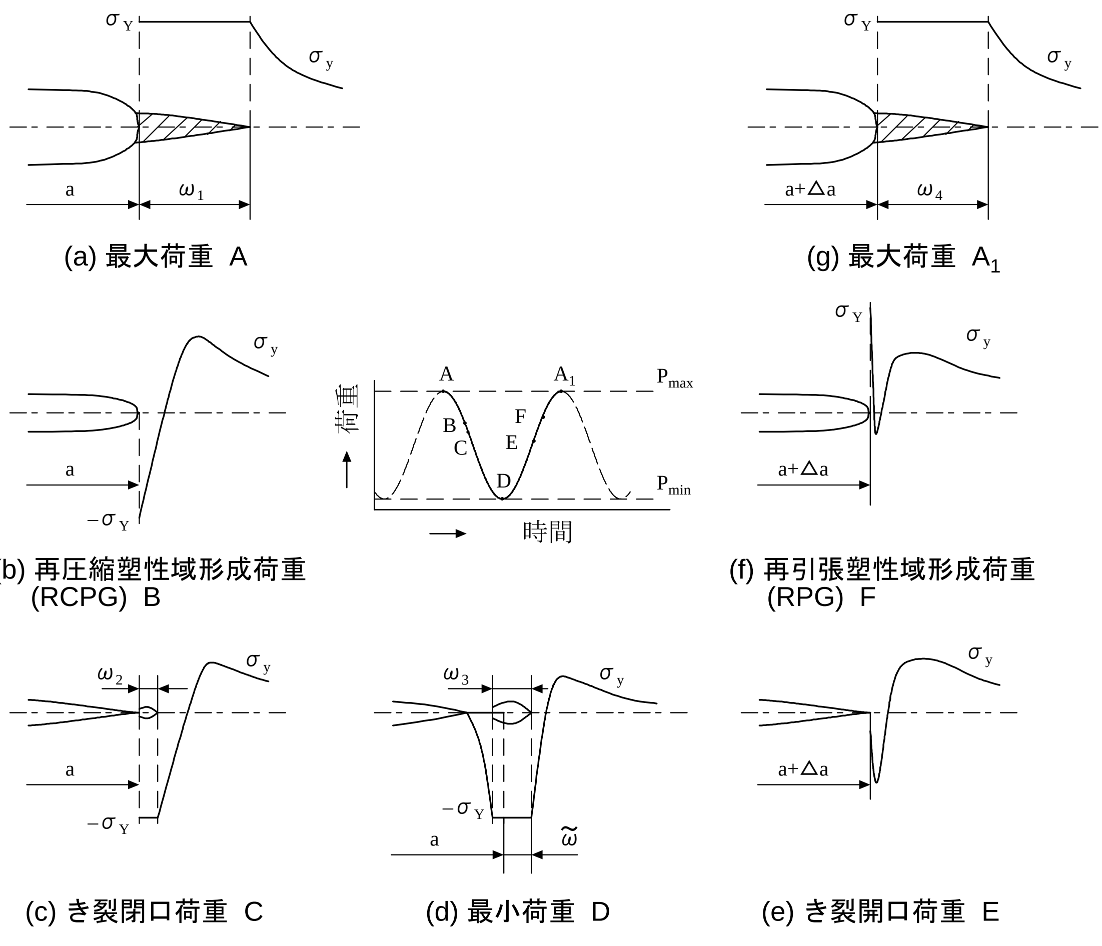


図 1.1　定常き裂伝播中の１サイクル中におけるき裂先端近傍の挙動（説明図）

を考察[10])したものである。

1 サイクル中に疲労き裂先端近傍で、どのような現象が現れるかを、図 1.1 に模式的に示す。また、き裂前方における任意の点での、き裂線に垂直な方向のひずみと荷重の巨視的な関係を図 1.2 に示す。図 1.1 中のき裂線垂直方向応力 σ_y は材料が弾完全塑性体で、き裂線上においてき裂線直角方向にしか応力が作用しない、すなわち単軸応力状態にあると理想化した場合が示されている。

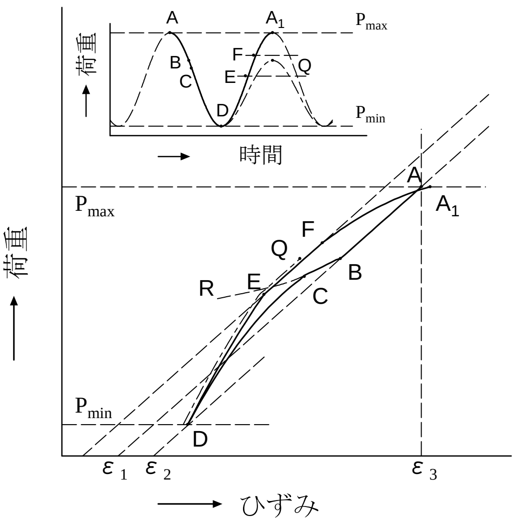


図 1.2　1 サイクル中のき裂先端近傍におけるき裂線垂直方向ひずみと荷重の関係（模式図）

最大荷重 $P_{\max}$ 時き裂が開口している場合を考える。この時、き裂先端には、引張塑性域(塑性域寸法 ω_1)が形成されている(図 1.1(a))。この状態から除荷されると、き裂前方のリガメント全体が弾性状態(ω_1 の部分は除荷弾性域)になる。き裂が開口したままで弾性状態のため、応力集中が非常に大きくなり、圧縮塑性域が生じだす。圧縮塑性域が、き裂先端に生じ出す瞬間(図 1.1(b))の荷重は、再圧縮塑性域形成荷重(Re-Compressive Plastic zone's Generating load)という意味から RCPG 荷重 P_{RCPG} と名付けられている。

$P_{\max}$ から P_{RCPG} に至る除荷過程では、リガメント全体が弾性状態となるので、巨視的には任意点でのひずみは荷重に対して線形的に変化する。このため、き裂前方のひずみは、図 1.2 で A→B と線形的に小さくなる。

P_{RCPG} からさらに除荷すると除荷の進行につれて、き裂先端で圧縮塑性域が発達する。この除荷過程では、圧縮塑性変形のため、き裂の変位減少量は大きくなる。そのため、除荷が進行すると、Elber が指摘したように (2 編 3.2.1 項参照)、前段階までにき裂縁に取り込んだ残留引張変形層の影響により、き裂先端が閉口し始める。この時の荷重が、き裂閉口荷重 P_{cl} (図 1.1(c))であり、圧縮塑性域寸法は ω_2 となる。外荷重がたとえ部分引張片振状態であったとしても、き裂先端では、高応力集中のため両振応力状態になり、除荷過程での圧縮塑性域の成長は負荷過程のそれよりかなり小さくなる。P_{RCPG} から P_{cl} に至る除荷過程では、圧縮塑性域がき裂先端で成長するため、リガメント全体が除荷弾性状態となっている $P_{\max}$ から P_{RCPG} に至る過程より(ひずみ計測箇所が、完全弾性域であったとしても、塑性域形成による応力再配分のため)、ひずみ変化は大きくなり(すなわち、コンプライアンスが大きくなり)図 1.2 上では B→C へと変化する。すなわち、塑性域はコンプライアンスを大きくする働きをしている。もし、その後も除荷過程でき裂閉口が生じなければ、図 1.2 上で B→C→R と移動することになる。この場合、き裂先端から離れるに従い、塑性域

形成に伴い生じる応力再配分による応力増分は小さくなるので、き裂先端に近い箇所でひずみ計測をする方が、コンプライアンスの微小な変化を検出しやすいことになる。

P_{cl} からさらに除荷（圧縮側負荷）すると、除荷につれてき裂閉口域が発達する。$P_{\max}$ から P_{cl} に至る除荷過程ではき裂は完全に開口しているため、き裂部では荷重を受け持たないが、き裂が閉口するとそのき裂面も荷重を受け持つことになる。このため、見掛け上のリガメントが除荷とともに増加し、ひずみ変化が小さくなり(コンプライアンスが小さくなり)、図 1.2 の BCR 曲線から外れて C→D へと軌跡を描き最小荷重 D に至る（この時き裂前方に形成される塑性域寸法を $\tilde{\omega}$ とする)。

したがって、BCD 曲線での変曲点(C)がき裂閉口荷重 P_{cl} となる。P_{cl} から最小荷重 $P_{\min}$ に至る過程では、き裂面も荷重を分担するため、圧縮塑性域の成長速度は P_{RCPG} から P_{cl} に至る過程よりも遅くなり、場合によっては圧縮塑性域の成長が停止する。そして $P_{\min}$ 時には、場合によっては(最小荷重が大きな圧縮となるような場合など)、き裂面にも圧縮塑性域が形成されることになる。ただし、き裂閉口域の成長より圧縮塑性域の成長が速くなると、コンプライアンスが大きくなり、CD 間にも変曲点が生じることになる（この現象はまだ確認されていない。したがって、き裂閉口域に圧縮塑性域を形成させるには、非常に大きな圧縮荷重を作用させる必要があると考察される。)。

$P_{\min}$ より引張側負荷過程に入った直後は、き裂閉口域およびリガメント全体が再び弾性状態になる。この場合き裂閉口箇所は周りから拘束されていないため容易に開口し、負荷とともにき裂閉口域が小さくなっていく。そのため、荷重を受け持つ領域が負荷とともに小さくなり、コンプライアンスは大きくなる。ただし、C→D の除荷過程では圧縮塑性域が存在していたが、D→E の負荷過程では全体が弾性挙動をする、すなわち塑性域が存在しないので、 C→D の除荷過程より見掛け上のコンプライアンスは小さくなる。その結果、図 1.2 の D→E という軌跡を描く。そして、この過程の最終段階 E でき裂は完全に開口する(き裂開口荷重 P_{op})。

き裂が開口した時点では、その瞬間までき裂先端が応力集中源として働いていなかったために、リガメント全体はまだ弾性状態にあり、き裂先端には圧縮応力が作用している可能性が大きい。いずれにしてもこの段階では、リガメント全体は弾性状態に保たれている。半サイクルでのき裂進展は、極微小であるから、 A→B におけるリガメントとほぼ同じ大きさのリガメントとなっている。したがって、応力分布におよぼすき裂尖鋭度の影響を無視すれば、き裂開口直後の負荷過程において、A→B と同じコンプライアンスを保持することになる。そのため、巨視的には、図 1.2 において AB と平行な E→F という軌跡を描く。

き裂先端に、再び引張塑性域が形成される瞬間 F 点の荷重(Re-tensile Plastic zone's Generating load)は、RPG 荷重 P_{RPG} と呼ばれている。 P_{RPG} よりさらに負荷すると、負荷とともにき裂先端で

引張塑性域が成長するため、これに対応してコンプライアンスが大きくなり、図 1.2 で F→A_1 という軌跡を描く。A から A_1 の 1 サイクルでは、き裂成長は極微小であるから、A と A_1 はほとんど一致する。

2. 新しい疲労き裂伝播方程式

2.1 塑性仕事が消費される領域寸法を規定するパラメタ

新しくき裂が生じるためには、塑性仕事がなされることが必要条件になる。そしてき裂の進展速度は直感的には、1 サイクルの間に塑性仕事がなされる領域寸法 $\tilde{\omega}$ に律せられていると考えられる。しかし、繰返し負荷中に $\tilde{\omega}$ を計測することは難しく、少なくても現時点では計測出来ない。1 章でき裂先端近傍に現れる現象と巨視的なコンプライアンス変化の関係が詳しく考察された。ここで、図 1.2 中の上図に示すように、最小荷重 D 点から、 RPG 荷重 F 点より低い最大荷重 Q を有する、一点鎖線で示す荷重サイクルがその後続く場合を考える。

1 章での考察から明らかなように、DF 間は全ての箇所で弾性状態にあるので、F 点より低い最大荷重（Q 点）を持つ荷重サイクルが以後作用すると、巨視的挙動としては、図 1.2 で Q→E→D→E→Q を繰返しすのみである。したがって、このような荷重が繰り返えされても、き裂先端部に、塑性ひずみ(plastic strain)は現れず、非可逆なひずみエネルギーは蓄積されない。塑性ひずみエネルギー(plastic strain energy)の蓄積がなければき裂は伝播しないと考えられるから、F 点すなわち RPG 荷重を超える荷重が、き裂伝播を生じさせる力として働くはずである。すなわち、き裂進展力に対応する荷重振幅は、負荷過程においてき裂先端部で再降伏が生じ始める RPG 荷重から最大荷重に至る荷重振幅$\left(=P_{\max}-P_{RPG}\right)$となる。

すなわち、P_{RPG} から $P_{\max}$ に至る過程で、き裂先端近傍で塑性仕事がなされ、これが非可逆現象である新しい破面形成のために充当されると考えることができる。これらの観点から、以下の疲労き裂伝播則が、著者らによって提案された [10)]。

$$\frac{da}{dN}=C\left(\Delta K_{RP}\right)^m=C\left(\tilde{U}\Delta K\right)^m \tag{2.1}$$

ただし、

$$\Delta K_{RP}=\left(P_{\max}-P_{RPG}\right)\sqrt{\pi a}\,f$$

$$\tilde{U}=\frac{P_{\max}-P_{RPG}}{P_{\max}-P_{\min}}=\frac{K_{\max}-K_{RPG}}{K_{\max}-K_{\min}}$$

ここで、

ΔK_{RP} ：き裂先端に引張塑性域が生じている間の、荷重範囲に対応する応力拡大係数範囲（RPG 基準による有効応力拡大係数範囲: effective stress intensity factor range based upon RPG load）

$P_{\max}$ ： 最大荷重(maximum load)

$P_{\min}$ ： 最小荷重(minimum load)
P_{RPG} ：RPG 荷重(RPG load
$\tilde{U}$ ：塑性有効荷重比(effective load range ratio due to plastic work)
$K_{\max}$ ：最大荷重時の応力拡大係数(stress intensity factor at maximum load)
$K_{\min}$ ：最小荷重時の応力拡大係数(stress intensity factor at minimum load)
K_{RPG} ：RPG 荷重時の応力拡大係数(stress intensity factor at RPG load)
f ：修正係数(magnification factor)
a ： き裂長
C, m ： 材料定数

き裂が進展している段階では、大きな圧縮残留応力場を除いて $P_{\min}<P_{op}<P_{RPG}<P_{\max}$ なる関係がある（1 章参照）ので ΔK_{eff} には、P_{op} から P_{RPG} なる荷重区間と、P_{RPG} から $P_{\max}$ に至る荷重区間が負荷過程で存在する。前者の荷重区間では、1 章の考察から明らかなように弾性変形しかしないので、この間になされる仕事（弾性ひずみエネルギー）は可逆現象（弾性的な変形）に使われるはずである。また、後者の荷重区間では、上述のように、き裂先端近傍で塑性仕事がなされ、このひずみエネルギーは非可逆現象のために充当されるはずである。すなわち、ΔK_{eff} は、新しい表面形成に必要な非可逆なエネルギーだけでなく、弾性変形という可逆的エネルギー(reversible energy)に関連する成分までを含んだパラメタであるが、ΔK_{RP} は、塑性ひずみエネルギー、自由表面エネルギーならびに音などの非可逆な現象に費やされるエネルギーだけを規定するパラメタと考えることができる。

なお、ΔK_{RP} は間接的に、き裂先端前方で、引張・圧縮の塑性ヒステリシス挙動を示す領域の寸法、すなわち、疲労被害が生じる領域寸法を規定していることが後述のシミュレーションで示されている。

2.2　RPG 荷重の測定とその重要性

2.2.1　疲労試験システム

き裂前方の任意の点におけるひずみと荷重の関係が、1 章の巨視的考察から、図 1.2 に示したようになることが分かる。しかし、実際には、2 編図 3.23（以後、単に図 3.23 のように二本線のアンダバーを引き、第 2 編であることを表す）などの結果から分かるように、ひずみ増幅が十分でないために、ひずみゲージから直接計測される荷重－ひずみ曲線上では、負荷過程と除荷過程の差を判別することは困難である。負荷過程と除荷過程の差を明確にするためには、ひずみ出力を増幅すれば良い。しかし、増幅器の基準電圧以上には増幅できないので、あまり増幅率を上げられない。

菊川ら [9]の引算回路(図 3.21 参照)を参考にし、引算後のひずみを高倍率で拡大できる回路が、Chen ら [11]により試作されている。Chen らの回路には、ノイズ対策のため、随所にコンデンサーが配置されており、ひずみ出力と荷重出力の間に位相差が生じる。そのため、計測時には 0.1Hz

という準静的な負荷速度まで、負荷周波数を低下させることが必要であり、吐出量の小さい疲労試験機では周波数が変動すると荷重が変化するため、高精度の一定振幅荷重疲労試験は行えない。図 2.1(1)は、基本的には、Chen らが用いた回路から、コンデンサーを除いた回路図であり、その原理（特定点での出力関係）は図 2.1(2)に示されている。

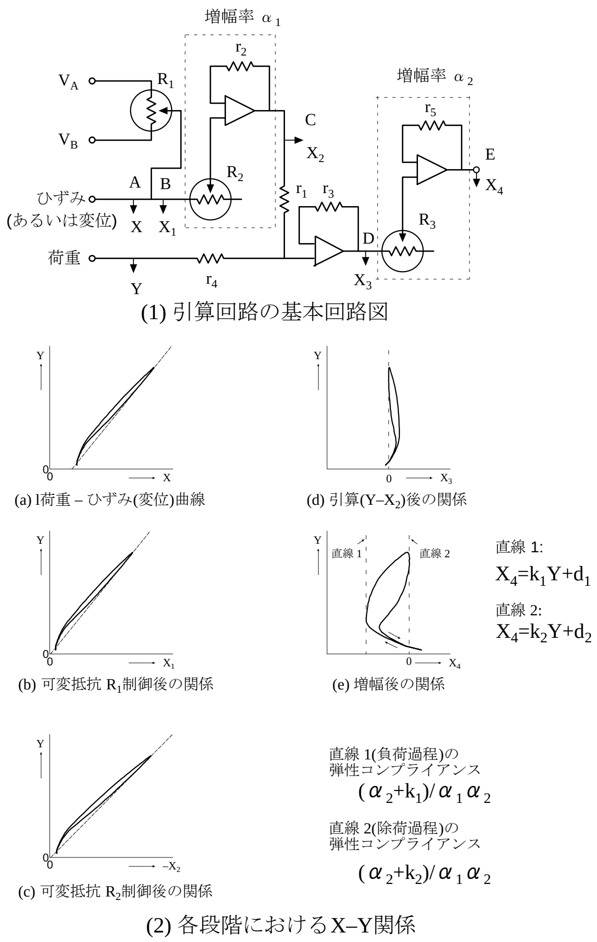


図 2.1　微小コンプライアンス変化計測のための引算回路とその原理の説明図

すなわち、図 2.1(2)の(a)は、通常のひずみ増幅器を通した後の、ひずみ出力電圧 X と荷重出力電圧 Y の直接的な関係であり、図 3.22(a)に相当する（この場合、P_{max} と P_{min} 間のひずみ出力差が、負荷過程と除荷過程のひずみ出力差より、圧倒的に大きいので、負荷過程と除荷過程の差は、ほとんど現れない)。なお、図中の点線は除荷弾性線を表している。一定電圧に保たれている V_A 端子（+10volt）および V_B 端子（−10volt）の間に挿入された可変抵抗部からの出力電圧(−10～+10volt)をひずみ出力電圧に加え、図 2.1(2)(b)に示すように、除荷弾性線が原点を通るように可変抵抗 R_1 を調整する(ここで、回路内で B 点と示したところの電位を X_1 とする)。さらに、この出力電圧 X_1 を反転増幅回路に通し、その回路内の可変抵抗を調整して得られる出力 X_2 を等値逆符号としたものが、除荷弾性域の部分で荷重からの出力電圧とほぼ等しくなるようにする。この時の出力電圧 X_2 は C 点で計測でき、荷重出力電圧との関係は図 2.1(2)(c)のようになる。

このように処理した後、出力電圧 X_2 と荷重出力電圧 Y を加える回路(引算回路)を通すと、1 サイクル中において、ほとんど 0volt となる出力電圧 X_3 が得られることになる。この時の荷重出力電圧 Y との関係は、図 2.1(2)(d)のようになる。このようにすると、出力電圧 X_3 はほぼ 0volt になっているから、回路の基準電圧を超えない範囲で非常に大きな増幅が可能になる。

そこで、この出力電圧 X_3 を反転増幅回路に通すと、荷重出力電圧 Y との関係が図 2.1(2)(e)のようになる。ここで、反転増幅回路が用いられているのは、単なる増幅回路よりもノイズが低減されるためである。また、少なくとも R_1、R_2 の可変抵抗は、最適値に調整する必要がある。これを Chen らが行ったように手動で行うと、疲労試験中常に 1 人が張り付いたままになり可変抵抗のボ

リュームを調整しなければならず大変な労力を要する。そこで、可変抵抗には全てステッピングモータを直結し、上記の結果が得られるように、可変抵抗値の制御をパーソナルコンピュータで行うシステムが開発された [10]。ここで R_1、R_2 の値は、回路出力の方程式を解くことにより得られ、以下の関係式になるように、制御されることになる。

$$R_2 = \frac{C}{aD} \tag{2.2}$$

$$R_1 = \frac{A - B + bDRR_2 - \sqrt{\left(A - B + bDRR_2\right)^2 - 4bDRR_2}}{2bDR_2} \tag{2.3}$$

ただし、R ： R_1 部の可変抵抗の全抵抗値

$A = V_A r_2 r_3 / r_1$

$B = V_B r_2 r_3 / r_1$

$C = r_2 r_3 / r_1$

$D = r_2 / r_4$

a, b ：除荷弾性域において、図 2.1 の回路に入力する前の荷重出力 Y とひずみ出力 X の関係が $Y = aX + b$ と表される場合の係数（図 2.1(2)(a)参照）

V_A, V_B ： R_1 の可変抵抗の両端に与える定電圧

また、R_3 の制御は、増幅後回路の基準電圧を超えないようにすれば良い。

この場合、引算回路に入力されるひずみ出力および荷重出力電圧にノイズが含まれていると、それまで大きく拡大されることになる。ノイズ対策は、Chen らが採用しているように、回路にコンデンサーを挿入することが一般的であるが、コンデンサーを挿入すると、ひずみ出力を加工した X_2 電圧と荷重出力電圧に位相差が生じ、意図した計測が高繰返し速度下の試験では得られない。

そこで、回路のシールドを完全に行うと同時に、荷重測定用ならびにひずみ測定用のひずみゲージを結線した動ひずみ計の計測レンジを、計測されるひずみレンジに合わせて常に最小レンジとするよう、動ひずみ計の計測レンジのつまみと 0 シフトのつまみにもステッピングモータを直結し、パーソナルコンピュータで制御して相対的にノイズを最小にすることが行われている（荷重測定を試験機内蔵のロードセルで行うと、荷重制御のためのノイズが乗ることがあり、試験機のロードセルを用いてコンプライアンスを計測するのは好ましくない)。

また、き裂先端に近いほどひずみ変化は大きくなり、コンプライアンス変化を精度良く検出できることが明らかであるので、ひずみゲージをき裂線上に密に貼付し、き裂の進行に応じてパーソナルコンピュータで自動的に、き裂先端に最も近くかつ生きているゲージを選択する制御システムが使用されている。

一方、荷重とき裂前方の任意点におけるひずみ（あるいは荷重点変位、またはき裂開口変位）より得られる除荷弾性コンプライアンスは、試験片形状・寸法が定まればき裂長さの関数として与えられるので、あらかじめこの関係をビーチマーク法で求めておき、除荷弾性コンプライアンスを計測すれば on-line でき裂長さが測定できる。そして、ファンクション・ジェネレータで負荷

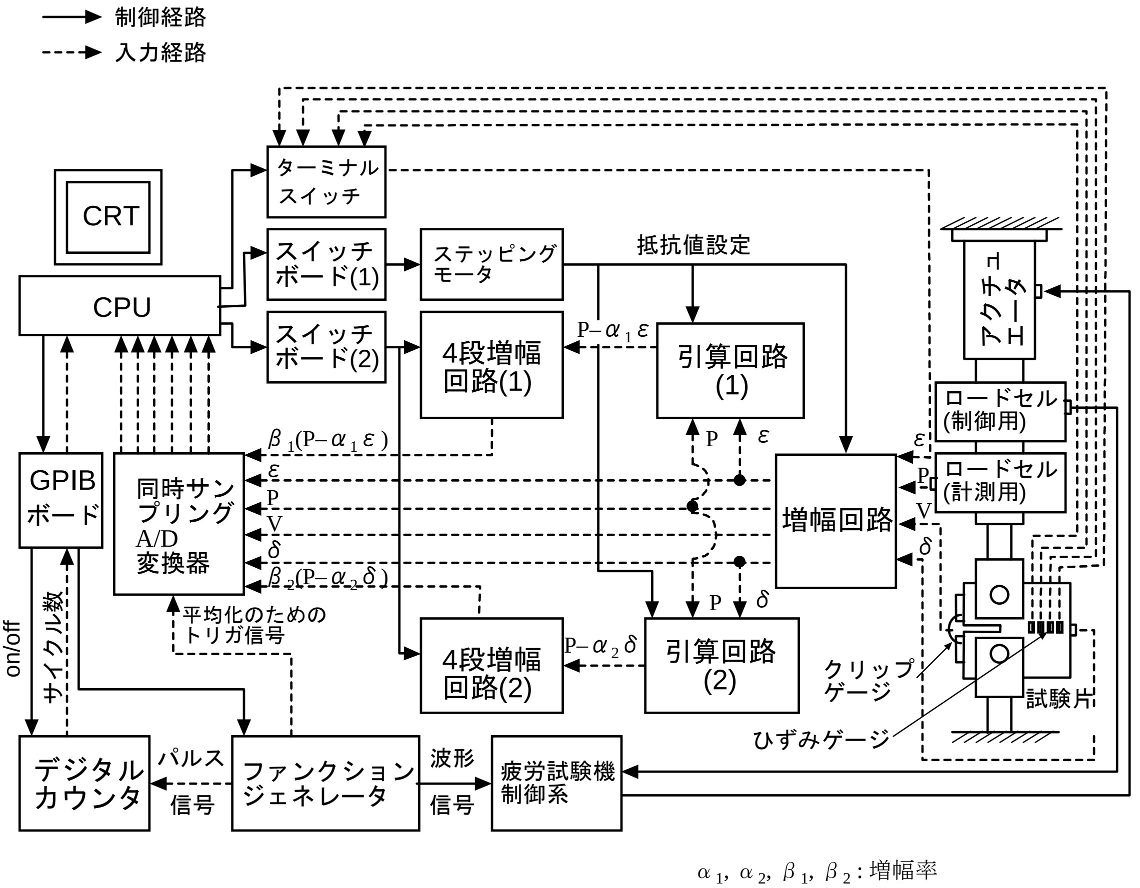


図 2.2　高精度コンプライアンス計測装置を組み込んだ疲労き裂伝播試験システム

波形を与えることにすれば、パーソナルコンピュータで種々の負荷が与えられる。

上記の種々の計測および制御ができるシステムが構築されている。そこでは、個々のデータ取込みに時間差が生じないよう、8 点同時サンプリング A/D コンバータを介して、データはパーソナルコンピュータに入力されるようになっている。

その疲労試験システム(automatic fatigue crack propagation testing system)*のハード面の概要は、図 2.2 に示したとおりである。ソフト面では、データ取り込みに際してその開始時期を、発振パルスに同期させるように配慮されている。さらに、A/D コンバータの制御命令により、アベレージングができるようにし、非同期ノイズは消去できる機能も付加されている。

図 2.3 は 15Hz の繰返し負荷を与えた CT 試験片の疲労き裂伝播試験時に、この疲労試験システムを適用して計測された引算回路からの出力と荷重出力のオシログラフ上の関係を、直接写真撮影した例である。このように、荷重振幅が大きい場合についてではあるが、試験中にブラウン管上で綺麗なヒステリシスループを得ることが出来る。

長崎大学では図 2.1 の引き算回路を用いないで、汎用計測器でひずみと荷重を計測し、計算機

* 本回路を改良した、高精度コンプライアス測定装置は、菱明技術研(株)(TEL 082-233-1450)から販売されている。

のなかで、図 2.1 の引き算回路に相当する処理を施し、図 2.3 に相当するヒステリシスループを求めている [12]。その計測システム（図 2.4 参照）は以下で構成されている。

- 高精度引張圧縮両用型ロードセル（±100kN）
  定格出力：4000.5×10^{-6}、-4000.2×10^{-6}（$\pm40\times10^{-6}\pm0.1$%）、非直線性：0.01%RO(±0.02%RO)、ヒステリシス： 0.01%RO(±0.02%RO)
- パソコンから操作するデジタル型動ひずみ計（10ch）
  オートレンジ(1～1/16、5 種)、感度 1×10^{-6} ひずみ(ブリッジ電圧 2Vrms 時)、AD 分解能：12bit、16bit、サンプリング速度：1～32767ms、0.2～0.9ms、0.5、0.01ms
- 高密度ひずみゲージ（間隔 1.5mm、ゲージ長 2 および 4mm、5 ないし 10 連）

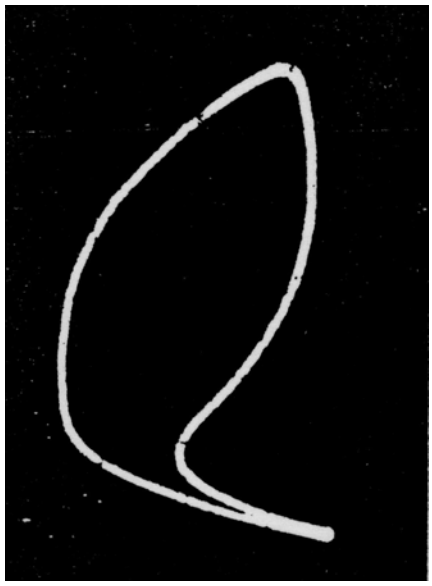


図 2.3　引算回路を通して得られたヒステリシスの一例（ブラウン管上）

疲労試験機は、パソコンからデジタル制御される一般的な電気油圧サーボ式疲労試験機である。高精度ロードセルは、疲労試験機の荷重制御用とは別途、試験片載荷軸内に設置されている。その理由は、疲労試験機の制御用ロードセルの出力が、制御装置の中に取り込まれた後に外部出力端子から出力されるようになっており、出力に制御装置内のノイズが含まれている可能性が高いためである。

高密度ひずみゲージは、メーカーに特別に注文して作成させたものである。仕様は 1 軸ゲージと同じものであるが、疲労き裂先端の開閉口挙動を、できるだけ高感度で計測するために、1 枚

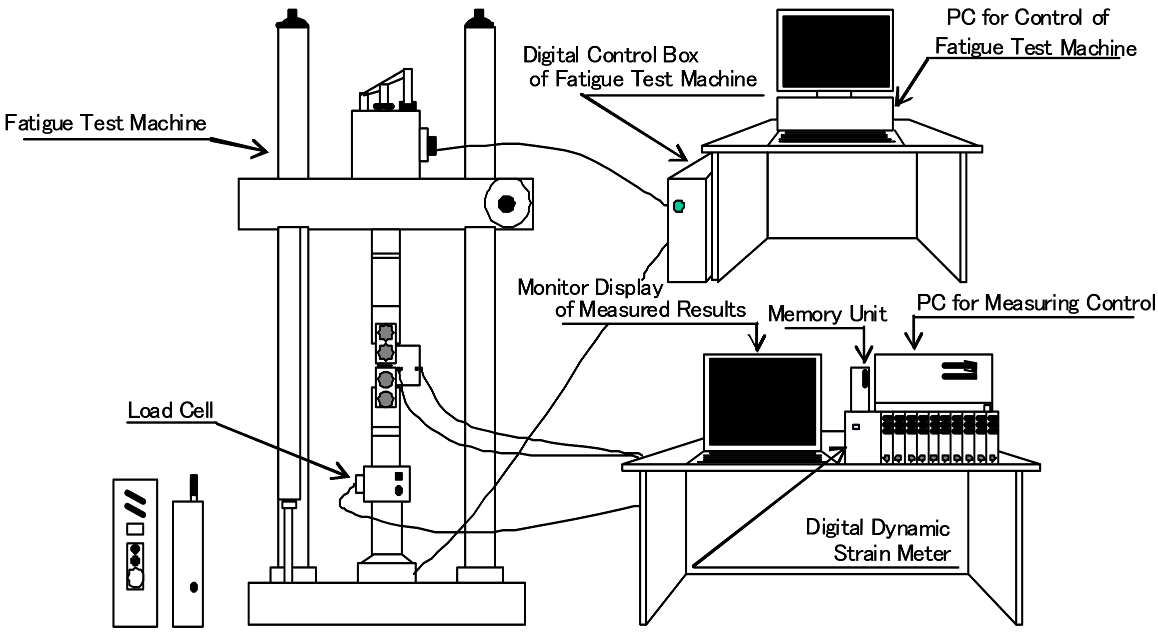


図 2.4　疲労き裂先端近傍ヒステリシスループ計測システム概要

のベース上にゲージ長２mm の５枚分のグリッドを蒸着した図2.5に示すひずみゲージである。

　なお、メーカー試作により、１軸ゲージのグリッド幅 0.84mm（ベース幅 1.4mm）に対して、１枚のベース上のグリッド間隔は 1.5mm としている。ゲージ間隔を出来るだけ狭くして高感度測定ができるように目論んだが、上記以上密に蒸着させると 120Ω の抵抗値を保障できなかったことから上記の仕様になっている。

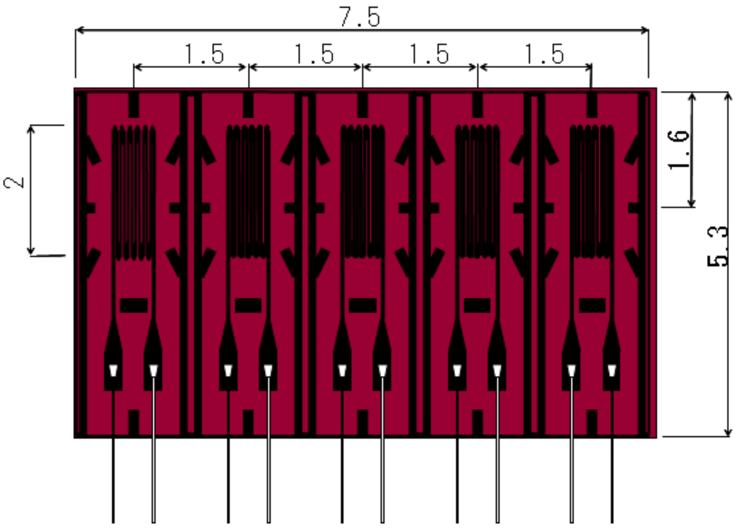


図 2.5　き裂先端近傍のヒステリシスループを効率よく計測するために作成されたひずみゲージ

　上記の特注された１枚のベースに５枚のグリッドを蒸着したひずみゲージのゲージ長は２mm である。そのため、き裂伝播予想経路から±１mm 以上逸れる可能性が生じた時点でき裂伝播試験を中断してその都度、ひずみゲージが貼付され直されている。

　ひずみゲージによるき裂先端近傍のヒステリシスループを計測する場合、最も重要となるのが、ひずみゲージの貼付技能である。疲労き裂先端と一致して、ひずみゲージ、またはゲージのベースが切断されることが重要である。経験的には、季節（特に気温、湿度）、接着剤の不具合などで接着が十分でないことも生じる。例えば、き裂周辺のひずみゲージが剥がれるものの、ひずみゲージは切断されないまま、き裂が進展してしまうことがある。ひずみゲージの貼付には、気温や湿度に応じて試験片の適切な温度管理、接着剤の管理が重要である。ある事例では、一般のひずみ計測を行う試験でかなり大雑把なひずみゲージ貼付が行われ、何を計測しているのかわからない場合も見受けられたことがある。このような状態で貼付された場合には、疲労き裂先端近傍におけるヒステリシスループの満足な計測はできない。

　図 2.6 に、本システムで計測された疲労き裂先端近傍のヒステリシスループの一例を示す。なお、このループは、１サイクル分（載荷速度 10Hz、サンプリングタイム 1msec、荷重、ひずみ同時計測、100 点）の結果であり、

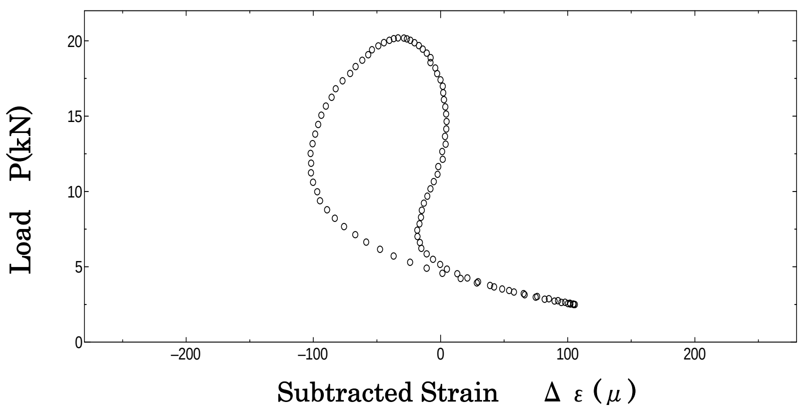


図 2.6　本システムで計測された疲労き裂先端近傍のヒステリシスループの一例

結果のスムージングや複数サイクルの平均化はされていない。

2.2.2　RPG 荷重の決定法

図 2.3 や図 2.6 などから分かるように、引算ひずみを大きく拡大すると、線形関係を示す部分が 1 サイクル中に現れない。また除荷弾性状態では、作用ひずみと荷重の間には、巨視的には線形関係が成立するはずであるが、線形関係が 1 サイクル中のどの部分にも認められない。その理由としては、

(1)　き裂鈍化(blunting)の影響

(2)　自由転位の存在

の 2 つが考えられる。しかし、(1)の影響を殆ど受けていないことが、以下の検討で明らかにされている[13)]。

(1)は具体的には、き裂は負荷が大きくなると鈍化し、たとえ弾性挙動をしている場合でも、低い荷重領域における方が、高い荷重領域における場合よりも、き裂先端近傍の応力勾配が大きくなることによる。すなわち、両者の応力分布を、公称応力で除して比較すれば図 2.7 のようになる。ここで、横線でハッチした領域の面積と縦線でハッチした領域の面積は等しくなり、D_2 より前方では切欠尖鋭度の影響は現れず、分布形状はき裂長さのみに依存し、両者は等しい分布となる。この場合、D_1～D_2 間にひずみゲージを貼付すれば、たとえリガメント全体が弾性応力状態であっても、高荷重になるほどコンプライアンスが大きくなり、線形関係が 1 サイクル中に現れなくなる可能性がある。き裂先端から D_2 までの距離はき裂底の曲率半径が大きくなるほど大きくなる。

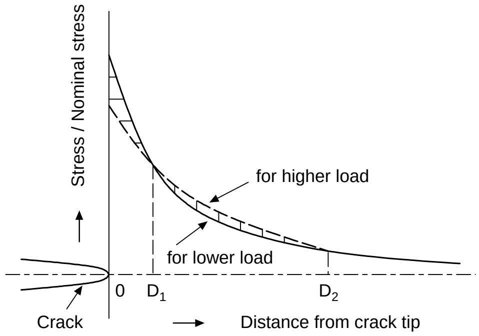


図 2.7　き裂鈍化が弾性応力分布に与える影響（模式図）

計測した荷重線上のき裂開口変位より、(2.2)式の換算式を用いて、図 2.3 を得た時の最大荷重時の CTOD を求め、その 1/2 として曲率半径を与えたもの(0.005mm)、およびその 1/2 の曲率半径(0.0025mm)を有する、き裂を挿入した CT 試験片の 2 case につき、BEM により弾性応力分布が求められている。その結果を図 2.8 に示す。0.1mm き裂先端より離れると、き裂尖鋭度は応力分布に影響を与えていないことが理解される。すなわち、曲率半径の 20 倍程度離れると、弾性応力分布にき裂尖鋭度は影響を与えないことが分かる。

疲労き裂の開口変位は非常に小さいので、小さなき裂を除けば、ひずみゲージを密に貼付し、計測可能なゲージ(ほぼ 5000μ以内)の内で、き裂先端に最も近い位置のゲージを採用しても、き裂尖鋭度の影響範囲外のデータとなる。したがって、き裂鈍化が、図 2.3 で線形関係を有しない

原因にはなっていないことになる。

したがって、(2)の自由転位の存在が、荷重と作用ひずみの間に、弾性域で線形関係が成立しない原因であると考えられている。疲労き裂進展過程では､図 1.1 で説明したように、き裂先端には、引張塑性域および圧縮塑性域が、交互に除荷弾性域を挟んで繰返し現れる。塑性域の成長過程では転位の増殖が起こり、除荷弾性過程では、その大部分が結晶粒界などにくぎづけされるが、一部は自由転位となり、これとくぎづけの弱い転位が除荷弾性域でも運動すると考えられている。これが、図 2.3 で計測されたヒステリシスに、線形部が生じていない原因になっているものと考えられている。

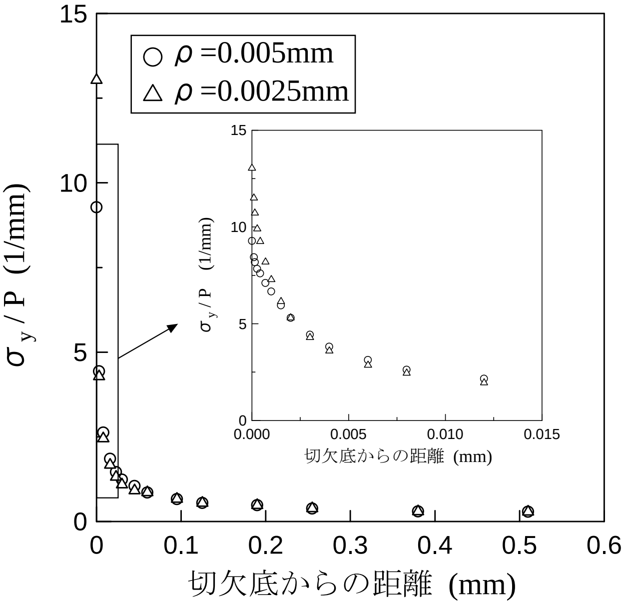


図 2.8　き裂の曲率変化が弾性応力分布に与える影響（BEM による解析結果、○印は最大荷重時の COD から曲率を与えたもの）

最大荷重からの初期の除荷過程では、最小荷重時のような鋭い角度を持つ軌跡が得られていない。塑性変形が進行する過程では転位の増殖が生じる。この時転位はかなり高速で移動し、音速の 1/10 程度まで加速し 100m/ s にも達する[14)]。したがって（繰返し速度が遅い場合にも）除荷の初期には負荷が逆方向となるが、慣性のため、増殖された転位はすぐには移動を停止できないため、塑性変形がある程度進行することになり、膨らんだ形のヒステリシスが得られる。図 2.3 あるいは図 2.6 において最小荷重ではこの現象が生じていないので､除荷過程の最小荷重付近では、除荷の荷重増分はき裂閉口域の拡大のために大部分が費やされ、圧縮塑性域の成長は停止しているものと判断される（圧縮側負荷では、き裂閉口域の成長のために圧縮塑性域の成長が停止する荷重区間があるので、塑性域の大きさと荷重増分とが直接的に関係しないことも生じるので、圧縮側負荷過程の荷重区間を、き裂成長のパラメタとすることは難しい)。

１サイクルで伝播するき裂長は、リガメントの長さに比して十分無視できるほど小さいので、P_{op} から P_{RPG} に至る負荷過程の荷重を受け持つ断面（リガメント）と、その直後あるいは直前の $P_{\max}$ から P_{RCPG} に至る除荷過程でのリガメントはほぼ同じ大きさとなっている。したがって、両者の巨視的なコンプライアンスは等しい。そして、両者に存在する自由転位の総数は、ほとんど同じと考えられるから、上記 $P_{\max}$ から P_{RCPG} に至るひずみ変化と、P_{op} から P_{RPG} に至るひずみ変化は等しいと考えられる。すなわち、P_{op} から P_{RPG} に至る負荷過程でのコンプライアンス変化と、$P_{\max}$ から P_{RCPG} に至る除荷過程におけるコンプライアンス変化は同じとなる。

したがって、き裂が開口している状態での負荷過程における弾性域のヒステリシスと、除荷過程でのき裂開口状態における除荷弾性域でのヒステリシスを、原点に関して対称に反転し平行移動したものが重なることになる。

図 2.9 は、上記の観点から、得られたヒステリシスと反転したヒステリシスとを、重ね合わせた一例を示したものである。ところで、除荷過程の最大荷重から、圧縮塑性域の発生荷重 P_{RCPG} までの荷重振幅($P_{\max}-P_{RCPG}$) 間では、(3 軸拘束を無視した場合) き裂先端で σ_Y から $-\sigma_Y$ の応力変化、すなわち、 $2\sigma_Y$ の変化が起こるのに対して、負荷過程の P_{op} から P_{RPG} に至る荷重振幅間では、(P_{op} 時にはき裂先端の応力は $-\sigma_Y$ より大きくなっているから) $2\sigma_Y$ より小さな応力変化しか生じない。

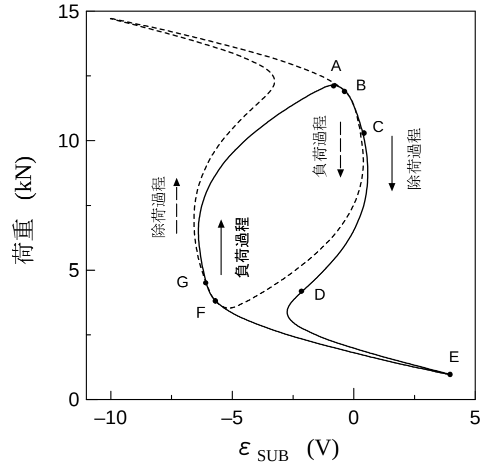


図 2.9　ヒステリシスの反転重ね合わせ結果の一例

したがって、$(P_{\max}-P_{RCPG})>(P_{RPG}-P_{op})$となり、両者の荷重振幅の差は、き裂尖鋭度を考慮するとさらに拡大する。したがって、 P_{RPG} と反転図の除荷過程における P_{RCPG} を一致するように重ね合わせると、$(P_{RPG}-P_{op})$間は反転した除荷過程における応力－引算ひずみ線図と完全に重なることになる。この場合、元図と反転図で重なり合う領域が最大になる。

また、負荷中の P_{RPG} から ΔP 上昇する過程で生じる引張塑性域寸法は、除荷中の P_{RCPG} から同じ ΔP 下降する過程で生じる圧縮塑性域寸法よりも大きくなるので、この間のコンプライアンスは前者の方が大きくなる。したがって、元図の負荷過程における応力－引算ひずみ線図と、反転した除荷過程における応力－引算ひずみ線図で、重なる領域が最大になるようにすれば、完全に重なった領域の元図での上限が P_{RPG} 、下限が P_{op} となる。

き裂が成長した段階では、図 2.9 と同様、元図と反転図がかなりの荷重範囲で重なり合うことが、全てのデータで確認されている。なお、き裂閉口荷重 P_{cl} は、図 1.2 で示したように、 P_{RCPG} から $P_{\min}$ に至る過程で、コンプライアンスが小さくなる時点と対応するから、 P_{RCPG} から $P_{\min}$ に至る過程の、応力－引算ひずみ線図の変曲点が P_{cl} になる。

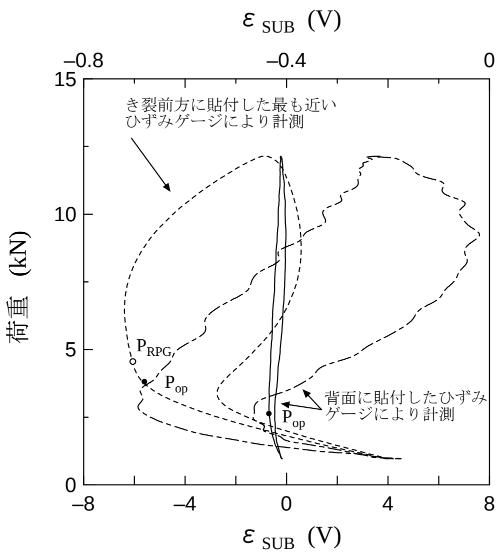


図 2.10　背面ゲージ出力を引算回路に通して得られたヒステリシス

ところで、図 2.10 中に示した実線は、図 2.9 を得た時点における、背面ゲージからの出力を、引算回路を

通して得たヒステリシス曲線であり、図 3.23 よりは、負荷過程と除荷過程との差が現れるよう増幅している。

菊川ら [9]は、実線よりは増幅が小さな出力図で、負荷過程と除荷過程の差が明確でない場合についても、除荷弾性線に平行な線から離れ出す時点を P_{op} としており、その観点から、P_{op} を決定された結果が実線上に・印で示されている。また、図中の一点鎖線は、実線のデータをさらに増幅して示したもので、ノイズが大きく、この図からは P_{op} を決定するのが困難である。また、図中の点線は、図 2.9 の元図を再記したもので、図 2.9 で求めた P_{RPG} 、P_{op} もその点線上に示されている。

このように、菊川らの方法により求めたき裂開口荷重(実線上の・印)は、図 2.9 に示した手法(反転法)で得たき裂開口荷重より低いことが分かる。すなわち、高荷重域における負荷過程と除荷過程のヒステリシスに差が出ない程度にしか増幅をしない場合には、高荷重域ではヒステリシスは縦軸と平行になり、その部分には一部き裂閉口域を含むことになり、き裂開口荷重を低く計測してしまうことになる。したがって、菊川らが求めているき裂開口荷重は、少し低く与えられているものと判断される。

なお、図 2.9 と比して、最小荷重直上の“ひげ”の大きさは短いが、これは採用した試験片の違いによる。すなわち、CT 試験片では集中荷重を、ピンを通して与えており、片側貫通き裂付帯板よりも、き裂が変形しやすいためである。

町田ら [15]は、2.2.1 項に示した高精度コンプライアンス測定装置を購入し、中央貫通き裂付試験片(center cracked specimen)を用いて、き裂先端近傍のひずみ変化を詳細に観察している。図 2.11 は、一定振幅荷重下で計測された引算ひずみと荷重の関係を示す。図中、(a)→(b)…→(g)→(h)図と進むにつれて、き裂が成長していく段階を示している。き裂が入る前(図 2.11(a))は、負荷過程と除荷過程でほぼ同じ曲線となっている(除荷過程を反転させれば、ほぼ負荷過程と同じ曲線となる)。

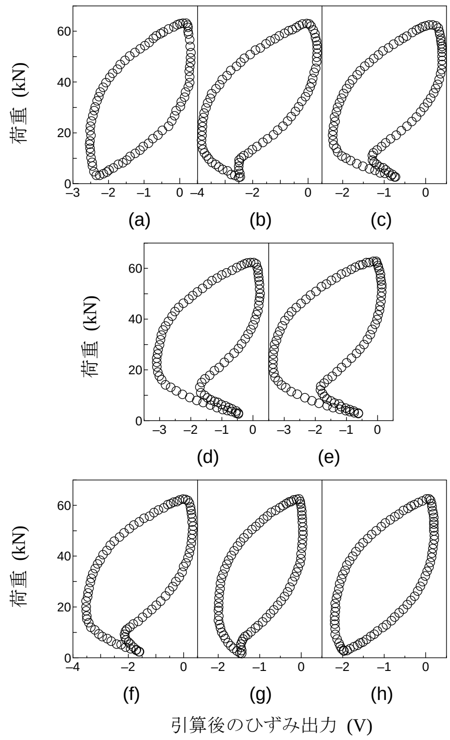


図 2.11 一定振幅荷重下におけるき裂成長に伴うヒステリシスループの変化

しかし、き裂が入ると、図 2.11(b)、図 2.11 (c)というように、低荷重域で“ひげ”が生じ発達する。これは、前述の考察から分かるように、き裂が除荷過程で閉口し、圧縮側負荷とともに閉口域が発達していくことを示している。そして、図 2.11 (d)、図 2.11 (e)という状態では、閉口域の

大きさがほぼ一定となり、定常状態になっていることを意味すると考えられる。さらに、き裂が大きくなりリガメントが小さくなると、高荷重域で全面降伏が生じるようになり、き裂全体が大きく開口するため、除荷過程でき裂が閉口しにくくなり、き裂閉口域がき裂進展とともに小さくなる結果、(f)→(g)→(h)図と進行し、図 2.11 (h)ではき裂が存在しない状態の図 2.11(a)とほぼ同じ形状のヒステリシスが得られる。

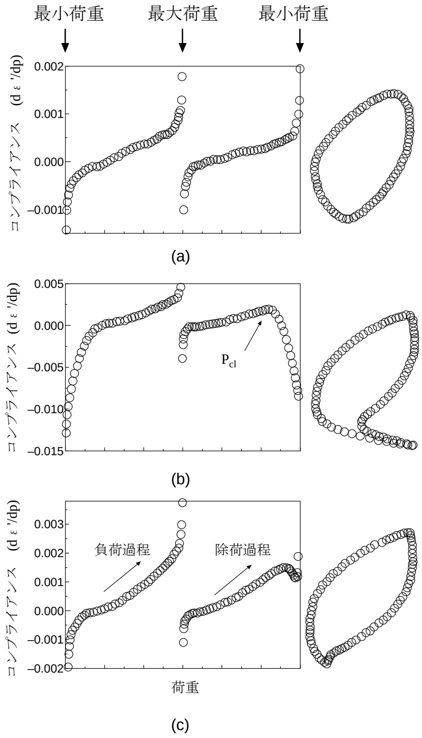


図 2.12　一定振幅荷重下において最適レンジで計測された引算ひずみ(ε')の荷重に対する微分

図 2.12 は、荷重で微分した引算ひずみ($d\varepsilon'/dP$)(コンプライアンス)と、荷重の関係を示している。負荷過程では、$d\varepsilon'/dP$ は荷重の増加とともに単調に増加していく。図 2.13 は、$d\varepsilon'/dP$ をさらに荷重で微分した、コンプライアンス変化 $d^2\varepsilon'/dP^2$ を示している。図 2.13 (a)が、1 サイクル全体の挙動を示したものであり、図 2.13 (b)は、その内の特徴ある部分を明確にするために、縦軸を拡大した図である。

負荷過程においては、$d^2\varepsilon'/dP^2$ は、最小荷重から負荷とともに減少し、あるところで極小値をとり、その後、最大荷重に至るまで、単調に増加している。この極小点は、き裂開口荷重か RPG 荷重の、いずれかと考えられるが、き裂が荷重振幅の全域にわたり開口しているデータ（き裂発生以前のデータ図 2.11(a) および試験片破断直前のデータ図 2.11(h)）でも、この極小点が認められるので、これが P_{RPG} となると牧野らは主張している[16]。

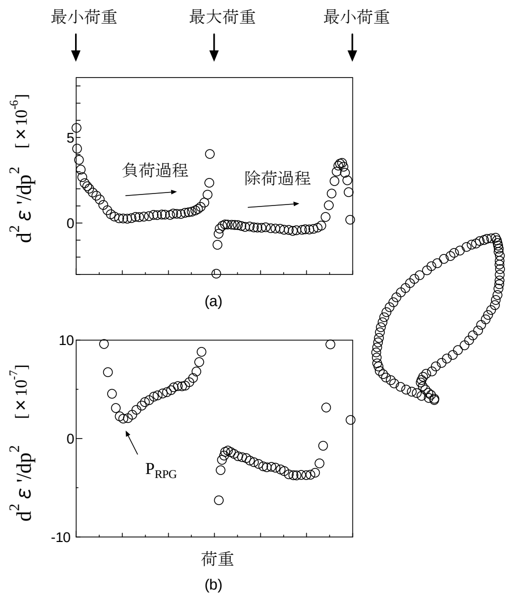
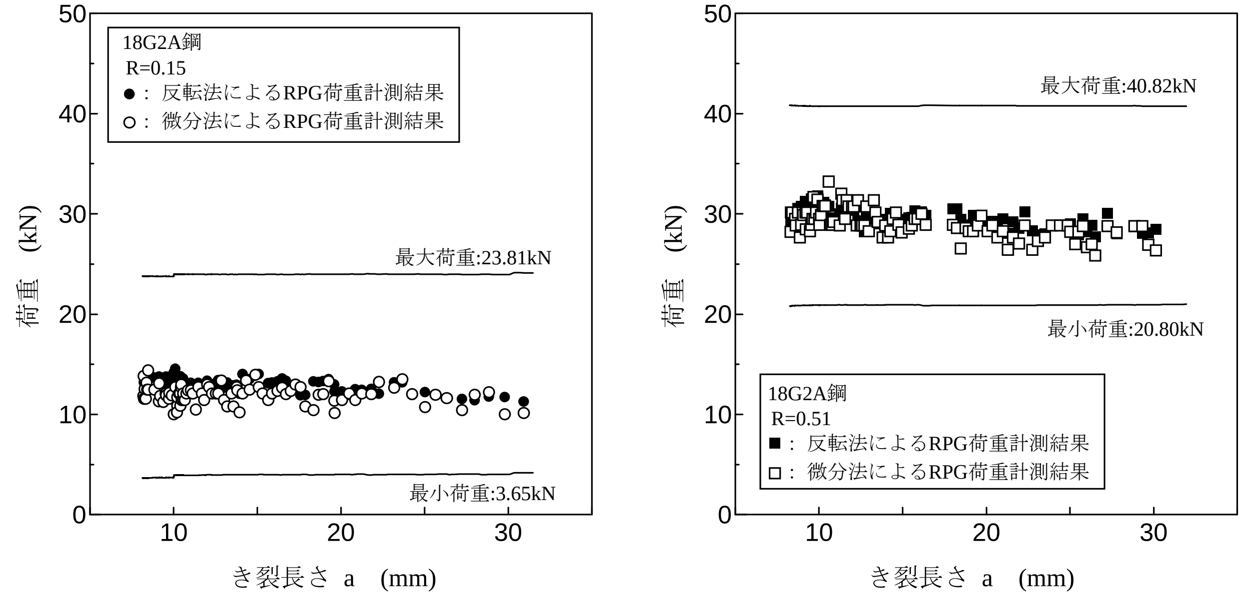


図 2.13 一定振幅荷重下における 1 サイクル中の $d^2\varepsilon'/dP^2$ の変化

除荷過程においては、種々の特徴が $d\varepsilon'/dP$ および $d^2\varepsilon'/dP^2$ に現れる。すなわち、塑性域の成長とき裂閉口域の成長の影響が複合して現れており、塑性域の成長だけを取り出すことができない。疲労の成長は塑性仕事と密接に関連すると考えられる。したがって、負荷過程での RPG 荷重から最大荷重に至る荷重範囲に対応する応力拡大係数範囲 ΔK_{RP} を、疲労き裂伝播速度を律するパラメタにするべきという著者らの主張を町田、牧野ら[16]は確認している。



(a) 応力比　0.15　　(b) 応力比　0.51

図2.14　一定振幅荷重が作用する中央貫通切欠試験片に対して反転法と微分法の両者で計測されたRPG荷重（18G2A 鋼、試験片幅=100mm、板厚=4mm）

図 2.14 [17]には、ポーランド規格の 18G2A 鋼（降伏点=398MPa 、引張強さ=590MPa 、伸び=57 %）から作成した、幅 100mm の中央貫通切欠試験片（切欠半長=８mm）に一定振幅荷重を作用させて、2.2.1 項の計測システムにより計測したデータから、反転法ならびに微分法により RPG 荷重を計測した結果が示されている。図 2.14 (a)は応力比 0.15、図 2.14 (b)は応力比 0.51 で実験された結果である。反転法で計測された RPG 荷重と微分法によるそれとはほぼ等しくなっている。

図 2.15 は、両決定法によって計測された RPG 荷重間の関係を示しており、両者は同等の計測結果を与えることが分かる。したがって、微分法による方が、人の意志が入りにくい点から、反転法より better であると考えられる。しかし、微分法ではき裂開口荷重は求められない（き裂開口荷重を求める意義があるか否かは別の問題であるが)。

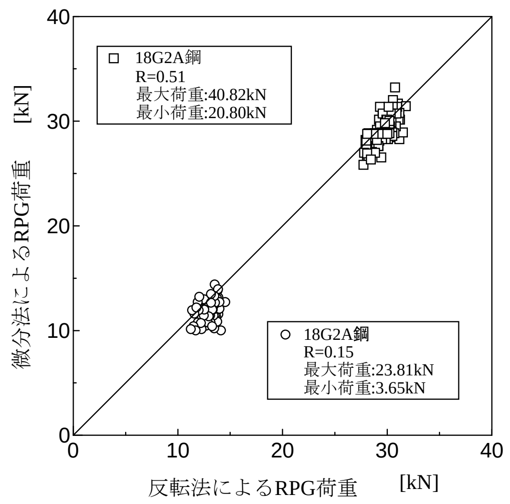


図 2.15　反転法と微分法による RPG 荷重の関係

2.2.3 RPG 荷重の重要性

Elber が提案した疲労き裂伝播式に下限界条件を導入した(3.17)式は疲労き裂成長の基礎式として広く世界に認知されている。$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ が真に存在するのであれば、このレベル以下の繰返し荷

重しか作用しないならば、疲労き裂の進展は起こらないので、工学的には重要であるとの認識のもと、盛んに$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$あるいは$\Delta K_{th}$を求める研究や、その設計への利用法に関する研究がなされた。しかし 3.2.4 項の最後で説明したように、ランダム荷重下で$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$が小さくなったり、消滅したりする現象を物理的に解説出来る合理的なものは未だ世に存在しない。

しかし、き裂材に与える繰返し荷重を、各サイクルの最大荷重は一定に保持したままで、階段状に最小荷重を上昇させると、き裂進展につれてき裂は開口したままで、弾性変形しかしなくなる。したがって、き裂開口荷重は最小荷重に、RPG 荷重は最大荷重に漸近することになる。そしてき裂が進展しなくなるのは、RPG 荷重が最大荷重と等しくなり塑性域が生じなくなったときと考察できる。この時点ではき裂開口荷重は最小荷重に等しくなる。すなわちこの時点では最小荷重から最大荷重にいたる荷重振幅とき裂開口荷重から RPG 荷重にいたる荷重振幅はほぼ同じになり、全く弾性挙動しかしなくなる。最小荷重時にもき裂が開口したままで、最大荷重時も塑性変形を起こさなくなった時点では、この荷重振幅に対応する応力拡大係数範囲は$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ならびに$\Delta K_{th}$に等しくなる。このことから、$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ならびに$\Delta K_{th}$は弾性変形だけに関係するパラメタを表しているだけで、き裂成長に関する物理量でないことは明らかである。

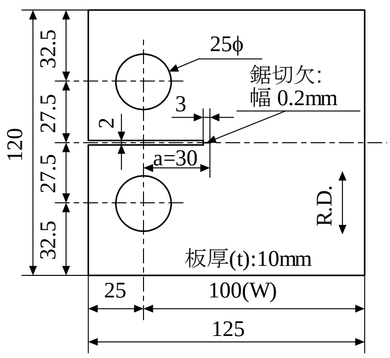


図 2.16 最大荷重を保持し段階的に最小荷重を上昇させる疲労き裂伝播試験に用いられた CT 試験片形状寸法

SM400B 材（軟鋼）より作成した図 2.16 の CT 試験片に対して、上記挙動が図 2.2 のシステムを用いて計測された。RPG 荷重ならびにき裂開口荷重（き裂閉口荷重も）は反転重ね合わせ法で決定された。その結果が図 2.17 に示されている [18]。図にはき裂閉口荷重（$P_{c\ell}$）も示されている。確かに RPG 荷重（P_{RPG}）は最大荷重（$P_{\max}$）に、き裂開口荷重（P_{op}）は最小荷重（$P_{\min}$）

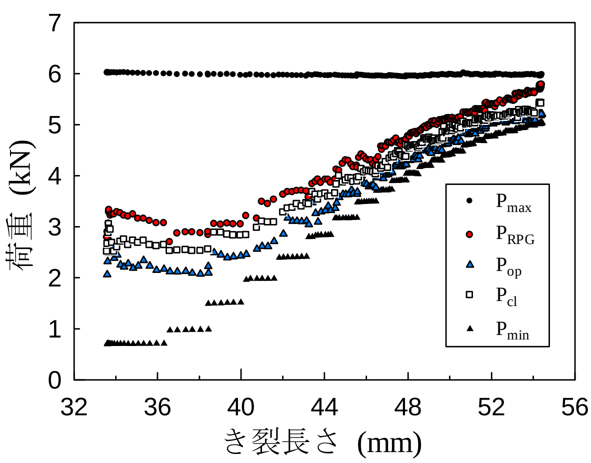


図 2.17 荷重振幅を段階的に減少させた試験で計測された RPG 荷重、き裂開(閉)口荷重（最大荷重を一定に保持）

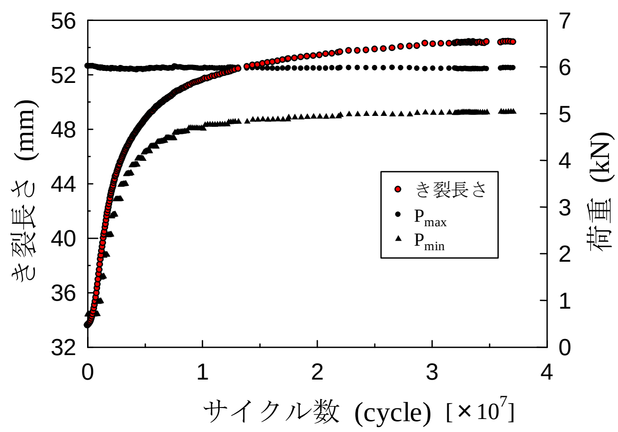


図 2.18　図 2.17 の試験で計測されたき裂成長曲線

に漸近する傾向を有している。また $P_{c\ell}$ も $P_{\min}$ に漸近する傾向を有している。この試験で計測されたき裂成長曲線が図 2.18 に示されている。図には与えた最大荷重と最小荷重も示されている。き裂成長曲線を見ると確かにき裂が停留する傾向にあることが理解できよう。

図 2.16 の試験片を用いて、種々の応力比（$=P_{\min}/P_{\max}$）の下での一定荷重振幅を与えた疲労き裂伝播試験、ならびに最小荷重を保持して最大荷重を段階的に小さくする疲労き裂伝播試験も行われている。計測された P_{op}、$P_{\max}$、および実き裂長さ（a）から有効応力拡大係数範囲（ΔK_{eff}）を求め、計測されたき裂伝播速度（da/dN）との関係が図 2.19 のように得られている。なお、CT 試験片の K 値はハンドブック [19]にある次式が使用されている。

$$K=\frac{P}{B\sqrt{W}}\left\{29.6\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2}-185.5\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2}+655.7\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2}-1017\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2}+638.9\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2}\right\} \tag{2.4}$$

ただし　B：試験片厚さ（他の長さは図 2.16 参照）
　　　　P：CT 試験片のピンに負荷する荷重

従来の試験結果と同様、応力比が異なっていたり、荷重振幅が変動しても、き裂開口荷重に基づいた ΔK_{eff} で整理すれば、１つの曲線で表せることが分かる。すなわち、疲労き裂伝播速度に及ぼす応力比ならびに荷重振幅変動の影響を ΔK_{eff} で定量的に評価できていることが理解されよう。しかしながら、図 2.19 の結果を見ると、ΔK_{eff} には閾値 $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ が存在している。図 2.17 か

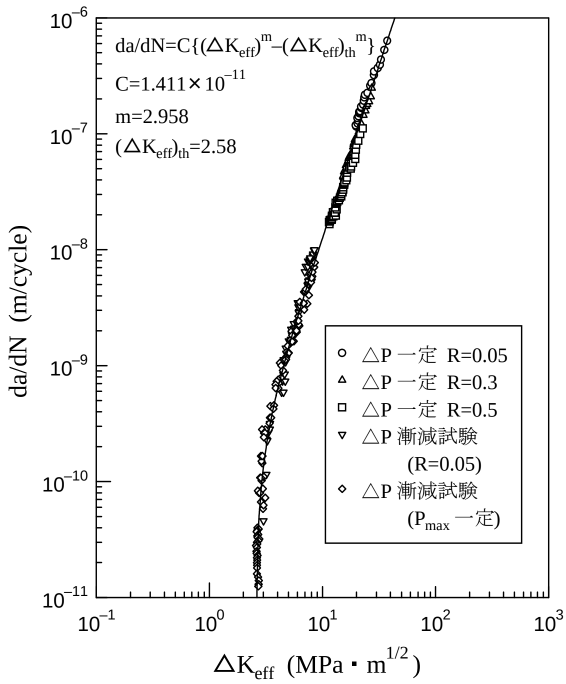


図 2.19　き裂開口荷重から定義された有効応力拡大係数範囲と疲労き裂伝播速度の関係

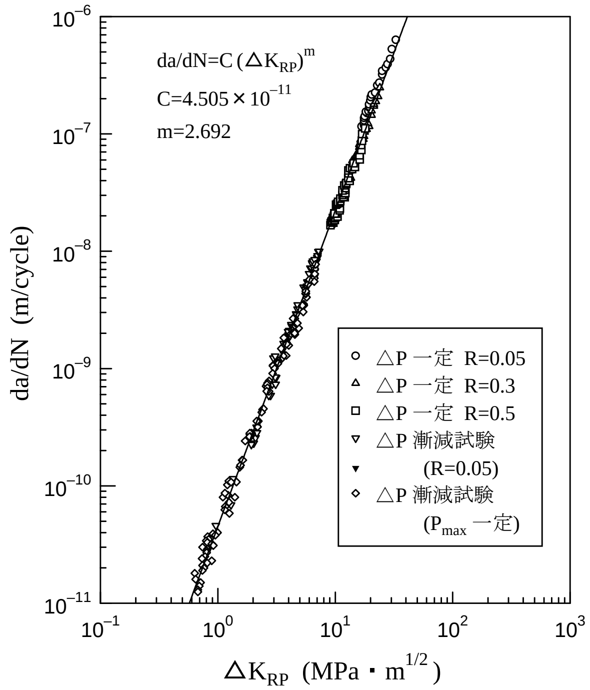


図2.20　RPG荷重から定義された有効応力拡大係数範囲と疲労き裂伝播速度の関係

ら類推すると、き裂が伝播しなくなる時点の応力拡大係数範囲 ΔK は、それを構成する荷重範囲内では弾性変形しか生じなくて、この範囲を超えると塑性変形が現れることを示していると理解される。したがって、$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ は疲労き裂伝播速度を律するパラメタでなく、弾性変形と関係する物理量であり、疲労き裂伝播速度には何ら影響を与えない量と理解されよう。

一方、図 2.20 は図 2.19 の整理の時に用いた P_{op} に替えて、計測で得られた P_{RPG} を代入して得られる ΔK_{RP} と da/dN の関係を整理した結果である。この場合には da/dN が小さくなるにつれ ΔK_{RP} がどんどん 0 に向かって小さくなっており、ΔK_{RP} が 0 になって初めてき裂が停留すると図 2.17 と図 2.20 より判断して良いであろう。すなわち、P_{RPG} が推定できれば、$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ や ΔK_{th} を導入しないで停留現象も自然に現れることになり、$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ や ΔK_{th} が材料定数として考える研究は全く時間と資金を無駄にしているものと考えられよう。図 2.20 を見ると、低 ΔK_{RP} 領域から高 ΔK_{RP} 領域にわたって、き裂伝播速度と ΔK_{RP} は両対数グラフ上で直線関係を有しているので、疲労き裂伝播速度は、

$$\frac{da}{dN} = \bar{C} \cdot \Delta K_{RP}^{\bar{m}} \tag{2.5}$$

ただし、

$\bar{C}, \bar{m}$ ：材料定数

と表せることになる。

3.　き裂開閉口モデルと RPG 荷重のシミュレーション

RPG 荷重を求める事が出来ると、種々の条件下の疲労き裂成長曲線を、定量的に推定できると期待される。2 章で説明したように、除荷弾性コンプライアンス法を拡張することで RPG 荷重を計測することができるが、机上でこれを推定できなければ、寿命評価手法として利用できない。RPG 荷重は、き裂閉口域が大きくなるほど高くなると考えられ、これを定量的に推定するためには、き裂開閉口挙動を机上で推定することが必要となる。ある程度大きな繰返し荷重が作用する場合、き裂先端近傍には負荷過程で引張塑性域、除荷過程で圧縮塑性域が形成される。そして、半サイクル毎に引張と圧縮の塑性変形が繰り返され、き裂前方のき裂先端近傍には活固有変位（(1.80)式参照）が生じ、残留変形層が形成される。疲労き裂が問題となる構造に作用する実働荷重は、通常最大荷重の方が最小荷重よりその絶対値が大きく、残留変形層は引張塑性ひずみにより形成され、残留引張変形層となる。その残留引張変形層の中をき裂が成長する結果、実き裂縁に固有変位片（活固有変位から作用応力を開放した変位を有する片で、これが残留引張変形層となる）がへばりついたようになり、除荷過程でき裂閉口域が形成され発達する。このように、き裂閉口域は繰返し塑性変形による固有変位片の形成と、その中をき裂が成長する結果生じるので、き裂開閉口現象は複雑で弾性解析では求められない。

したがって、塑性変形問題として取り扱わなければ、き裂開閉口挙動の定量的な評価をすることができない。弾塑性 FEM や弾塑性 BEM の汎用プログラムを使用して、き裂開閉口の定量的な評価が簡単にできると一見考えられるが、き裂が負荷過程のどの荷重レベルで進展を開始して、どの荷重レベルで停止するか、あるいは除荷過程のどの荷重レベルで進展を開始して、どの荷重レベルで停止するかという、新しい破面形成時期を決定できる何らかの基準がなければ、FEM などの離散化手法によるき裂進展モデルは成立しない。なぜなら、どの時期にき裂が進展するかにより、き裂閉口領域の大きさが変化し、その結果、RPG 荷重（あるいはき裂開口荷重）が変化するからである※。すなわち単に、ある特定の瞬間（たとえば最小荷重時）にき裂を適当に成長させる離散化手法は、RPG 荷重（あるいはき裂開口荷重）を定量的に求めるための有効な手段とは成り得ない。

き裂閉口の主原因は塑性誘起によるものと考えられるが、他の原因も指摘されている。すなわち、き裂内に酸化物が堆積し、実際にき裂が閉じる以前に、酸化物とき裂縁が当たり力学的にき裂が閉口する状態となる酸化物誘起き裂閉口(oxide-induced crack closure)[20]、粗い破面の接触により生じる破面粗さ誘起き裂閉口(roughness-induced crack closure)[21]が考えられている。前者の影響は腐食環境下で、後者は低サイクル疲労のような高荷重下で顕著に現れると考えられているが、その場合でも、塑性誘起き裂閉口(plasticity-induced crack closure)がき裂閉口の主原因である。

塑性誘起き裂閉口モデルは数多く提案されている [22~26]。これらのモデルは、それぞれ限定された条件に対して、疲労き裂伝播挙動をうまく説明できているが、必ずしも広い条件に対して成立するか否かは明確ではない。この内 3.3 節で説明したように、Newman[26] は、Dugdale モデル(1.6 章参照)を巧みに応用した、き裂開閉口モデルを提案している。彼による結果は、種々の現象に対する挙動を定性的にうまく説明している。

しかし、き裂縁に取り込まれる材を完全剛塑性体(rigid-perfect plastic solid)と仮定したために、き裂開口荷重を与える定式で、最小荷重からき裂開口荷重に至る荷重増分に対応するき裂前方の応力変化の影響を無視せざるを得なくなり、これが、き裂開閉口現象の推定に大きな誤差を与えている。さらに、材料定数として降伏応力の代わりに塑性流れ応力(3.3.2 項参照)を採用し、その上、負荷過程では大きな塑性拘束係数（疲労き裂伝播速度領域ごとに塑性拘束係数を、き裂開口荷重の測定結果に合うように調整している [27]）を用い、除荷過程では１とするなどの点で問題がある。また、き裂は除荷過程あるいは負荷過程で、徐々に進展すると考えられるが、最小荷重時

※　１サイクル毎にき裂が進展するとして解析する場合には、１サイクル毎のき裂進展量 Δc は極小さいので、この部分に働くき裂結合力は他の領域の COD に殆ど影響を及ぼさない。またき裂伝播過程では最小荷重時き裂先端近傍は圧縮降伏するので、どの時期にき裂が入るのかの検討（すなわち、後述の塑性収縮係数）は不要と考えられる。

に一度に進展すると仮定しているなど問題がある。

そこで、本章では、Dugdale モデルを基礎とした Newman のき裂開閉口モデルを発展させた筆者らによるき裂開閉口モデル [28)、29)] を説明する。そして、種々の荷重条件下における RPG 荷重(あるいは ΔK_{RP})および疲労き裂成長曲線の計測結果と推定結果とを比較検討する。さらに、疲労き裂伝播則の物理的意味を考える上で重要と考えられる、ΔK_{RP} と疲労被害蓄積領域寸法 $\tilde{\omega}$ (zone size with fatigue damage)との関係について言及する。

3.1　弾完全塑性体の残留引張変形層を有するき裂開閉口モデル

Newman のき裂開閉口モデル [26)、27)] では除荷過程において、仮想き裂領域では圧縮降伏しない限り、仮想のき裂開口変位は最大荷重時のそれを保持しており全く弾性的には変化しない。これは、仮想き裂部へ埋め込んだ材料が完全剛塑性体であると仮定しているためである。この完全剛塑性体という仮定は、弾完全塑性体（実際には 3.3.2 項で議論したように、降伏応力で頭打ちとなる弾性体）の取り扱いをしている Dugdale モデルとは整合性がとれていない。

仮想き裂部といっても除荷されれば（除荷弾性域となる)、それに見合った変形は生じるはずである。この観点から以下では、Dugdale モデルの材料特性と同じく、仮想き裂部に配置する棒要素を弾完全塑性体と仮定して導出されたき裂開閉口モデルを説明する。これにより、RPG 荷重やき裂開口荷重が、仮想き裂部に働く応力変化も考慮に入れて求められる。さらに Newman のき裂開閉口モデルは、中央貫通き裂材に対してのものであったが、以下のモデルは、一般の板厚貫通き裂材に、残留応力場が存在する場合にも取り扱えるように拡張されたものである。

3.1.1　き裂開閉口挙動の定式化 [28)、29)]

図 3.1 に示すように、単位外荷重が作用した場合にき裂が存在しない状態で、想定されるき裂線上に働く応力分布を $s(x)$ とすると、P なる外荷重が作用した場合の応力分布は $P\cdot s(x)$ となる。図 3.1 の部材に長さ a のき裂が存在し、図 3.2 に示すように、そのき裂面上 x の位置に、集中荷重 p が作用する場合の K 値(K_1)が求められているとし、それを、

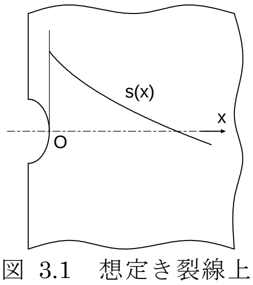


図 3.1　想定き裂線上に働いている単位荷重に対する応力分布

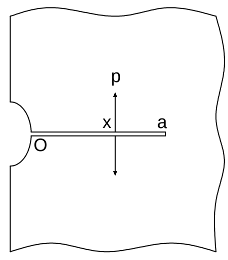


図 3.2 き裂面に集中荷重を受けるき裂

$$K_1 = p\cdot g(x,a) \tag{3.1}$$

と置く。したがって、外荷重が作用した場合の K 値(K_2)は、(3.1)式および重ね合わせの原理より

$$K_2 = P\int_0^a s(x)\,g(x,a)\,dx \tag{3.2}$$

今、aは、過去に生じた塑性域（き裂前方に最も成長した塑性域先端を以後a^*とする）より、前方にある場合を考える。そして、実き裂の長さをcとすると、負荷過程でき裂が完全に開口している場合には、$\left[c,a\right]$の区間に、一様応力$-\lambda\sigma_Y$（σ_Y：降伏応力、λ：塑性拘束係数）が作用した場合のK値と(3.2)式のK値、および残留応力によるK値を加えたものが0になるという、き裂結合力モデルにおける仮想き裂に対する条件より、

$$P\int_0^a s\left(x\right)g\left(x,a\right)dx-\lambda\sigma_Y\int_c^a g\left(x,a\right)dx+\int_0^a \sigma_R\left(x\right)g\left(x,a\right)dx=0 \tag{3.3}$$

が成立する。上式を解くことにより、Pなる外荷重が作用した場合の実き裂長cと、仮想き裂先端位置a（マウス部※から、この仮想き裂先端位置までの距離が、過去のそれよりも大きいものであることを特に明示する場合、a^*と以後記述する）との関係が求められる。

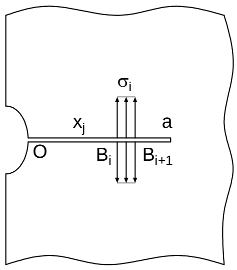


図 3.3　き裂面の一部に帯状応力を受けるき裂

一方、図 3.3 に示すように、き裂面の一部の区間$\left[B_i,B_{i+1}\right]$に、σ_iなる一様応力が作用した場合、x_jの位置におけるき裂開口変位は(1.47)式より、以下のように与えられる。

$$V\left(x_j\right)=\frac{2\sigma_i}{E'}\int_\alpha^a g\left(x_j,a\right)da\int_{B_i}^{\beta} g\left(x,a\right)dx=\sigma_i F\left(x_j,x_i,\Delta x,a\right) \tag{3.4}$$

ただし、

$$E'=\begin{cases} E & \text{（平面応力状態の場合）} \\ E/\left(1-\nu^2\right) & \text{（平面ひずみ状態の場合）} \end{cases}$$

$$x_i=\left(B_i+B_{i+1}\right)/2,\quad \Delta x=B_{i+1}-B_i$$

ν：ポアソン比　　　　　　　　：ポアソン比

ここで、　$x_j>B_{i+1}$のとき　　　$\alpha=x_j,\quad \beta=B_{i+1}$

$B_{i+1}\geq x_j\geq B_i$のとき　　$\alpha=x_j,\quad \beta=\min\left\langle B_{i+1},a\right\rangle$

$B_i>x_j$のとき　　　$\alpha=B_i,\quad \beta=\min\left\langle B_{i+1},a\right\rangle$

上記で、$\min\left\langle B_{i+1},a\right\rangle$は$B_{i+1}$と$a$の内、小さい方の値をとる。

なお、以後$F\left(x_j,x_i,\Delta x,a\right)$を単に$F\left(x_j,x_i,a\right)$と記述する。

したがって、最大荷重時にき裂が完全に開口し、しかも、(3.3)式で得られたaが、過去に生じた塑性域より前方に成長している場合（この場合$a^*=a$となる）には、重ね合わせの原理により、図 3.4 の関係が成立するので、以下の式が得られる。なお、$\left[B_i,B_{i+1}\right]$間には、一様応力が作用す

※表面から入ったき裂の表面位置をマウス部と呼んでいる。すなわち、き裂先端に対してもう一方の端をマウス部と言う。ただし、中央貫通き裂の場合、中央をマウス部と呼ぶこともある。

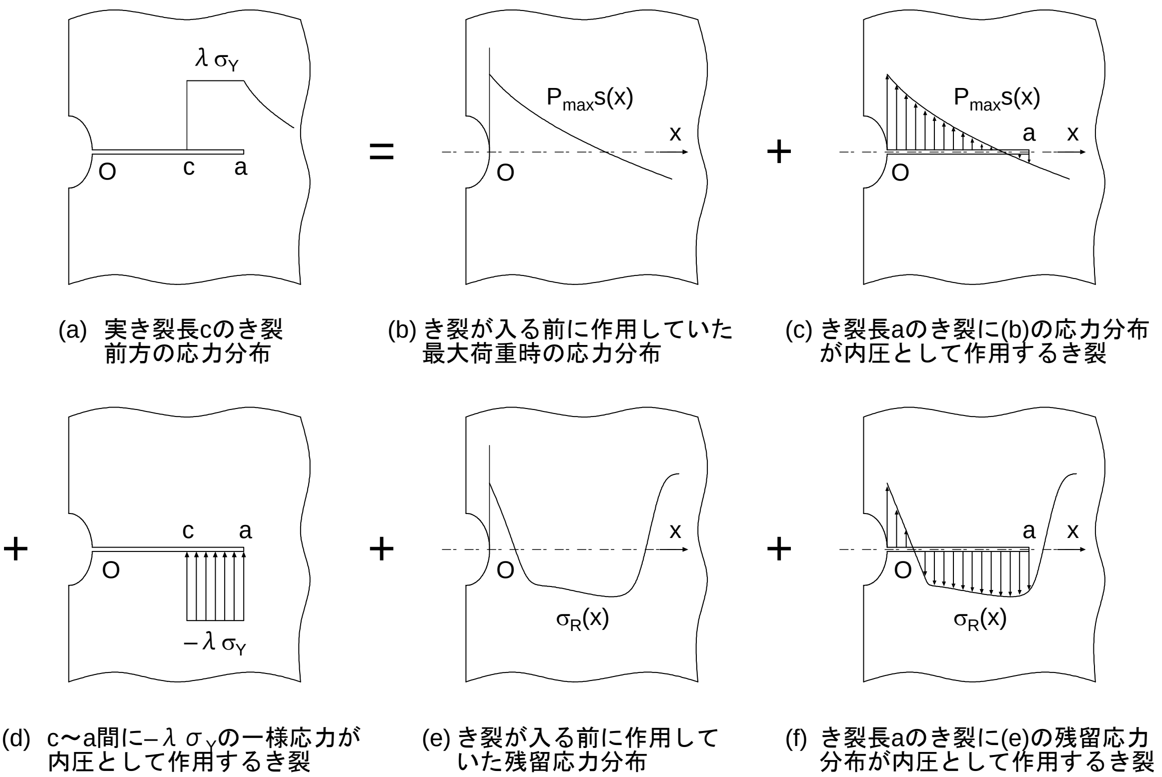


図 3.4　き裂開口状態で Dugdale モデルにおいて適用される重ね合わせ

ると簡略化している。

$$V_j = P_{\max}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \lambda\sigma_Y \sum_{i=k+1}^{n} F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \qquad (3.5)$$

ただし、　V_j ： $x = x_j$ におけるき裂開口変位

s_i ： $x = x_j$ における $s(x)$ の値

$(\sigma_R)_i$ ： $x = x_j$ における $\sigma_R(x)$ の値

$B_{k+1} = c$

$B_{n+1} = a^*$

なお、ここではき裂のマウス部から仮想き裂先端方向に棒要素番号を順に付けている。ここで、塑性域となっている区間 $\left[c, a^*\right]$ では仮想的な変位が生じる。図 3.5(b)に示すように、縦割りにした小片に、相当降伏応力（降伏応力と塑性拘束係数の積）と等しい一様応力（ただし、ここではその後、除荷過程に入ることを考慮すれば弾性応力となる）が作用して、上記の仮想

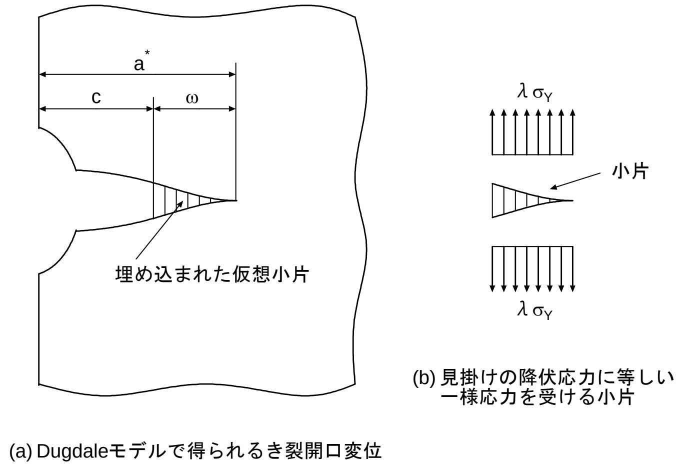


図 3.5　Dugdale モデルにおける仮想き裂部の変位連続条件を満たすようにするための処理

的なき裂開口変位と同じ形状となる小片を考え、これを区間$\left[c,a^*\right]$に隙間なく埋め込んだものが、より実際に近いモデルとなる。この部分はx方向にも拘束されているが、これを無視しこの部分を棒要素（この棒要素は塑性状態になっている）と考えると、この棒要素のゲージ長L_j（棒に働く応力がなくなった時点の棒要素の長さ）は⊕

$$L_j = \frac{1}{1+\lambda\sigma_Y / E'} V_j \tag{3.6}$$

で与えられる。 区間$\left[0,c\right]$が疲労き裂で生じたものと考えると、この区間には、上記のようにして、過去にき裂内に取り込まれた棒要素が存在する。

この状態から除荷過程（圧縮側負荷過程）に入る。除荷過程でも図 3.4 と同様の重ね合わせが成立する。ただし、図 3.4(b)および(c)で作用している応力分布は$P_{\min}\cdot s\left(x\right)$、図 3.4(d)で働いている内圧分布は、最小荷重時にき裂に働く応力分布の符号を換えたものとなるだけである（図 3.6 参照)。すなわち、棒要素に働く応力（き裂線上に働く応力）をσ_iとすると、

$$V_j = P_{\min}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \tag{3.7}$$

ただし　σ_i ： $x = x_i$ で働いている応力

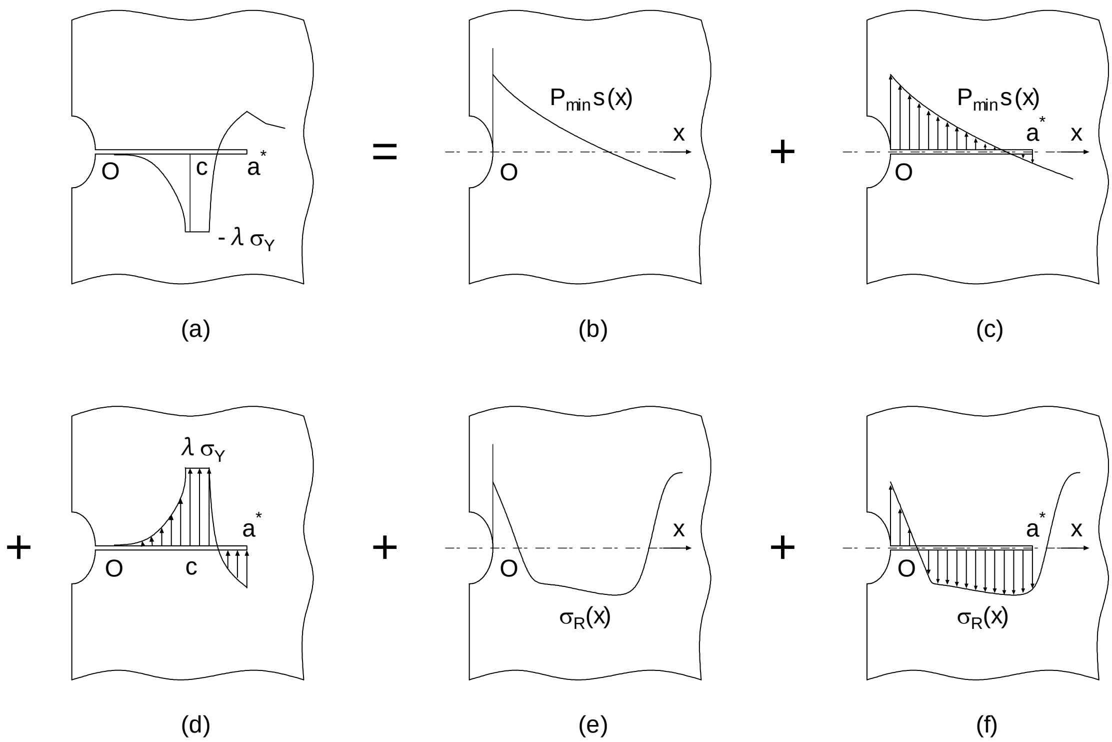


図 3.6　除荷過程で成立するき裂結合力モデルにおける重ね合わせ

⊕塑性状態ではゲージ長は定まらないが、この直後から除荷過程に入るので(3.6)式が成立する。

除荷過程で圧縮塑性域とならない位置では、最大荷重時に形成された棒要素は弾性変形しか起こさないから、仮想き裂部の弾性域ならびに実き裂部でき裂が閉口している弾性域では、

$$V_j = \left(1+\sigma_j / E'\right) L_j \tag{3.8}$$

が成立する。したがって、この領域においては、(3.7)式と(3.8)式を等値した、

$$\left(1+\frac{\sigma_j}{E'}\right) L_j = P_{\min}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \tag{3.9}$$

が成立する。そして、圧縮塑性域の領域では $\sigma_i = -\lambda\sigma_Y$、き裂開口部では $\sigma_i = 0$ となる。(3.9)式を変形すると

$$\sigma_j = \left[P_{\min} \sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - L_j\right]$$

$$\Big/ \left\{\frac{L_j}{E'} + F\left(x_j, x_j, a^*\right)\right\} \tag{3.10}$$

(3.10)式は Gauss-Seidel 法で解くことができる。この収束計算過程で

$$\left.\begin{array}{l}
x_j < c \quad \text{の実き裂内では} \\
\qquad \sigma_j > 0 \text{ なら、} \quad \sigma_j = 0 \quad \text{(引張応力は受け持たないため)} \\
\qquad \sigma_j < -\lambda\sigma_Y \text{ なら、} \sigma_j = -\lambda\sigma_Y \\
c < x_j < a^* \text{ の仮想き裂内では} \\
\qquad \sigma_j > \lambda\sigma_Y \text{ なら、} \quad \sigma_j = \lambda\sigma_Y \\
\qquad \sigma_j < -\lambda\sigma_Y \text{ なら、} \sigma_j = -\lambda\sigma_Y
\end{array}\right\} \tag{3.11}$$

と置き換えれば、意図する(3.10)式の解を得ることができる。

そして、得られた σ_j を(3.7)式に代入することにより、最小荷重時のき裂開口変位（このき裂開口変位を $\hat{V}_j$ とする）を求めることができる（図 3.38 で求めたき裂開口荷重を推定するために使用した最小荷重時のき裂閉口域における作用応力は、上記で $\lambda = 1$ として求めたものである）。

3.1.2　残留引張変形層が実き裂縁に取り込まれる際の塑性収縮 [30)]

前項ではき裂の成長は考慮されていない。疲労き裂は繰返し塑性域の高ひずみ集中場を伝播するから、一度に進めることのできるき裂成長量は、最小荷重時に生じる圧縮塑性域あるいは最大

荷重時に生じる引張塑性域の内、小さい方の領域（この小さい方のき裂前方の塑性域（これを繰返し塑性域と呼ぶ））寸法より小さくしなければならない。すなわち疲労き裂は安定破壊の範疇に分類されるので、この領域寸法より大きく伝播することはない。新しく破面が生じるためには、、破面形成のための自由表面エネルギーが最小限必要となり、これは**非可逆エネルギー**(irreversible energy)から供給されなければならない。すなわち塑性エネルギーという非可逆エネルギーが生じることが、き裂進展の必要条件となる。したがって、直前のサイクルで引張と圧縮の塑性変形が現れなければ、疲労き裂は伝播しないと考えられる。

ここで、Δc だけき裂を成長させることを考える。Tomkins モデル[31)]のように、負荷過程で疲労き裂が伝播すると考えることもできるし、Laird モデル[32)]のように除荷過程で伝播することも考えられる。

まず負荷過程でき裂が進展する場合を考える。負荷過程の早い時期に伝播するとした場合、引張塑性変位増分があまり大きくならない間にき裂結合力が開放され、き裂進展部では応力が作用しなくなる。そのため、その後の最大荷重までの負荷でき裂が進展したき裂縁での引張塑性変形はほとんど進行しない。したがって、引張塑性変形が大きく進行しない間に、新しいき裂面が生じた場合、直後の除荷過程では、その部分は除荷弾性域になる可能性が大であり、閉口しないことも考えられる。また、引張塑性変形が大きく進行した後新しいき裂面が生じた場合、実き裂部に大きな固有変位片を取り込み大きく引き延ばされた材がき裂縁に存在することになり、除荷過程では容易にき裂が閉口し、場合によっては圧縮塑性変形を起こす。負荷過程でき裂が進展した瞬間は、引張応力が開放されるため残留引張変形層は一旦収縮する。一方、除荷過程でき裂が進展する場合には、進展直後結合力（降伏応力オーダの力）は解放され、残留引張変形層は一旦膨張する。

いずれにしても、直前のサイクルの最小荷重時にき裂先端に生じていた固有変位よりも大きな固有変位が、進展直後新しいき裂縁に形成され、その後の除荷過程でき裂閉口し場合によっては圧縮塑性変形して、固有変位量が小さくなる場合もある。

すなわち、計算上一度にき裂を進展させる場合、き裂進展時に実き裂に取り込まれる引張残留変形層厚さをどのように与えれば良いかが問題となる。大きな残留引張変形層が生じた直後に新しくき裂面が生成されたとしても、最小荷重時には圧縮降伏して残留引張変形層が薄くなってき裂縁に残ることを考えると、最小荷重時の COD を基準にその厚さを与えることが合理的である。

図 3.7 は最小荷重時のき裂開口変位と応力分布を模式的に示したものである。図中の短細点線は、過去の履歴によって、実き裂内に引張残留変形層が形成されて、最小荷重時にはき裂閉口が生じている場合の最小荷重時のき裂開口変位（caseA、これを $\hat{V}_j$ と表す）を示している。この場合の作用応力は「caseA 時の応力分布」として短点線で示している。図には実き裂内でき裂閉口

が全く生じない場合のき裂開口変位（$\tilde{\tilde{V}}$）と応力分布も caseC として、点線で示している。caseA でき裂閉口域が形成される場合よりも、caseC の場合の方が圧縮塑性域は大きくなる。そのため、caseA の COD よりも caseC の COD が小さくなる。また、一定荷重振幅下でき裂の成長とともに ΔK が大きくなるような場では、最大荷重時の CTOD がき裂成長とともに大きくなるので、実き裂に取り込まれ、ある程度進展した状態では引張残留変形層厚さはき裂成長とともに大きくなるはずである。

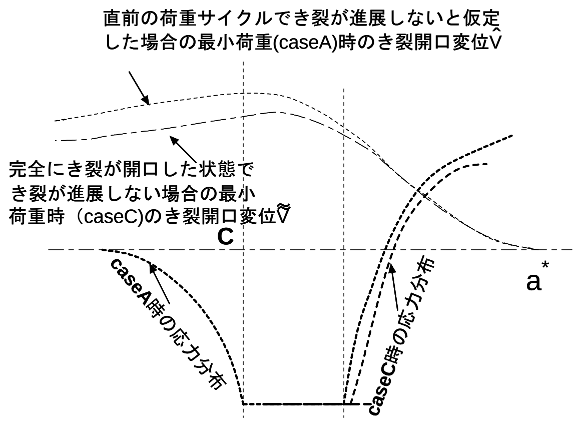


図 3.7　最小荷重時の COD 分布と応力分布

これらのことから、caseA と caseC の差、すなわち$\left(\hat{V}_j-\tilde{\tilde{V}}_j\right)$を考え、これの定数（$\kappa:-1\leq\kappa\leq1$）倍を$\hat{V}$に加えたものが実き裂に取り込まれると考えれば、このκでき裂が進展する時期を制御できることになるので都合が良いと一見考えられる。しかし、caseA でき裂閉口域が生じない場合、caseC との差は 0 となり、最小荷重でき裂閉口しない特別な場合（高応力比の条件下）には、κで残留引張変形層厚さを制御出来なくなる。

caseC に替わり、最小荷重時き裂閉口を起こさせないでき裂をΔcだけ進展させた caseB の COD（$\tilde{V}_j$）を用いれば、この問題も回避できる。そこで、Δc間には、caseA と caseB の差（図 3.8 参照）すなわち$\left(\hat{V}_j-\tilde{V}_j\right)$（$=\delta_i$）の$\kappa$倍を$\hat{V}_j$に加えたものを固有変位として与え実き裂長さを$\left(c+\Delta c\right)$（他の箇所は直前の最大荷重直後に形成された固有変位を保持している）として$P_{\min}$時の応力分布を改めて求める。なお、当初の検討で新しいき裂面が生じたときの塑性変位を最小荷重時に小さくすれば、RPG 荷重の測定値と一致する方向となったため、κを塑性収縮係数と呼んでいる。

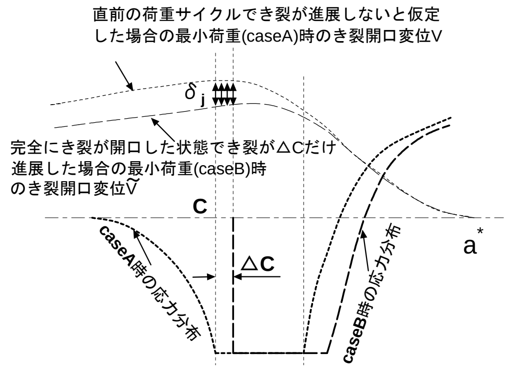


図 3.8 実き裂に取り込まれる引張残留変形層厚さの基準値の説明図

caseA の$\hat{V}_j$は、(3.10)式を(3.11)式の条件下で解き、得られた応力σ_jを(3.7)式に代入したV_jと等しい。また caseB の$\tilde{V}_j$は以下のようになる。すなわち$\left[0,c+\Delta c\right]$間の作用応力は 0 であることから、

$$\tilde{V}_j=P_{\min}\sum_{i=1}^{n}s_iF\left(x_j,x_i,a^*\right)-\sum_{i=k+m+1}^{n}\sigma_iF\left(x_j,x_i,a^*\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_iF\left(x_j,x_i,a^*\right)\tag{3.12}$$

ただし

$$B_{k+m+1} = c + \Delta c$$

が成り立つ。ここで、$\left[c+\Delta c, a^*\right]$間の固有変位$L_i$は、直前の最大荷重時に生じている固有変位である。$\left[c+\Delta c, a^*\right]$間の除荷弾性域においては(3.8)式が成立するから、(3.12)式と等値して、

$$\sigma_j = \left[P_{\min} \sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - L_j - \sum_{\substack{i=k+m+1 \\ i \neq j}}^{n} \sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \right] \Bigg/ \left[F\left(x_j, x_j, a^*\right) + \frac{L_j}{E'} \right] \tag{3.13}$$

が得られる。$k+m+1$からnまでの要素につき、$\sigma_j < -\lambda\sigma_Y$なら、$\sigma_j = -\lambda\sigma_Y$と置き換えることによって$\sigma_j$が求められる。そしてこの解$\sigma_j$を(3.12)式に代入することにより$\tilde{V}_j$が求められる（上記の(3.13)式の表記はガウス・ザイエル法を使うように定式化している。しかし(3.13)式はσ_jを未知数とする$\left(n-k-m\right)$元方程式で、σ_jが$\sigma_j < -\lambda\sigma_Y$となる要素は$\sigma_j = -\lambda\sigma_Y$と置き変えで元数を減らして$\left(n-k-m-\ell\right)$元一次方程式を解いても正解が得られる。ただしこの場合ℓ個の要素のσ_jが$-\lambda\sigma_Y$になっている)。したがって caseA と caseB の差δ_jは、

$$\delta_j = \hat{V}_j - \tilde{V}_j \qquad (j = k+1, k+m+1) \tag{3.14}$$

と与えられる。したがって$\left[c, c+\Delta c\right]$に取り込まれる固有変位は、

$$L_j = \frac{1}{1-\lambda\sigma_Y / E'} \left(\hat{V}_j - \kappa\delta_j\right) \tag{3.15}$$

ところで図 3.8 に関して導入されたκは新しくき裂が進展する直前までに、その箇所で受けた累積塑性ひずみ(cumulative plastic strain)に比例すると考えられる⊗。最大荷重時の実き裂先端のき裂開口変位を$\left(V_j\right)_{\max}$とすると、最大荷重から最小荷重に至る過程で、き裂先端位置で受ける塑性ひずみ増分は

$$\Delta\varepsilon_P = \left\{ \left(1 - {\lambda\sigma_Y}/{E'}\right)\left(V_j\right)_{\max} - \left(1 + {\lambda\sigma_Y}/{E'}\right)\left(\hat{V}_j\right)_{\min} \right\} \Big/ \left(V_j\right)_{\max} \tag{3.16}$$

ただし、$\left(\hat{V}_j\right)_{\min}$ ：き裂先端における(3.7)式で表される COD

で与えられる。

実き裂に取り込まれる直前の、最終サイクルで受けるき裂先端近傍の A 点での塑性ひずみ増分を$\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}$とする。最大荷重時の引張塑性域先端がサイクルとともに前方に成長する状態では、A

⊗ FEM などの離散化解析手法による疲労き裂伝播解析の検討に対して説明したように、1 サイクル毎にき裂を伝播させる計算では、Δc は極めて小さく、かつ伝播過程では最小荷重時に実き裂先端付近は圧縮降伏するので、κ を考慮する必要はないと考えられる。

点でそれまでに受けた塑性ひずみ増分$\Delta\varepsilon_p$の中で$\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}$が最も大きい。A 点がき裂内に取り込まれる直前までに受けた全塑性ひずみ振幅増分$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k$は、$\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}$レベルの荷重振幅を受ける回数にも影響を受ける。したがって、最終サイクル・レベルの塑性振幅を受ける回数、すなわち疲労き裂伝播速度の逆数にも$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k$はほぼ比例することになる。

一定振幅荷重下で実き裂に取り込まれた A 点が、き裂に取り込まれる直前までに受けた全塑性ひずみ振幅増分が

$$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k=\beta\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af} \tag{3.17}$$

ただし、β ：定数

で表されると仮定する。

したがって、現在の最大荷重時の引張塑性域先端位置が、過去のそれの領域内に留まる場合は、一定振幅荷重下に比して疲労き裂伝播速度が遅くなり、Wheeler モデル[33)] (3.1.3 項、図 3.9 参照)を参考にして、

$$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k=\tilde{\beta}\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}/\phi=\tilde{\beta}\left(\gamma_e/\gamma_{pi}\right)^{\tilde{m}}\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af} \tag{3.18}$$

ただし、　$\gamma_e=a^*-c$

γ_{pi}　：現時点での最大荷重時の塑性域寸法

$\tilde{m}$　：Wheeler モデルの指数（ (3.9)式参照）

$\tilde{\beta}$　：比例定数

と表される。ここで、$\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}$は、それを受ける箇所が実き裂に取り込まれる以前に受けた塑性ひずみ振幅増分の内で、必ずしも最大とはならないが、$\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}$レベルの荷重サイクルを受ける時間が長い、すなわち疲労き裂伝播速度が一定振幅荷重下よりも遅いので、$\left(\Delta\varepsilon_P\right)_{Af}$を基準として$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k$が近似的に表記されることになる。最大荷重時の引張塑性域先端位置が過去のそれよりき裂前方に位置する場合には、$\gamma_e=\gamma_{pi}$となり、 (3.18)式は (3.17) 式と一致する。

一方、過大荷重が作用した瞬間については、$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k$は(3.17)式より小さくなると考えられるが、過大荷重を受けた直後には、き裂閉口が生じにくくなり、新しくき裂となる位置の$\hat{V}$が$\tilde{V}$とほぼ等しくなり、(3.14)式のδ_jが小さくなるので、$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k$の大きさは、残留引張変形層の厚さにほとんど影響を与えない。

したがって、新しくき裂が進展する箇所で、残留引張変形層を実き裂内に取り込む際の塑性収縮は$\sum_k\left(\Delta\varepsilon_P\right)_k$（ (3.18)式））に比例することになる。この比例定数をκとすると、$\kappa\delta_j$だけゲージ長が短くなって取り込まれると仮定できる。したがって、新しい破面が生じる箇所の棒要素のゲージ長は、

$$L_j = \frac{\hat{V}_j}{1-\lambda\sigma_Y / E'} - \kappa\delta_j \tag{3.19}$$

しかし、全くき裂が閉口しないという極限以上に圧縮塑性域が成長することは生じないと考えられることから κ は 1 以下になると考えられる。また最大荷重近傍でき裂が進展した場合には非常に大きな残留引張変形層を実き裂に取込むことになるが、この場合には最小荷重時にこの部分は圧縮降伏することから、κ は－1 以上と設定しても後に影響を及ぼさない。したがって κ は(3.18)式を参照して以下のように与えられる。

$$\kappa = \begin{cases} -1 & \left[\alpha(\Delta\varepsilon_p)_{Af}(\gamma_e/\gamma_{pi}) < -1 \text{の場合}\right] \\ \alpha\left(\Delta\varepsilon_p\right)_{Af}\left(\gamma_e/\gamma_{pi}\right)^{\tilde{m}} & \left[-1 \le \alpha(\Delta\varepsilon_p)_{Af}(\gamma_e/\gamma_{pi}) \le 1 \text{の場合}\right] \\ 1 & \left[\alpha(\Delta\varepsilon_p)_{Af}(\gamma_e/\gamma_{pi}) > 1 \text{の場合}\right] \end{cases} \tag{3.20}$$

ここで、

$\alpha = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ ：材料定数(塑性収縮係数 ：plastic shrinkage factor)

$\tilde{m}$ ：Wheeler モデルにおける定数（通常、$\tilde{m}=1$）

となり、実き裂内に取り込まれることになる。したがって、Δc 間の棒要素のゲージ長を(3.19)式で置き換えて、再度(3.9)式（ただし、$c+\Delta c \to c$ 、$p_{\min}$ 時通常 Δc 間は閉口するので、この取り扱いをしても $p_{\min}$ 時の応力分布、ならびに COD には影響を与えない)、を解くことで、最小荷重時の作用応力が求められ、それを(3.7)式に代入して、最小荷重時のき裂開口変位が求められる。

なお、新しくき裂が成長する Δc 間以外の圧縮降伏する棒要素のゲージ長は、(3.10)式の収束計算によって得られた応力を(3.7)式に代入して求められる最小荷重時の開口変位 V_j を用いて

$$L_j = \frac{1}{1-\lambda\sigma_Y / E'} V_j \tag{3.21}$$

として与えられる。

3.1.3　RPG 荷重、き裂開口荷重の求め方 [29]

RPG 荷重は実き裂先端に引張塑性域が生じ出す時点の荷重であり、この時点のき裂開口変位は、最小荷重時と同様、重ね合わせの原理より次式で与えられる。

$$V_j = P_{RPG}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \tag{3.22}$$

ただし、この場合、き裂先端位置の棒要素の番号を $\left(k+1\right)$ とすれば $\sigma_{k+1} = \lambda\sigma_Y$ となる。したがって、

$j \neq k+1$ の要素については、

$$\left(\sigma_j\right)_{\ell+1} = \left[\left(P_{RPG}\right)_\ell \sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \lambda\sigma_Y F\left(x_j, x_{k+1}, a^*\right) - \sum_{i=1}^{k}\left(\sigma_i\right)_{\ell+1} F\left(x_j, x_i, a^*\right)\right.$$

$$\left. - \sum_{i=k+2}^{n}\left(\sigma_i\right)_\ell F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - L_j\right] \Big/ \left[\frac{L_j}{E'} + F\left(x_j, x_j, a^*\right)\right] \tag{3.23a}$$

$j = k+1$ の要素では、

$$\left(P_{RPG}\right)_{\ell+1} = \left[L_{k+1}\left(1 + \frac{\lambda\sigma_Y}{E'}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k+1}}^{n}\left(\sigma_i\right)_{\ell+1} F\left(x_{k+1}, x_i, a^*\right) + \lambda\sigma_Y F\left(x_{k+1}, x_{k+1}, a^*\right)\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_{k+1}, x_i, a^*\right)\right] \Big/ \sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_{k+1}, x_i, a^*\right) \tag{3.23b}$$

ここで、ℓ ：収束計算繰返し数

(3.22)式は Gauss-Seidel 表示しており、その収束過程で(3.11)式の置き換えを行うことで、解くことができる。

また、き裂開口荷重はき裂面が完全に開口する時の荷重であり、実き裂領域で応力を受け持たなくなる時点の荷重となる。き裂先端に接する実き裂内の要素、すなわち k 番目の要素が開口する瞬間を考えると $V_k = L_k$ となるから、

$j \neq k$ の要素については、

$$\sigma_j = \left[P_{op}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - L_j\right] \Big/ \left[\frac{L_j}{E'} + F\left(x_j, x_j, a^*\right)\right] \tag{3.24a}$$

$j = k$ の要素については、

$$P_{op} = \left[L_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \sigma_i F\left(x_k, x_i, a^*\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_k, x_i, a^*\right)\right] \Big/ \sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_k, x_i, a^*\right) \tag{3.24b}$$

(3.24)式では、未知数 σ_j と p_{op} に関する Gauss-Seidel 漸化式の形では与えていないので、解くに

際しては、(3.23)式のように漸化式の形に直す必要がある。(3.24)式を Gauss-Seidel 法で解く過程で、$j \le k$ の要素（実き裂内）の作用応力 σ_j が正になった場合には、$\sigma_j = 0$ と置き直すことで得られる σ_j が、$j \le k$ の要素全てについて 0 となっていれば（$\sigma_j < 0$ なる要素が $j \le k$ で存在しなければ)、収束した p_{op} がき裂開口荷重となる。もし $\sigma_j < 0$ なる要素が $j \le k$ で存在すれば、(3.24)式の k を $k-1$ と置き換え、上記と同様にして P_{op} を求め、$j \le k$ の要素全てについて $\sigma_j = 0$ となっていれば、収束した P_{op} がき裂開口荷重となる。

通常、$P_{RPG} > P_{op}$ であるが、圧縮残留応力場では、き裂先端に引張塑性域が生じた瞬間でも、き裂が閉口している場合がある。この場合、$P_{RPG} < P_{op}$ となり、$P_{RPG} \to P_{op}$ 間では引張塑性域はほとんど成長せず、この間の荷重増分は、主としてき裂開口のために働く。この場合には、上式で求められる P_{op} を P_{RPG} と置き換えることが必要である (3.3 節参照)。この場合には(3.23)式の解は、実き裂内で $\sigma_j < 0$ となる要素が存在する。

次の最大荷重時において、塑性域先端 a ((3.3)式による a) が a^* よりも大きくなる場合、除荷弾性域前方にまで引張塑性域が発達するから、(3.5)式がそのまま成立する。ただし、この場合 c は $c + \Delta c$ に変化している。すなわち、(3.3)式の P に次の最大荷重、c に $c + \Delta c$ を代入し、得られた a が a^* よりも大きい場合には、新しく得られた a を a^* と改めることにより最大荷重時のき裂開口変位 V_j は(3.5)式で求められる。一方、新しく(3.3)式で得られた a が a^* よりも小さくなる場合には、(3.5)式は成立しない。

次の最大荷重が RPG 荷重より大きくなる場合には、き裂は完全に開口していることになる(圧縮残留応力場で $P_{RPG} < P_{op}$ となった場合には P_{op} を P_{RPG} としている。3.3 節参照)。RPG 荷重が次の最大荷重より大きくなる場合（次の最大荷重が RPG 荷重より低い場合）にはき裂の進展は起こらないから、この過程の計算は無視して次のステップに進めばよい。前歴の影響域内に引張塑性域が留まる場合、重ね合わせの原理より(3.9)式と同じ関係が成立する(ただし、$P_{\min}$ を $P_{\max}$ に置き換える)。すなわち、

$$\left(1+\frac{\sigma_j}{E'}\right)L_j = P_{\max}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \tag{3.25}$$

したがって、

$$\sigma_j = \left[P_{\max}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - L_j\right] \Bigg/ \left\{\frac{L_j}{E'} + F\left(x_j, x_j, a^*\right)\right\} \tag{3.26}$$

ただし、　L_j ：直前の最小荷重時における棒要素のゲージ長

(3.25)式は Gauss-Seidel 法を用い、(3.11)式の置き換えをしながら、収束させることにより応力分布 σ_j が求められる。引張塑性域となっている領域は $\sigma_j = \lambda\sigma_Y$ であり、これにより塑性域先

端が求められる。

したがって、$x = x_j$ の位置における最大荷重時の COD(V_j)は(3.26)式で得られた σ_j を用いて、

$$V_j = P_{\max}\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_R\right)_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) \tag{3.27}$$

と与えられる。そして、この時点で $\sigma_j = \lambda\sigma_Y$ となっている要素についてはゲージ長 L_j は(3.6)式で与えられ、新たなゲージ長に変化する。

上記の取り扱いをすると、前歴の影響がないとして(3.3)式で求められた a が a^* となった時点でのき裂長さ c の時、前の塑性域の影響域をき裂が抜け出ることになる。しかも、この時点では、(3.26)式で求められる応力分布は、前歴の影響がないとした場合と全く同じになると同時に、ゲージ長の影響がなくなるので COD も両者で完全に一致する。

3.2　疲労き裂伝播解析におけるき裂増分と、塑性収縮係数が RPG 荷重におよぼす影響

き裂面の任意位置に単位集中荷重が作用する場合の任意位置におけるき裂開口変位 $V\left(x\right)$ が求められている場合には、その結果を、 $[B_i, B_{i+1}]$ で積分すれば、(3.4)式の $F\left(x_j, x_i, a^*\right)$ は 2 重積分をすることなく求められる。

ここでは、試験片幅 $2w$ の中央貫通き裂試験片（ただし、仮想き裂の大きさがリガメントに比して小さい場合、すなわち小規模降伏条件下）に対しての検討結果を示す。この試験片のき裂面の $\left|x\right|$ の位置で双集中荷重 p を受ける場合の $\left|x_j\right|$ における COD[19]は、次式で与えられる。

$$V\left(x_j\right) = \frac{8p}{\pi E'}\begin{pmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{pmatrix}\sqrt{\frac{1-\left\{\cos\left(\pi a^*/2w\right)/\cos\left(\pi x/2w\right)\right\}^2}{1-\left\{\cos\left(\pi a^*/2w\right)/\cos\left(\pi x_j/2w\right)\right\}^2}} \qquad \begin{pmatrix}\left|x\right| \le \left|x_j\right|\\ \left|x_j\right| < \left|x\right| \le a^*\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

したがって、$\left[-B_{i+1}, -B_i\right]$ および $\left[B_i, B_{i+1}\right]$ 間に単位一様分布応力が作用する場合の $\left|x_j\right|$ の位置における COD、$F\left(x_j, x_i, a^*\right)$ は

$$F\left(x_j, x_i, a^*\right) = \frac{8}{\pi E'}\int_{B_i}^{B_{i+1}}\begin{pmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{pmatrix}\sqrt{\frac{1-\left\{\cos\left(\pi a^*/2w\right)/\cos\left(\pi x/2w\right)\right\}^2}{1-\left\{\cos\left(\pi a^*/2w\right)/\cos\left(\pi x_j/2w\right)\right\}^2}}\,dx \qquad \begin{pmatrix}\left|x_i\right| \le x_j\\ x_j < \left|x_i\right| \le a^*\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

で与えられる。

また、無限遠で一様応力を受ける中央貫通き裂のき裂開口変位も解析的に求められており、(3.5)式などの右辺第 1 項は、

$$\sum_{i=1}^{n} s_i F\left(x_j, x_i, a^*\right) = \frac{8ws_i}{\pi E'} \cosh^{-1}\left\{\frac{\cos\left(\pi x_j / 2w\right)}{\cos\left(\pi a^* / 2w\right)}\right\} \tag{3.30}$$

ただし、ここでは$s_i = 1$

となる。

第 2 章で議論したように、疲労き裂は負荷過程でき裂先端に引張塑性域、除荷過程で圧縮塑性域が生じて初めて進展すると考えられる（図 2.17 などがこの考え方を支持している）。すなわち、この 1 サイクルでの非可逆エネルギー（ヒステリシスエネルギー）の一部が充当されて、極微小量のき裂が進展する（これがストライエーションと考えられる）。塑性変形が生じるために、単純な重ね合わせが成立せず、厳密には 1 サイクルごとに上記エネルギーに対応した微小なき裂進展を与える必要がある。これを実行するとなると膨大な計算時間を必要とする。

しかし、一定振幅荷重やブロック振幅荷重が作用する場合には、ある程度一度にき裂を進展させた計算を行っても、RPG 荷重には大きな差は生じないと期待される。疲労き裂は塑性域となった箇所に入ると考えられることから、繰返し塑性域寸法よりも、少なくとも小さくする必要がある。

(3.28)式～(3.30)式を用いた 3.1 節のき裂開閉口モデルにより、中央貫通切欠試験片の一定振幅荷重下（荷重外応力振幅 98MPa、R=0）において一度に進め得るき裂長さについての検討がなされている。図 3.9 および図 3.10 がその結果である [34]。なお、ここでは、$\sigma_Y = 356MPa, \lambda = 1$とし、新しくき裂になる場合の塑性収縮係数は考慮されていない（すなわち、$\alpha = 0$）。図 3.9 に示すように、$\tilde{\omega}$の 20%ずつ一度に疲労き裂を進展させた場合には、最小荷重時にき裂閉口域で作用する応力分布に大きな"みだれ"が生じている。一方、図 3.10 に示すように、$\tilde{\omega}$の 5%ずつ一度に疲労き裂を進展させた場合には、最小荷重時になめらかな作用応力分布が得られている。他の多くの検討結果でも、$\tilde{\omega}$の 5%づつ進展させる場合には、なめらかな応力分布となり、RPG 荷重も変動

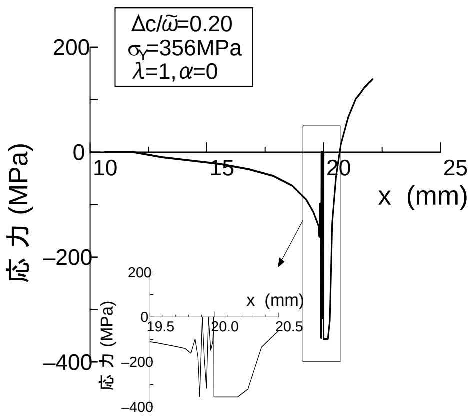


図 3.9　一度に疲労被害蓄積領域の 20%き裂を進める解析で得られた最小荷重時の応力分布

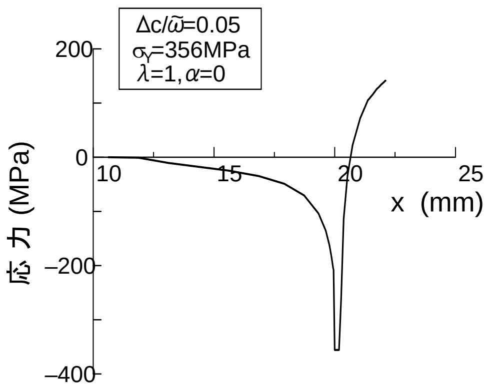


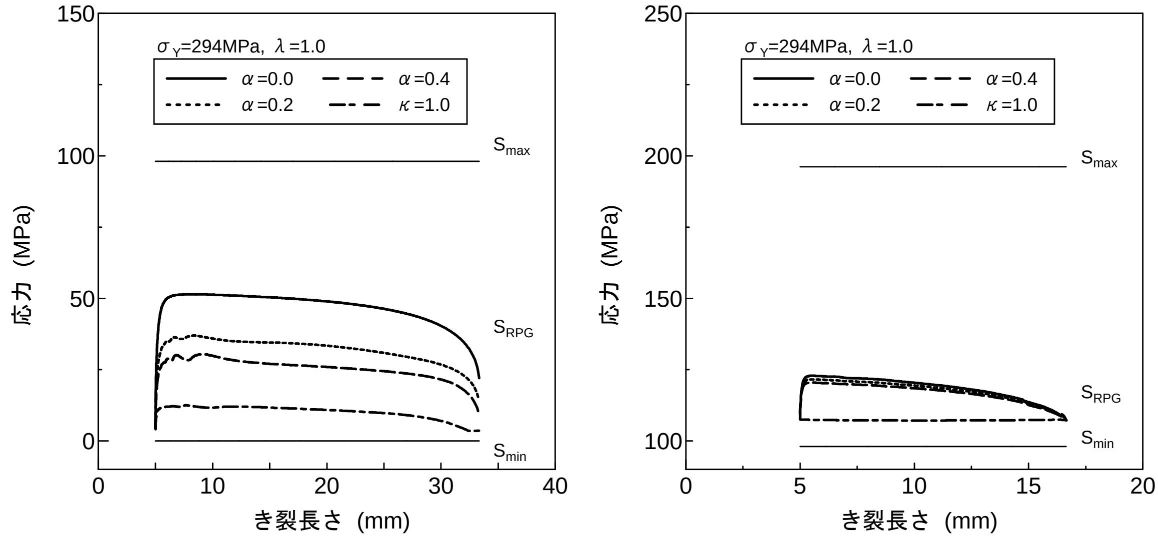
図 3.10　一度に疲労被害蓄積領域の 5%き裂を進める解析で得られた最小荷重時の応力分布

することなく、定性的には妥当な変化挙動を与えることが確認されている。

したがって、スパイク荷重など、その荷重振幅レベルでの 5%以下しか伝播しない場合を除き、解析上一度に進展させるき裂進展量を $\tilde{\omega}$ の 5%としている（もっと長くしても、RPG 荷重には影響しない可能性はあるが、その検討は未だ行われていない。)。

中央貫通切欠試験片の塑性拘束係数 λ は、1.6 節で示したように、通常溶接構造用鋼に対して最も大きくなると考えられる平面ひずみ条件下で 1.21、25mm 厚の試験片を用いた実験では約 1.04 である。また、Al 合金は 2 次硬化指数が大きいので、鋼よりも塑性拘束係数は大きくなるが、Al 合金の塑性拘束係数は、Newman が採用しているような約 3 というような大きな値にはならず、1.2 となっている [35]。 図 3.11 から図 3.13 は、試験片幅 100mm の中央貫通切欠材（切欠半長：5mm）について、種々の塑性拘束係数、ならびに塑性収縮係数を与え、応力比 R=0 および R=0.5 の一定振幅荷重下における RPG 荷重を推定した結果である [34]。

解析上き裂を初期切欠としているため、初期には最小荷重時にき裂は開口した状態で応力集中が無限大となり、RPG 荷重はほぼ 0 の状態から増大している。そして、き裂の進展に伴いき裂閉口域が成長し、定常状態になりき裂閉口域が発達しなくなると、RPG 荷重はほぼ一定に保たれる。しかし、き裂の進行につれて応力の集中度が大きくなるため、最小荷重からより少ない荷重増分でき裂が開口するため、徐々に RPG 荷重が小さくなっている。そして、仮想き裂先端が試験片端部に近づくにつれて、最大荷重時のき裂開口変位が、それまでの荷重増分に対する増加度合いより大きくなるため、除荷時にき裂閉口が生じにくくなり、急激に RPG 荷重が減少している。この結果は、図 1.2 のヒステリシスループ形状の変化挙動と良く対応しており、疲労き裂伝播速度が図 3.2 のように現されることを巧く説明できている。



(a) 応力比：0　　(b) 応力比：0.5

図 3.11　一定振幅荷重下での RPG 荷重の推定結果 (降伏応力 : 294MPa、λ=1.0)

塑性拘束係数λが大きくなるほど（高強度材になるほどと読み替えることもできる。）、RPG 荷重は大きくなる傾向にあり、その傾向は応力比が小さいほど著しくなっている。また、塑性収縮係数αが大きくなるほど実き裂に取り込まれる残留引張変形層が薄くなり、き裂閉口域が小さくなるために RPG 荷重が小さくなっているが、応力比が 0.5 ではその影響はあまり生じなくなっている。

図 3.11 から図 3.13 では、RPG 荷重に与える応力比の影響を明確にするため、応力比 0 と 0.5 の両者とも荷重振幅は同じにしている。塑性収縮係数αが大きくなるほど、実き裂内に取り込ま

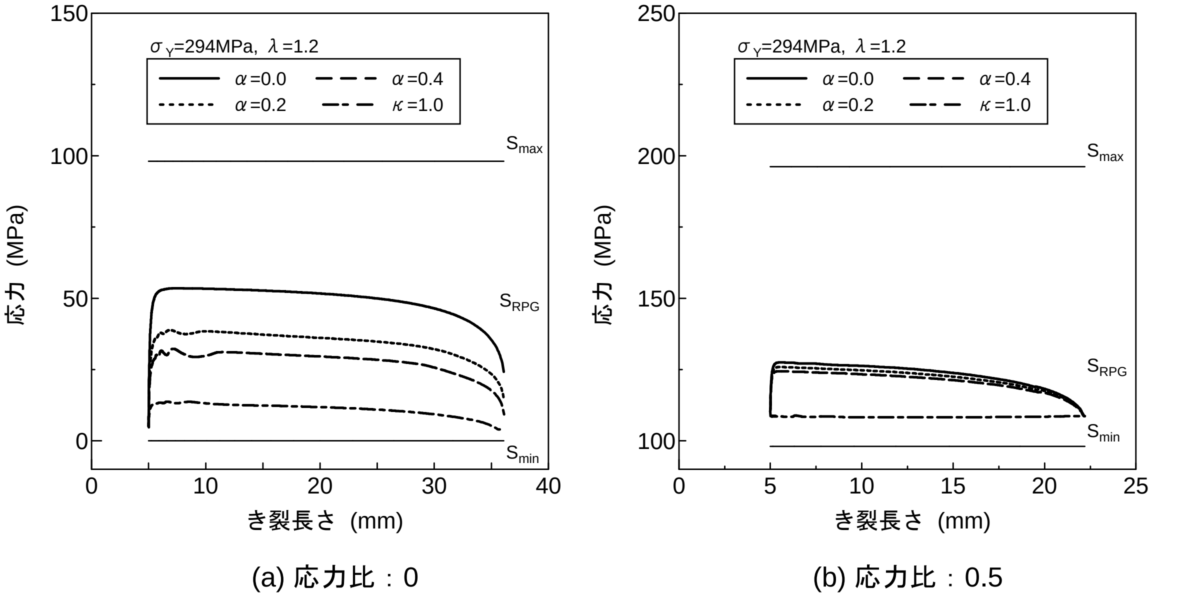


図 3.12　振幅荷重下での RPG 荷重の推定結果（降伏応力：294MPa、λ=1.2）

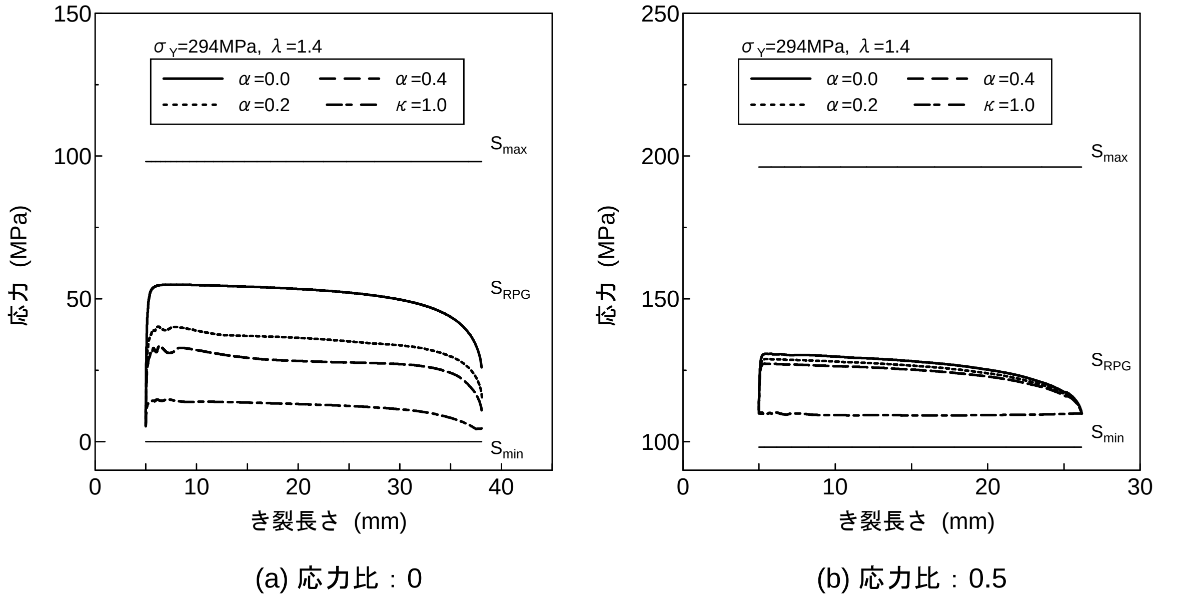


図 3.13　一定振幅荷重下での RPG 荷重の推定結果（降伏応力：294MPa、λ=1.4）

れる残留引張変形層が薄くなるため、RPG 荷重は小さくなっているが、応力比が高くなると、応力比 0 の場合よりも、RPG 荷重の α 依存性が小さくなっている。そのため、α が大きくなるほど応力比効果が小さくなることが分かる。そして、$\alpha \geq 0.6$ ではほとんど応力比効果が現れなくなることが期待される。塑性収縮係数は機械的性質と何らかの関係を有すると考えられるが、現時点では明らかにされていない（伸びおよび靭性が大きいほど、α は大きくなると期待される。)。

3.3 種々の荷重条件下での板厚貫通切欠材の疲労き裂伝播挙動

KA-36 鋼を供試材として作成された図 3.14 に示す板厚 4mm の中央貫通切欠付試験片を用いて、一定振幅荷重下での疲労き裂伝播試験がなされている [36]。残留応力を除去するために、試験片作成後 620℃、150 分の条件で熱処理が行われており、この熱処理後の降伏応力は 352MPa である。図 3.15 から図 3.17 で示している○印は、それぞれ応力比 0.05、0.3 および 0.5 の条件下における一定振幅荷重下の疲労き裂伝播試験を 2.2.1 項で説明した試験システムを用いて行い、反転法によって RPG 荷重が計測された結果である [13]。

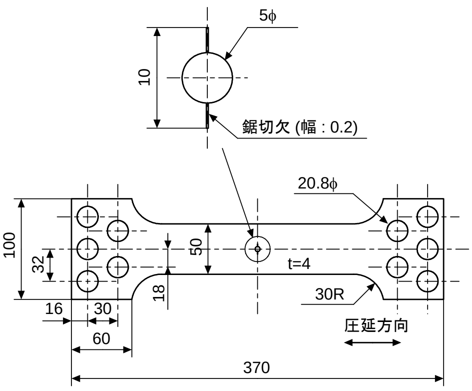


図 3.14　疲労き裂伝播試験で用いられた試験片

表 1.1 ならびに図 1.21 を参照して、塑性拘束係数 $\lambda = 1.04$ を仮定し、塑性収縮係数 α を種々仮定して RPG 荷重をシミュレートした結果が、図 3.15 に示されている。この鋼材では、図 3.15 に示すように、$\alpha = 0.18$ とすれば応力比が 0.05 というほぼ完全片振振幅荷重下における RPG 荷重の計測結果を、定量的に推定できていることが分かる。この $\lambda = 1.04$、$\alpha = 0.18$ を用いて、応力比が 0.3 および 0.5 の試験について、RPG 荷重を推定した結果が、それぞれ図 3.16 および図 3.17

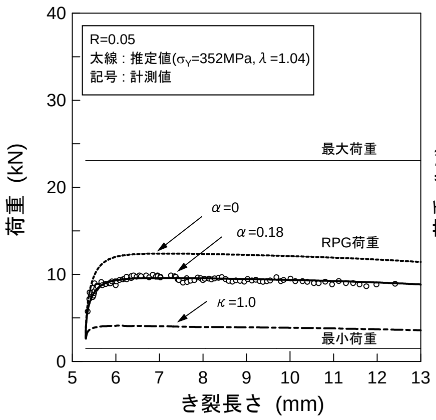


図 3.15　RPG 荷重の計測結果と、その推定結果（塑性収縮係数の設定）

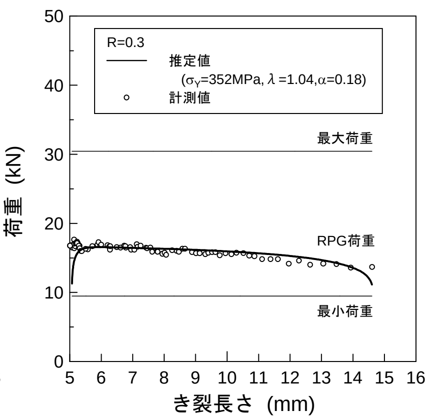


図3.16　RPG荷重の推定結果と計測結果(R=0.3)

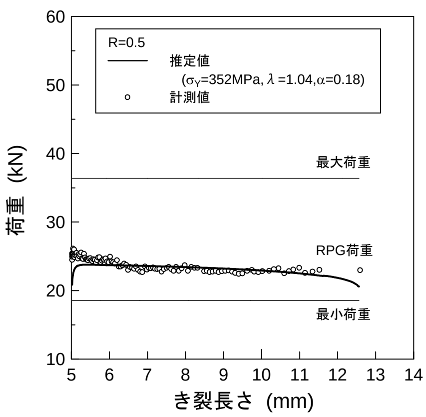


図3.17　RPG荷重の推定結果と計測結果(R=0.5)

に示されている。Newman が採用しているような大きな塑性拘束係数を用いなくても、RPG 荷重が定量的に推定できるている [36]ことが分かる。

図 3.18 は、上記の RPG 荷重計測結果より、ΔK_{RP} を求め、その時点に対応する疲労き裂伝播速度の計測結果との関係を求めたものである。図中には後述の図 3.24 で供試した、KA-32 鋼の応力除去焼鈍材の結果も併せて示してある。鋼では、強度レベルによらず、ΔK_{eff} と da/dN 関係は、ほぼ同じになっている（図 3.26 参照）ことを考慮すると、ΔK_{RP} と da/dN の関係も、強度レベルによらず鋼では、ほぼ同一視できると期待される。

そこで、軟鋼を用いて極低疲労き裂伝播領域における、ΔK_{RP} と da/dN との関係より得た図 2.20 の関係も実線で示されている。この結果から、ここで採用されている KA-36 鋼の応力除去焼鈍材（さらには KA-32 鋼も）と軟鋼とは、同じ $\Delta K_{RP} - da/dN$ 関係を有していると判断される。

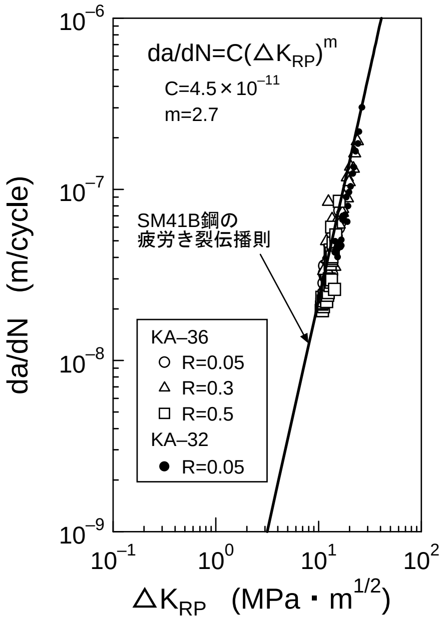


図 3.18　ΔK_{RP} と da/dN の関係

図 3.19 は、図 3.18 の ΔK_{RP} と da/dN との関係から得た C、m 値を用いて、疲労き裂成長曲線を推定した結果であり、計測結果と良く一致していることが分かる。なお、この場合、解析上の初期疲労き裂の長さは 2.5mm としている。図 3.20 から図 3.22 には、最大荷重を低下させるブロック振幅荷重下における疲労き裂伝播試験結果が示されている [36]。(a)図が RPG 荷重の計測結果と解析結果である。また、RPG 荷重解析結果と、図 3.18 の C、m 値を用いて得られた疲労き裂成長曲線と、その計測結果が(b)図に示されている。

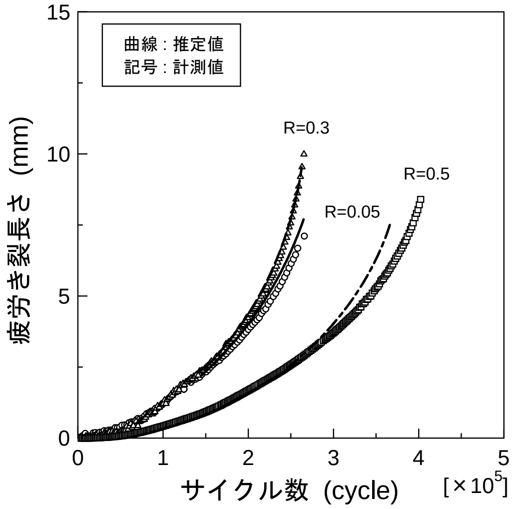
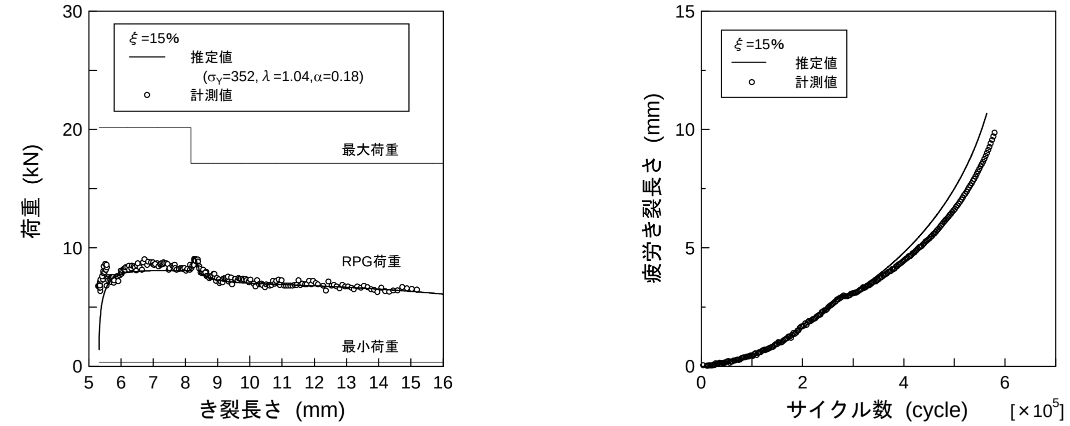


図3.19　一定振幅荷重下の疲労き裂成長曲線の推定結果と計測結果

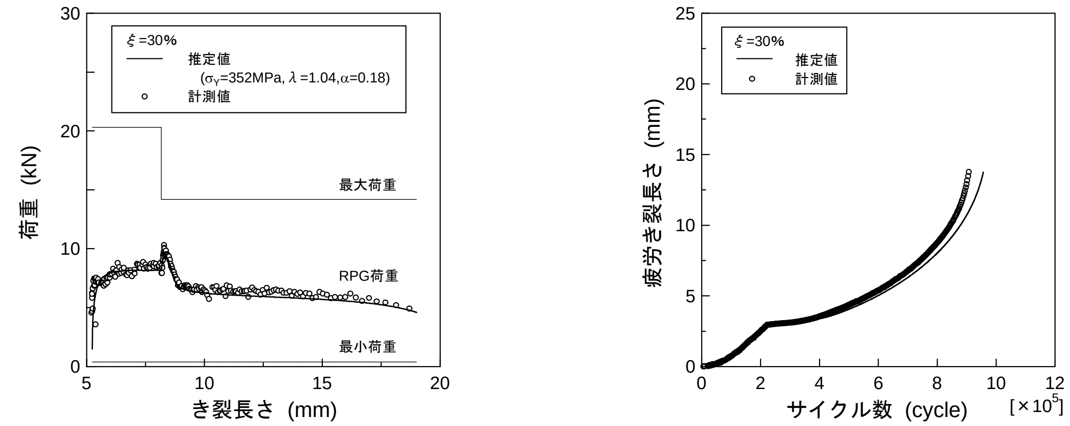
これらの試験片は、図 3.14 から図 3.16 の試験で用いられていた試験片を採取した鋼板と同一のものから作成され、同じ熱処理が施されている。最大荷重を低下させた直後は、RPG 荷重は一旦上昇し、最大値を示した後、徐々にある一定値に漸近する傾向がある。そして、最大荷重の低下率 ξ（＝荷重減少量/直前の最大荷重）が大きくなるほど、RPG 荷重の上昇量も大きくなっている。

この現象は複雑で、物理的に説明するのはかなり難しいが、解析手法を思い浮かべることによ



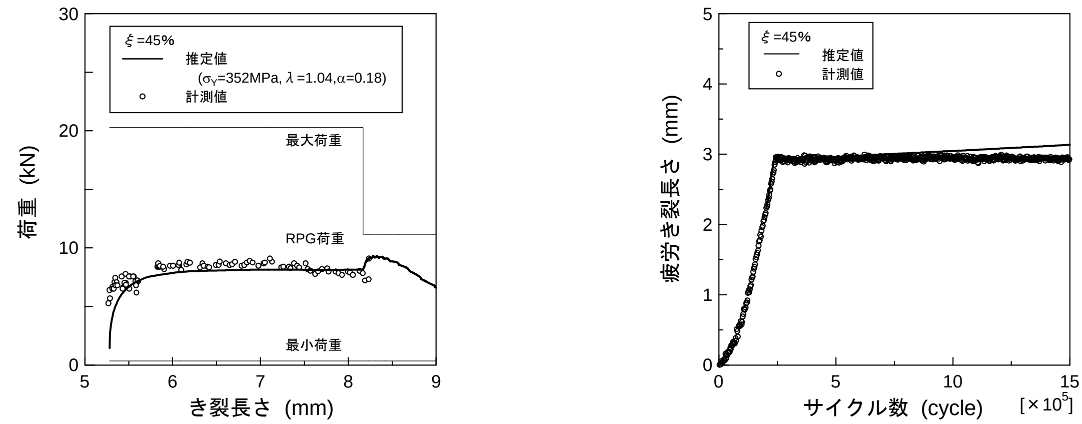
(a) RPG荷重　(b) 疲労き裂成長曲線

図3.20　最大荷重を低下させた直後のRPG荷重の遷移と疲労き裂成長曲線（最大荷重の低下率15%の場合）



(a) RPG荷重　(b) 疲労き裂成長曲線

図3.21　最大荷重を低下させた直後のRPG荷重の遷移と疲労き裂成長曲線（最大荷重の低下率30%の場合）



(a) RPG荷重　(b) 疲労き裂成長曲線

図3.22　最大荷重を低下させた直後のRPG荷重の遷移と疲労き裂成長曲線（最大荷重の低下率45%の場合）

り、以下のように説明できる。すなわち、最大荷重低下直後の最大荷重時のき裂開口変位は、その直前における最大荷重時のそれよりも小さい。しかし wake zone には、過去の大きな最大荷重

で生じた、大きな残留引張変形層が存在し、そのためにき裂閉口領域が大きくなり、RPG 荷重が上昇する。しかし、き裂が伝播するに従い、現在の一定振幅荷重下の定常状態に徐々に遷移するため、あるところで RPG 荷重は最大値を示す。そしてその後は、き裂成長とともに、現在の一定振幅荷重下の定常状態に漸近することになる。

図 3.20 から図 3.22 の(a)図より、静的負荷試験における全面降伏荷重から得られる塑性拘束係数 λ を用い、一定振幅荷重試験で決定される新しくき裂が進展する際の塑性収縮係数 α を用いれば、前節のモデルを用いて、ブロック振幅荷重下の RPG 荷重が定量的に推定できることが分かる（もちろん、き裂開口荷重も RPG 荷重と同様に求めることができるが、寿命評価時は $\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ の存在を考慮しなければならず、さらには、3.2.4 項での考察より、$\left(\Delta K_{eff}\right)_{th}$ は荷重履歴の影響を受け、一定値に保たれないことから、ΔK_{eff} で疲労き裂成長を論ずるより、ΔK_{RP} で論じる方が、種々の現象を妥当に評価できる。）

また、図 3.20 から図 3.22 の(b)図より、ΔK_{RP} の推定結果を用いると、最大荷重が低下する場合にも、妥当な疲労き裂成長曲線が推定されている。特に、最大荷重の低下率が大きいと、図 3.22(b)に示すように、直後に僅かに進展するものの、最終的には、RPG 荷重が大きくなり、有効荷重振幅が小さくなるために、疲労き裂が停留する現象が生じる。解析では、完全にき裂は停留していないが、実質的には停留した状態に近く、非常に良く、疲労き裂成長曲線が推定されていると判断できよう。

KA-32 鋼板より図 3.14(ただし、切欠半径 1mm、幅 2mm で 10mm 長さの切欠を有する試験片)に示した中央貫通き裂形ディープ・ノッチ試験片を採取し、残留応力除去焼鈍した後、幅中心線

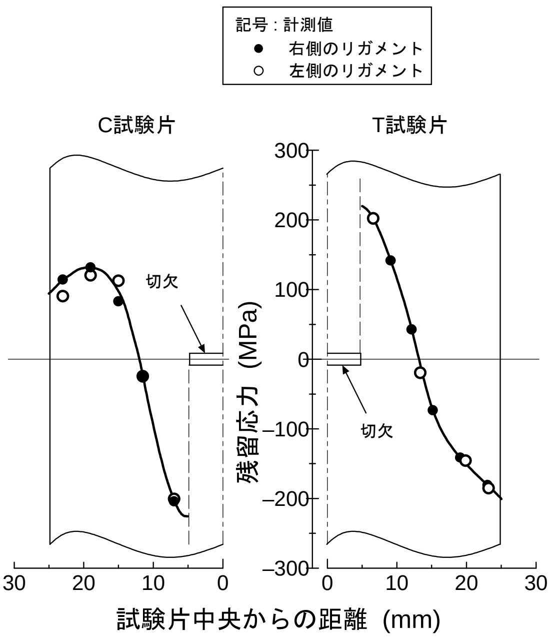


図 3.23　ガス線状加熱材の残留応力

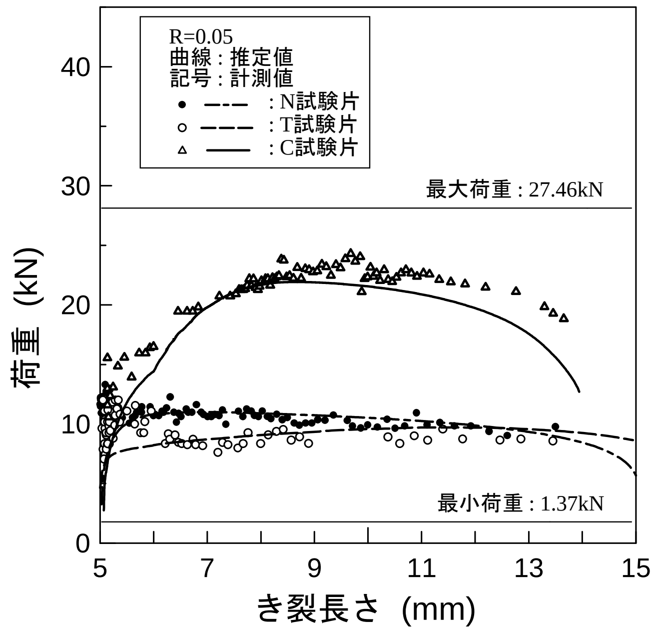


図 3.24　残留応力が作用する場を進展するき裂の RPG 荷重の変化

上を長手方向に線状ガス加熱した試験片（T 試験片）、および、両端から 4mm 離れた位置を長手方向に同時に線状ガス加熱した試験片（C 試験片）に対して、その残留応力分布が応力弛緩法にて求められている [37]。図 3.23 がその結果である。T 試験片では、切欠底部に引張の残留応力が、C 試験片では圧縮の残留応力が働いていることが分かる。これらの試験片に加え、残留応力除去焼鈍したままの試験片（N 試験片）に、同じ最大/最小荷重の一定荷重振幅を与えた疲労き裂伝播試験が実施された。その試験で計測された RPG 荷重の変化が、図 3.24 に示されている [37]。

T 試験片の RPG 荷重は、N 試験片のそれより小さくなっており、引張残留応力により、き裂閉口域が小さくなり、その結果 RPG 荷重が小さくなったものと理解される。また、切欠先端に圧縮残留応力を導入した C 試験片の RPG 荷重は、N 試験片のそれより大きくなっており、圧縮残留応力により、き裂閉口域が大きくなっていることが想像される。

KA-32 鋼と KA-36 鋼の疲労特性は、ほとんど変わらないと考えられることから、$\lambda = 1.04$、$\alpha = 0.18$ として、図 3.23 の残留応力分布下での RPG 荷重の推定を行った結果も図 3.24 中に示されている。ここで降伏応力は、計測された 339MPa が使用されている。C 試験片の RPG 荷重推定結果が計測結果よりも、多少低めになっているが、残留応力の測定精度などを勘案すると（C 試験片で測定された残留応力分布（図 3.23 参照）において切欠先端付近で直線状に外挿すると残留応力は小さくなり、RPG 荷重は初期にかなり高くなる）、妥当な推定結果が得られていると判断されている。

なお、図 3.25 は C 試験片のシミュレーションにおいてき裂長さが 6.02mm の時点における、最小荷重から最大荷重に至る負荷過程での、特徴点における応力分布、き裂開口変位ならびに残留引張変形層厚さ分布を取り出したものである。(a)、(b)、(c)、(d)図と進むにつれて、荷重が大きくなっている。図 3.25 (a)の最小荷重時には、完全にき裂は閉口しているが、き裂閉口域で働いている圧縮応力は、き裂内部でほぼ一様であるが、実き裂先端では小さな圧縮応力が働いている。これより負荷が進むと、き裂が完全に開口しない間に、き裂先端で引張降伏することが図 3.25 (b)より分かる。さらに負荷すると、き裂は完全に開口する。まさに開口した時点が図 3.25(c)である。そして、負荷とともに引張塑性域が成長して、図 3.25(d)の最大荷重に至る。このように、圧縮残留応力場では、き裂が完全に開口していない状態で、引張塑性域がき裂先端に現れることがある。そして、完全にき裂が開口するまで、引張塑性域はほとんど発達せず、図 3.25 (b)から(c)に至る荷重増分は、ほとんどき裂開口のために費やされている。

2.2.3 項での RPG 荷重は、コンプライアンス変化が、負荷過程と除荷過程で同じになることを利用して反転法で測定されており、この観点からは、RPG 荷重は引張塑性域が拡大し出す瞬間の荷重ということになる。また、疲労被害が蓄積するという観点からも、引張塑性域が拡大し出す瞬間の荷重から最大荷重に至る荷重振幅が、真に疲労き裂進展に寄与する荷重範囲ということに

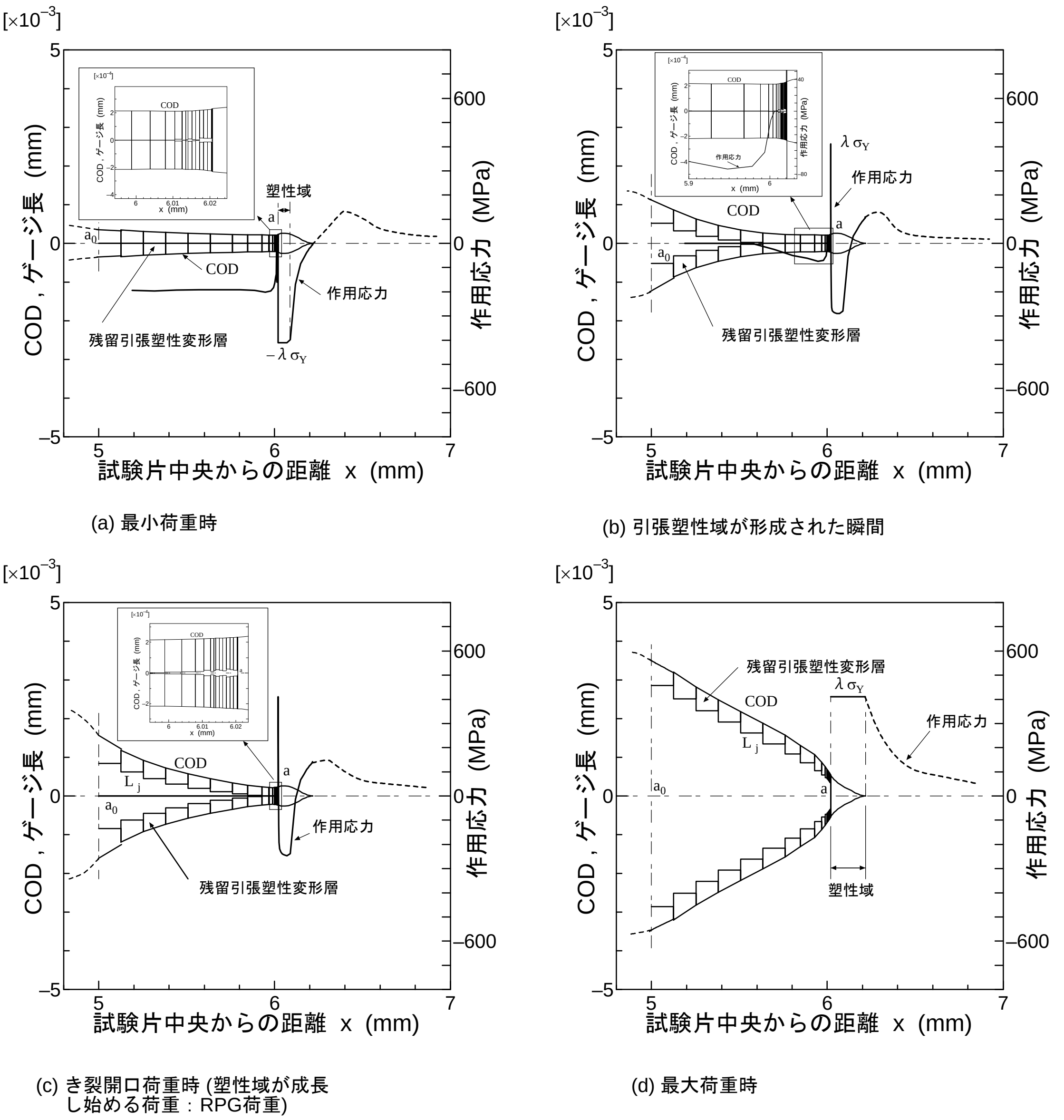


図 3.25　圧縮残留応力場を進展するき裂の特徴点におけるき裂開口変位、作用応力分布および残留引張変形層の厚さ分布

なる。したがって、図 3.25 でのＣ試験片の RPG 荷重推定値は、上記図 3.25(c)における荷重として求められている。

図 3.26 は、図 3.24 に示した RPG 荷重の推定結果を用いて、計算上の初期疲労き裂長さを 1.5mm にして、疲労き裂成長曲線を推定した結果であり、切欠先端が圧縮残留応力場となるＣ試験片が、実験値より、多少短寿命側に評価されているものの、非常に良く疲労き裂成長曲線を推定できていること（通常、疲労寿命は対数軸で表示されているので、この表示を使用すると一見良く一致しているように見せることができる）が理解されよう。なお、N 試験片の実験で計測された $\Delta K_{RP} \sim da/dN$ 関係は、図 3.17 中に●印で示されているが、ここで用いられた KA-32 鋼につい

ては、軟鋼(SM41B 鋼)および KA-36 鋼のそれと同じと判断され、疲労き裂成長曲線の推定で用いられた C、m 値は、図 3.18 中のものである。

図 3.13 の試験片を採取した同一の KA-32 鋼板から採取した中央貫通切欠付試験片（ただし、試験片幅 100mm、切欠半長 5mm）に、同様の熱処理を施し、それに単一の過大荷重を与えた疲労き裂伝播試験が、日本造船研究協会の共同研究として実施された [38]。すなわち、最大荷重の 1.5 倍、2 倍および 2.5 倍と 3 レベルの過大荷重を作用させた実験が実施された。図 3.27 から図 3.29 の(a)図は、過大荷重比（＝過大荷重/最大荷重: over load ratio）が、それぞれ 1.5、2.0 および 2.5 の場合に計測された RPG 荷重である。

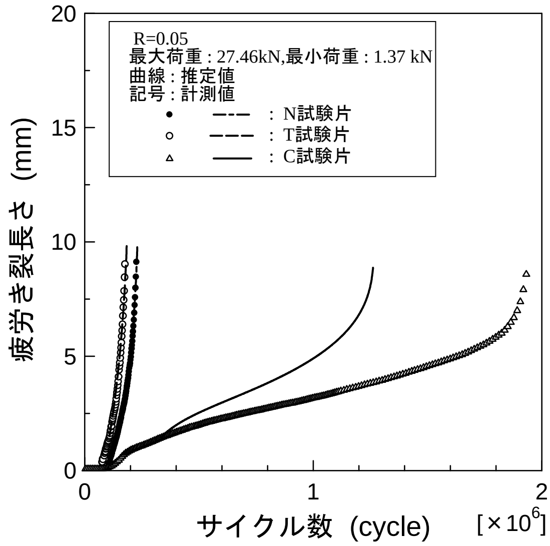
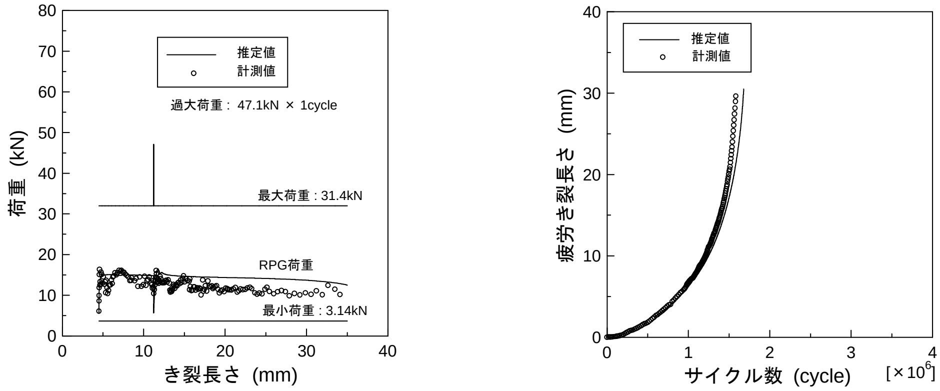


図 3.26　残留応力場が疲労き裂成長曲線におよぼす影響

過大荷重が作用した直後は、過去の残留引張変形層の厚さが、過大荷重時に形成されるき裂前方の塑性変形層に比して、十分小さくなり、自然き裂と同じ状態に近づくから、一旦き裂開口が起こりやすくなり、RPG 荷重が低下する。また、過大荷重によって生じた大きな残留引張変形層が、多少はその後の圧縮塑性変形により薄くはなるものの、き裂進展に伴い実き裂に取り込まれるために、き裂閉口域が定常振幅荷重下よりも大きくなる結果 RPG 荷重は大きくなり、あるところで最大値を示した後、一定振幅荷重下の定常状態に RPG 荷重が漸近していく傾向にあることが、図 3.27 から図 3.29 の(a)図から想像できる(すなわち、過大荷重が作用すると、遅延加速減速現象が現れることになる。)。そして、RPG 荷重が最大となる時期ならびにその値は、過大荷重比が大きいほど、遅く現れると同時に大きくなる。

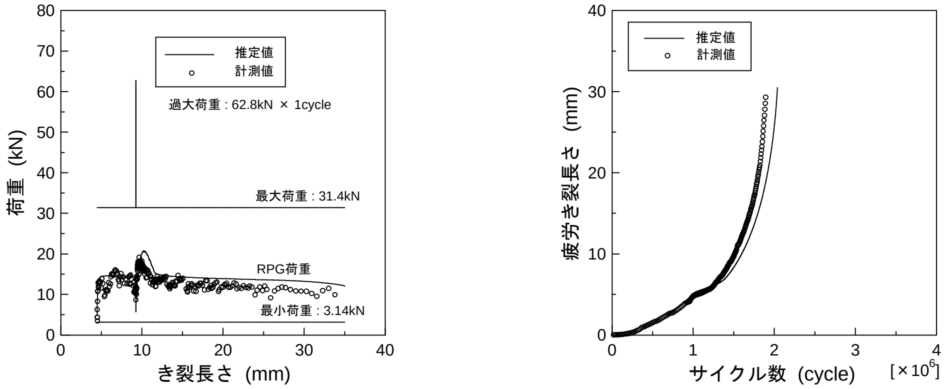
図 3.27 から図 3.29 の(a)図には、RPG 荷重のシミュレーション結果も示されており、さらに(b)図には推定された RPG 荷重を用いて疲労き裂成長曲線を計算した結果（ただし、計算上の初期疲労き裂長さを 2mm としている。）が、実験結果とともに示されている。これらの結果から、過大荷重が作用した場合にも、一定振幅荷重下での塑性収縮係数や塑性拘束係数を用いて、RPG 荷重が妥当に評価できていることが分かる。

中央貫通切欠付試験片(試験片幅 150mm、初期切欠半長 22mm)に、ある期間平均応力を一定に保持し、負荷振幅を徐々に増大させ、あるサイクルから徐々に減少させた荷重パターン（船が嵐の中心を横切って航行する場合の変動荷重パターン；嵐モデル(storm model)荷重 [39] と呼ばれている）を組み合わせて、作用させた実験も日本造船研究協会の共同研究で行われている [40]。図 3.30



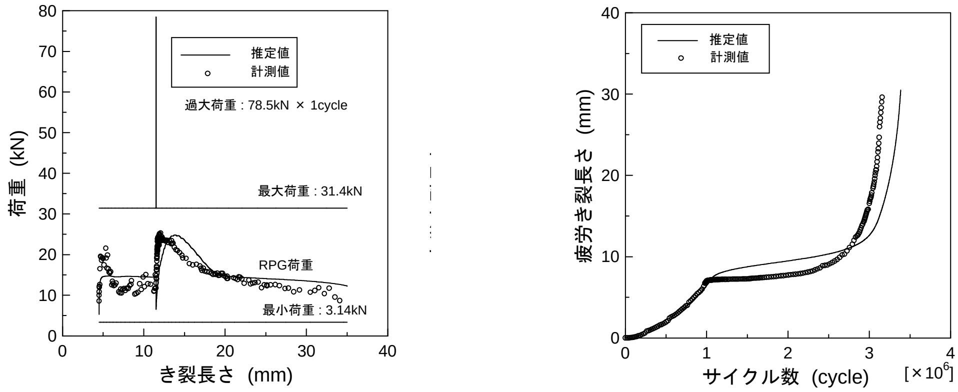
(a) RPG荷重　　(b) 疲労き裂成長曲線

図3.27　単一過大荷重による遅延減速現象（過大荷重比1.5の場合）



(a) RPG荷重　　(b) 疲労き裂成長曲線

図3.28　単一過大荷重による遅延減速現象（過大荷重比2.0の場合）



(a) RPG荷重　　(b) 疲労き裂成長曲線

図3.29　単一過大荷重による遅延減速現象（過大荷重比2.5の場合）

は、荷重振幅が同じ 10 個の嵐を 1 つのブロックとして、平均応力が０MPa の状態および平均応力が 80MPa の状態で繰返し与えた場合の疲労き裂成長曲線である。平均応力が高い場合には、き裂成長が明確に生じているが、平均応力が小さい区間では、ほとんどき裂が進まないという結果が、実験結果と同様、RPG 荷重のシミュレーション結果をもとにした推定で得られている。また、

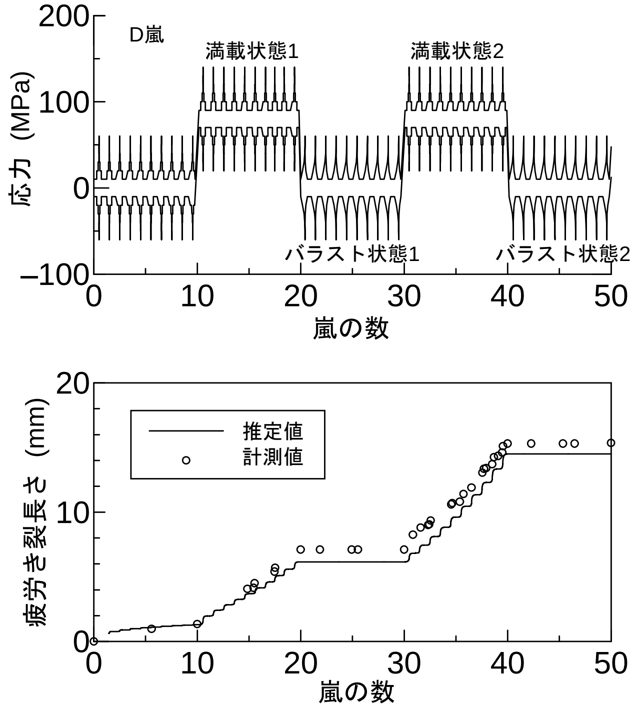


図 3.30　同じ嵐が 2 レベルの平均応力下で繰返し作用する場合の疲労き裂成長曲線

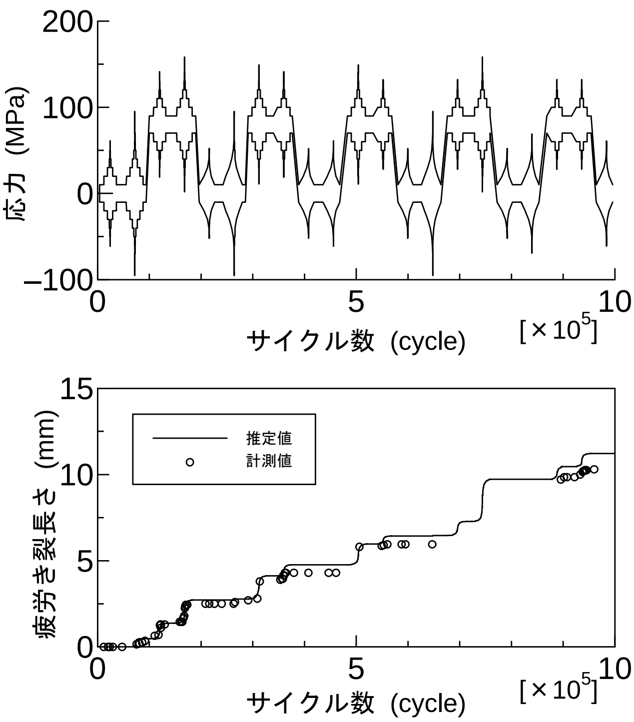


図 3.31　ランダムに種々の嵐が作用する場合の疲労き裂成長曲線

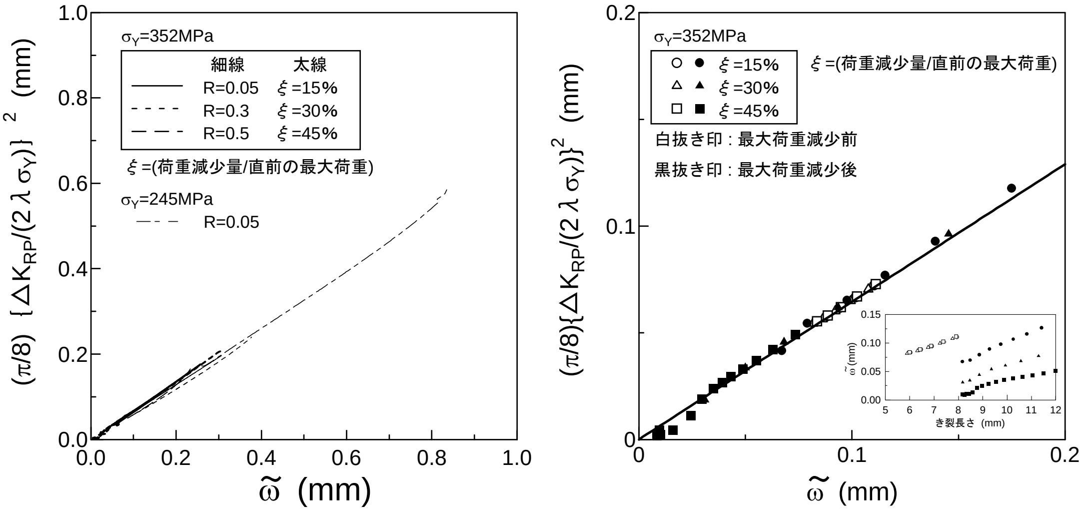
平均荷重が小さいバラスト状態 1 で全くき裂が成長しなかった場合でも、その後平均荷重が大きくなった時点で RPG 荷重が、バラスト状態 1 の直前よりも低下し（小さい平均荷重時に圧縮降伏し、残留引張変形層が薄くなり）、き裂成長に加速現象が生じることもシミュレーションで得られており、明確ではないが実験でもこの現象が現れているように見られる。

図 3.31 は、大きさの異なる 2 つの嵐を 1 つのブロックとし、平均応力が小さいレベルおよび平均応力が高いレベルで繰り返される場合に計測された疲労き裂成長曲線である。ただし、この場合、嵐の種類は 5 種類の嵐からランダムに選出している。図には実線で RPG 荷重の推定結果から推定した疲労き裂成長曲線も示している。図 3.30 と同様、解析において妥当な疲労き裂成長曲線が得られていることが分かる。なお、図 3.30 および図 3.31 の解析では、初期疲労き裂長さを 5mm とし、初期切欠長さの 7 mm に達するまで、最初に与える荷重振幅を与えた後、嵐荷重を与えて RPG 荷重を求めている。

1 サイクル中の最大荷重での引張塑性域と、最小荷重での圧縮塑性域が重なる領域でのみ、塑性仕事がなされる。この重なる領域寸法との関係を、3.1 節で示した解析プログラムを用いて調査した結果が図 3.32 に示されている。一定振幅荷重下だけでなく、変動荷重下の場合も含めて、

$$\tilde{\omega} = \eta \frac{\pi}{8}\left(\frac{\Delta K_{RP}}{2\lambda\sigma_Y}\right)^2 \tag{3.31}$$

ただし、$\eta = 1.55$



(a)　　(b)

図3.32　疲労被害を受ける領域寸法との関係

なる関係が成立している [5)]。(3.31)式で、$\eta \to 1$、$2\lambda\sigma_Y \to \sigma_Y$ および $\Delta K_{RP} \to \Delta K$ とすれば、小規模降伏条件下での単調負荷過程における引張塑性域寸法を与える式となっている。ΔK_{RP} で種々の疲労き裂伝播現象が定量的に評価されることと、(3.31)式が成立することを考慮すると、疲労き裂伝播速度は、疲労被害蓄積領域寸法 $\tilde{\omega}$ によって律されていると考えても良いことになる。これは、直感的感覚と一致する。

以上のように、板厚貫通き裂に対しては、種々の疲労き裂伝播現象が本節のモデルにより、定量的に推定できることが分かる。

4.　繰返し負荷中の突然塑性ひずみ増加現象

4.1　疲労現象解明を拒んできた古典塑性学と繰返し負荷中の突然塑性ひずみ増加現象

３章で説明したように、新しく破面が出来るなど非可逆的な現象が生じるためには塑性仕事がなされなければならない。繰返し荷重によりき裂が発生して、連続的に進展するためには各サイクルの最大荷重時に引張塑性域、最小荷重時に圧縮塑性域が出現することが必要条件になる。

図 4.1 は、一定荷重振幅を受ける切欠底における応力－ひずみ履歴を、R.Hill を始めとする古典弾塑性学の理論体系 [41)、42)]に従って、模式的に示したものである。大きな荷重振幅が働く場合、図(A)の荷重履歴にあるように、P_0 から P_1 となる間に応力～ひずみ線上では、図(B-a)の O 点から U 点に移行する。その間はじめは線形的に、そして引張塑性状態になり上に凸の曲線上を移行する。最大荷重 P_1 から除荷過程に入ると、初め線形的にひずみは小さくなるがあるところから圧縮塑性域が形成され、下に凸の曲線上を移行し、最小荷重 P_2 に至り、応力～ひずみ線上では L 点に至る。その後負荷過程に入り最大荷重 P_3 になる過程では、図 4.1(B-a)では L → U と移行し、P_1 時の U 点

と同じ点に収斂する。以後、き裂が入るまでは U→L→U→L を繰返し、1 サイクル毎に同じ曲線上を移行し、1 サイクルにおける塑性ひずみ増分は同じとなる。

一方荷重振幅が小さい場合、図 4.1(B-b)に示すように引張負荷過程のある荷重から引張塑性域が現れ、応力－ひずみ関係が上に凸の曲線となり、O 点から U 点に移行する。最大荷重から除荷過程に入ると U 点から線形的にひずみが小さくなる。そして荷重振幅が小さい場合には、除荷過程で圧縮塑性域が現れず、応力-ひずみ線図上で U 点から L 点の最小荷重時まで線形的に変化する。その後、L→U→L→U・・・と線形的変化を繰り返すだけで、塑性変形は進行しない。この場合、疲労は生じないと判断される。

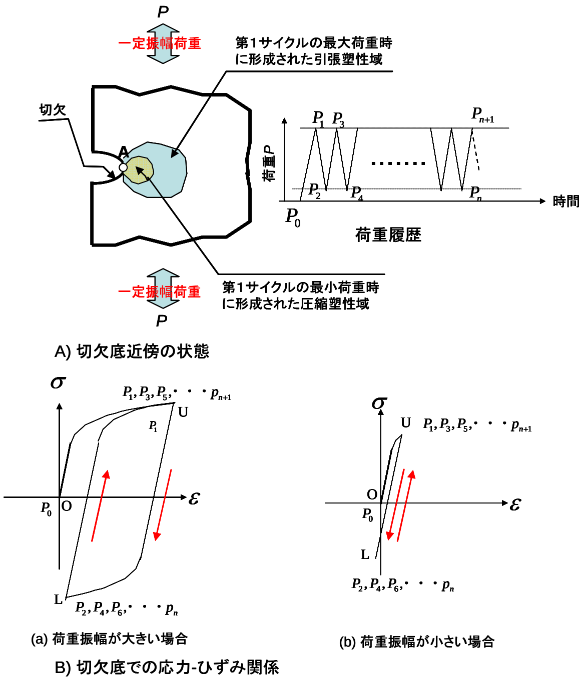


図 4.1 繰返し荷重を受ける切欠底での応力-ひずみ関係の推移の模式図（古典弾塑性論）

さらに荷重振幅が小さくなると第一サイクルの最大荷重時にも塑性が現れない。当然この場合にも疲労き裂は発生しないと判断されよう。したがって、応力振幅が降伏点の 2 倍以下の場合には、疲労き裂は生じないはずである。

しかし、図 4.2（第 1 編図 2.1 を再記したもの）に示す[43]ように鋼溶接突合せ継手の疲労限が強度レベルにかかわらず 150MPa 程度となっていることから分かるように、巨視的には弾性状態しか生じなくても疲労き裂が発生している。すなわち、突合継手の応力集中係数はたかだか 2 であり、800MPa 級高張力鋼では 150×2=300MPa（＜800MPa）であり、明らかに古典弾塑性学に従うと 1 サイクル中ずっと弾性状態にあるのに疲労破壊が進行していることになり、なぜ塑性状態にならないのに疲労き裂が発生・成長するのかという疑問が生じる。このように弾性状態の繰返しだけしか生じていないはずなのに、S-N 曲線からは疲労過程が進行しているという現実に出会い、連続して疲労過程が進行するためには最大荷重で引張塑性域、最小荷重で圧縮塑性域が形成されることが必要条件となると

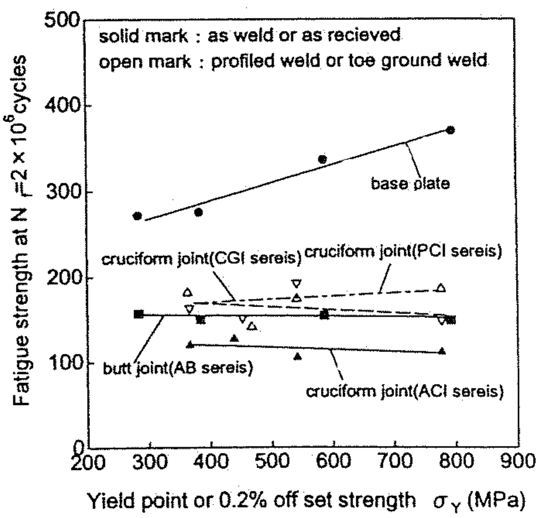


図 4.2　広幅溶接継手の疲労限と母材降伏点との関係

いう概念の研究・発展を古典弾塑性論が拒んできたと考えられる。

しかし、一定荷重振幅を与えた場合、第 1 サイクルで巨視的には弾性状態しか現れないような状態の場合でも、ずっと繰返し荷重を与え続けると、あるサイクルから急に塑性ひずみが生じ出す現象[44)]の存在が明らかにされた。そしてその後疲労き裂発生に至る[45)]。一般に疲労き裂発生前の特定サイクル時に得られた応力－ひずみ曲線の頂点（一般に最大応力点）を連ねることにより、繰返し応力－ひずみ曲線が得られ、材料の繰返し硬化・軟化特性の把握に用いられている。また、巨視的弾性応力を繰返し与えた場合に塑性ひずみが発生する最小の応力は“繰返し応力下の降伏応力”と呼ばれることもあり、巨視的弾性域で繰返し軟化を示す多くの鋼材の場合、静的・単調試験で得られる降伏応力と比較して遥かに小さな値となる。なお、この“繰返し応力下の降伏応力”は、比例限、もしくは疲労限応力に影響を与えていると考えられる。

近年、大沢ら[46)、47)]は繰返し変形を取り扱えるように拡張した結晶弾塑性有限要素解析手法を用いて、疲労き裂発生の起点となる塑性すべり顕在化のメカニズム解明を目指した研究を行っている。一方、材料の構成モデルに関する従来の研究では、降伏応力以上の応力を対象とする（極）低サイクル疲労過程の応力－ひずみ関係を記述するものが主流であり、巨視的弾性条件下で発現する塑性ひずみ急増現象など、高サイクル域の変形挙動に適用可能な材料モデルは提案されていなかった。巨視的弾性条件を含む任意の変動荷重下に適用可能な材料構成モデルが構築されれば、そのモデルに基づく疲労き裂発生規準が確立される可能性がある。さらに有限要素法などの数値解析手法へ導入することにより、疲労き裂発生から伝播に至る一連の疲労き裂発生・伝播シミュレーションが可能となり、疲労寿命評価に対する極めて有力な手法となる。

これまで著者らは、巨視的弾性条件下への適用を目指した繰返し塑性構成式を提案している。この構成式は、下負荷面[48)]、弾性境界面および損傷の概念を導入した非古典弾塑性構成式であり、滑らかな弾塑性遷移や僅かな塑性変形の累積に伴うダメージの影響も取り込めるように定式化されている[49)]。また、繰返し載荷に伴うダメージの蓄積と塑性ひずみ急増現象および繰返し応力－ひずみ曲線との関係について考察が行われている[49)]。

そこで本節では、巨視的弾性条件下への適用を目指して拡張されている繰返し弾塑性構成式に関する研究の概要を示す。まず砂時計型の丸棒試験片に加工した供試材料 SN490B の巨視的弾性条件下における両振り繰返し載荷に伴う応力－ひずみ関係の実験結果について示す。次に、新たに提案されたダメージパラメタおよび移動硬化特性を導入した構成モデルの応答と計測値との照査結果について説明する。最後に、繰返し載荷に伴うダメージの蓄積と塑性ひずみ急増現象および繰返し応力－ひずみ曲線との関係について考察している。

4.2　弾塑性モデル

4.2.1 正規降伏面、下負荷面および弾性境界面

本項で示す弾塑性構成モデル[50)、51)、]は、弾性応答から弾塑性応答への滑らかな遷移および繰返し負荷挙動の表現を目的として提案された非古典弾塑性モデル[48)、52~54)]を元に定式化されている。

本モデルは、古典論における降伏面（以降、"正規降伏面"と呼ぶ）の内部に、常に現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ を通り正規降伏面に相似な形を保ちながら、移動、膨張・収縮する下負荷面を導入している。ここで、正規降伏面に対する下負荷面の相似比を R（以降、"正規降伏比"と呼ぶ)、それら 2 つの面の相似中心を $\mathbf{S}$ とする。

なお、従来提案されてきた下負荷面モデル[48)、52~54)]は、弾性挙動を明確に堅持する材料に対しては、降伏面内部での塑性変形を過度に予測すること[49)]が指摘されている。そこで、下負荷面の大きさが特定の値よりも小さな場合に純粋な弾性応答を示し、かつ弾性応答から弾塑性応答への滑らかな遷移挙動の表現を目的として、"弾性境界面"およびそれに適合した材料関数を導入したモデル[50)、51)]が以下のように提案されている。

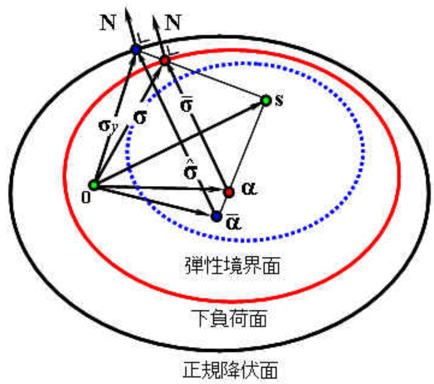


図 4.3　応力空間における弾性境界、下負荷面および正規降伏面

正規降伏面、下負荷面および弾性境界面が以下のように表現できると仮定する（図 4.3 参照)。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}},\mathbf{H}) = F(H) \tag{4.1}$$

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}},\mathbf{H}) = RF(H) \tag{4.2}$$

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}},\mathbf{H}) = R^e F(H) \tag{4.3}$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\alpha} \tag{4.4}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} \tag{4.5}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \mathbf{s} - R(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (\bar{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{s} = R(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{s})) \tag{4.6}$$

f および F は負荷面の形状と位置を規定する負荷関数および等方硬・軟化関数である。また、R^e は正規降伏面の大きさに対する弾性境界面の大きさの比を表すスカラー値である。$\boldsymbol{\alpha}$ は応力空間における正規降伏面の移動を表す移動硬化変数であり、いわゆる背応力に対応している。また、スカラー H は等方硬化変数であり、$\boldsymbol{\sigma}_y$ は下負荷面上の現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ に対応する正規降伏面上の共役応力である。

そこで、繰返し負荷時の材料挙動における特徴的な応答の一つである Masing 効果☆の表現を目

☆ 降伏面にある点 A から除荷した後、再負荷した場合、点 A を通って処女材の応力～ひずみ曲線上にもどる法則を Masing 則と呼んでいる。

的として、相似中心 **s** を導入する。また、一般性を有する定式化のために 2 階のテンソルに限定されない移動硬化変数 $\boldsymbol{\alpha}$ 以外の異方性テンソルを **H** としている。

4.2.2　弾塑性構成式

ストレッチング **D**（速度勾配 **L** の対称部分）は、弾性ストレッチング $\mathbf{D}^e$ と塑性ストレッチング $\mathbf{D}^p$ の和で表されるとする。つまり、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \tag{4.7}$$

また、弾性ストレッチングは次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1}\mathring{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.8}$$

ここに、$(^\circ)$は共回転速度を表わしている。**E** は Hooke 則型の弾性係数テンソルとして、次式で与えられる。

$$E_{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.9}$$

ここに、ν および E はそれぞれポアソン比およびヤング率を示し、δ_{ij} は Kronecker のデルタ、つまり $i = j : \delta_{ij} = 1$、$i \neq j : \delta_{ij} = 0$ を表している。

硬化材料の場合、一般に応力の増加に伴って弾性応答から弾塑性応答へ滑らかに移行することを考慮すると、塑性変形が進行する場合、現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ を常に含む下負荷面は膨張を続け、ついには正規降伏面に一致すると考えられる。従って、下負荷面の膨張速度 $\dot{R}$ は、塑性負荷過程（$\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}$）において、次の関係を満たす必要がある。

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{R} \to \infty & \text{for} \quad R \to R^e & (0 \le R \le 1) \\ \dot{R} = 0 & \text{for} \quad R = 1 & (0 \le R^e \le 1) \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

また、材料に対する損傷も同様に、塑性変形と共に滑らかに進展すると考えられることから、上の関係を満たす下負荷面の膨張速度 $\dot{R}$ として、次式が提案されている（図 4.4 参照）。

$$\dot{R} = mU \, \|\mathbf{D}^p\| \, (\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}) \tag{4.11}$$

ここに、

$$U = -(1-D)\ln\frac{R - R^e}{1 - R^e} \tag{4.12}$$

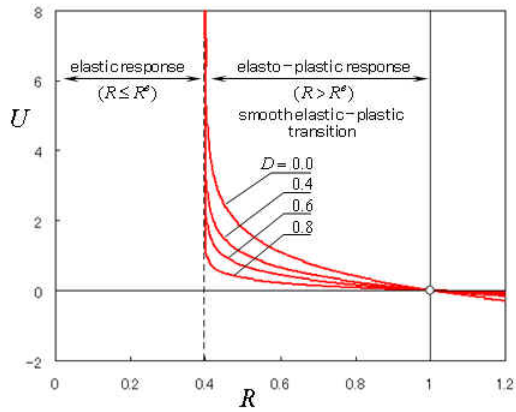


図 4.4 正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比 R とその発展則に関する U の関係 $(R^e = 0.4)$

$\| \ \|$ は大きさを表している。また m は弾性応答から弾塑性応答への遷移速度に関する材料定数で

あり、関数$D\left(0 \le D \le 1\right)$は後に説明するダメージ関数である。(4.12)式で与えられる材料関数Uの応答を図 4.4 に示している。この図からわかるように、材料関数Uは、正規降伏比Rの単調減少関数である。また、ダメージ関数Dの増加と共に減少することも分かる。これらの定式化により、$R = R^e$では弾性応答を示すが、それ以降は正規降伏比Rおよびダメージ関数Dの増加による材料関数Uの減少に伴って、弾性応答から弾塑性応答への滑らかな遷移が表現可能となる。また、弾性応答から弾塑性応答への遷移速度に関する材料定数mが大きくなるにつれて巨視的弾性条件下における塑性ひずみの発生は抑制される．さらに、$R^e = 1$もしくは$R = 1$の場合、降伏面の内部を純粋弾性領域と仮定する古典弾塑性論によるモデル応答に完全に一致する。

4.2.3　損傷・ダメージ

繰返し軟化特性に代表される塑性変形の蓄積の結果として生じる材料特性の変化を“ダメージ”と考え、(4.11)式に導入するダメージ関数$D\left(d_i, H_d\right)$ $\left(0 \le D \le 1\right)$として、次式が採用されている。

$$D(d_{\mathrm{i}}, H_d) = (1 - d_2)\{1 + (\frac{d_1}{H_d})^{d_3}\}^{-1} \tag{4.13}$$

ここに、H_dは内部状態変数であり、ダメージ・パラメタと呼ばれている。$d_i\left(i = 1, 2, 3\right)$はダメージの進展に影響を与える材料定数である。ダメージ関数Dの応答を図 4.5 に示しているが、材料定数d_iは 4.3 節での解析時と同じ値を用いている。この図から明らかなように、Dはダメージ・パラメタH_dの単調増加関数であり、その値は初期値 0 から増加し$D_{\max} = 1 - d_2$に漸近する。

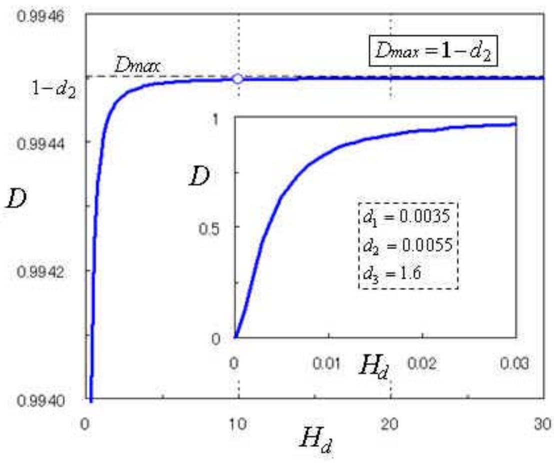


図 4.5　ダメージ関数DとダメージパラメタH_dの関係

ダメージパラメタH_dの発展則として、次式が提案されている。

$$\dot{H}_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}^p\| \bar{D}(k_{\mathrm{i}}, \bar{R}) \tag{4.14}$$

ここに、

$$\bar{D}(k_{\mathrm{i}}, \bar{R}) = (1 - k_2)\{1 + (\frac{k_1}{\bar{R}})^{k_3}\}^{-1} \tag{4.15}$$

$$\bar{R} = R - R^e 、 k_1 = \frac{1 - R^e}{2} \tag{4.16}$$

上式中の関数 $\bar{D}$ は(4.13)式と同形式で与えられ、$k_i\left(i=1,2,3\right)$ は、正規降伏比 R がダメージの進展速度に与える影響を規定する材料定数である。正規化したダメージ・パラメタ H_d の応答を図 4.6 に示している。この図から明らかなように、ダメージ･パラメタ H_d も R の単調増加関数であり、その値は $\bar{D}_{\max}=1-k_2$ に漸近する。なお従来モデル [52~54]では、ダメージ・パラメタ H_d として $\bar{D}=1$ に対応する累積塑性ひずみ H を採用していたが、ダメージの累積に対する応力範囲の影響を適切に表現するために、正規降伏比 R と塑性ストレッチングの大きさの積、すなわち正規化した塑性仕事に対応する量として与えている。この定式化により応力範囲もしくはそれに対応する正規降伏比 R が大きな場合、より大きなダメージが蓄積されることになる。

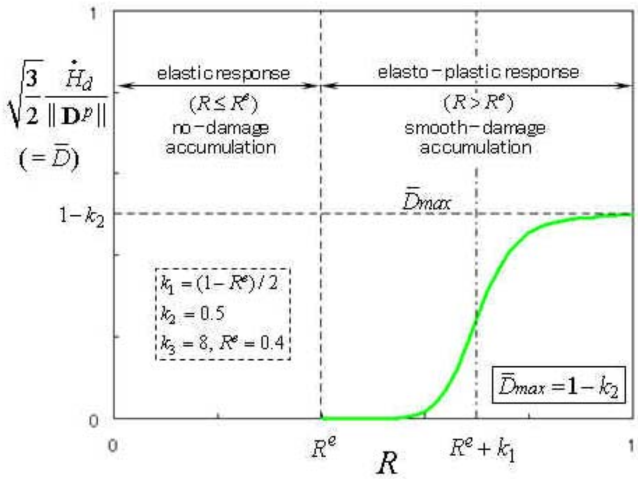


図 4.6　正規化された速度型のダメージパラメタ H_d と R との関係

4.2.4　材料関数

負荷関数 f は Mises 型の次式が採用されている。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*\| \tag{4.17}$$

ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*=\bar{\boldsymbol{\sigma}}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}})\,\mathbf{I} \tag{4.18}$$

相似中心の発展則を規定する材料関数として、c を定数とする次式が採用されている。

$$\mathring{\mathbf{s}}=-c\,U\,\|\mathbf{D}^p\|\,(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{s})+\mathring{\boldsymbol{\alpha}}-\mathbf{s}+\boldsymbol{\alpha} \tag{4.19}$$

また、移動硬化の発展則として、従来モデルを拡張した次式が採用されている。

$$\mathring{\boldsymbol{\alpha}}=a_1\left(a_2\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*\|}-\boldsymbol{\alpha}\right)\left\{1+\left(\frac{F_0}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*\|}\right)^{a_3}\right\}\|\mathbf{D}^p\| \tag{4.20}$$

上式における F_0 は正規降伏面の大きさ F の初期値、$a_i\left(i=1,2,3\right)$ は移動硬化の発達の程度を規定する材料定数である．なお、低応力範囲での移動硬化の発展を促進するために、従来モデル [54]に新たなパラメタ a_3 を付加している。

4.3　砂時計型試験片への弾塑性モデルの適用

繰返し負荷時に現れる複雑な材料応答を表現できると考えられる 4.2 節の構成方程式が妥当なものであることを示すために本節の実験ならびに解析が実施されている。

4.3.1 両振り負荷試験 [55)]

SN490B（建築構造用圧延鋼）材を供試材料として、図 4.7 に示す砂時計型丸棒試験片を用いた一軸引張試験ならびに両振り繰返し載荷試験が室温大気環境中にて行われている。8 本の試験片が試験に供されている。内 4 本は引張試験、他 4 本は完全両振り繰返し試験に供されている。なお、何れの試験も JIS 規格の静的試験条件に準拠して、試験機アクチュエータの変位速度が 0.0066（mm/sec）一定になるように制御して負荷が与えられている。計測にノイズが乗ることのリスクを避けるため、試験機制御用のロードセルとは別に試験片と直結したロードセル（試験片を挟んでアクチュエータと反対側に配置されている）で荷重が計測されている。また、ゲージ長 2mm の 1 軸ゲージを用いて最小断面位置でのひずみが計測されている。繰返し載荷時の応力－ひずみ曲線に関する各種パラメタの定義を図 4.8 に示す。ここで、応力ゼロにおけるひずみループの幅を $\Delta\varepsilon^p$ 、ループ中央位置における軸ひずみを $\bar{\varepsilon}$、また、累積塑性ひずみ（$\Delta\varepsilon^p$ の 2 倍の累積値）を $\bar{H}$ としている。代表的な一軸引張試験により得られた公称応力－軸ひずみ曲線と 4 回の一軸引張試験結果を平均して得た力学的特性に関する表を図 4.9 内に合わせて示している。

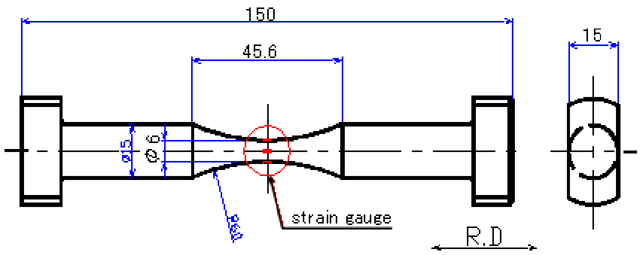


図 4.7　完全両振り試験のために用意された砂時計形引張圧縮試験片（単調引張試験にも流用）

最大応力が巨視的降伏点 412MPa より低い完全両振（完全両振りの場合、最小荷重の絶対値＝最大荷重）引張圧縮繰返し試験が行われている。完全両振試験は 4 体行われており、それぞれの

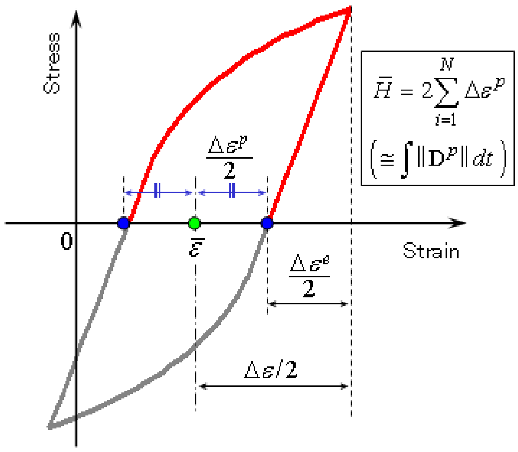


図 4.8 ヒステリシス・カーブを記述するための各種パラメタ

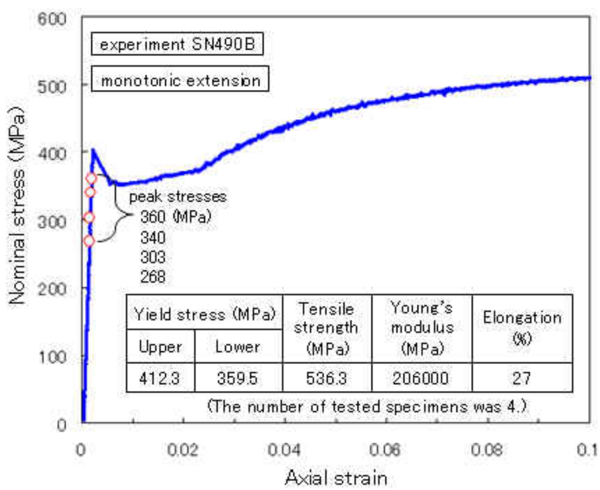


図 4.9 供試材（SN490B）の単調引張試験で得られた応力－ひずみ曲線

最大応力（＝最小応力の絶対値＝ピーク応力）は図 4.9 中に赤丸印で示されている。 図 4.10 に無次元応力振幅が 0.74 の完全両振試験で計測されたヒステリシスループを示す。ここで無次元応力振幅は応力振幅（σ_a ：応力範囲の 1/2 ＝ピーク応力）を上降伏点で除したものと定義されている。初期の 10 サイクル目までは殆どヒステリシスを描かず、巨視的に弾性状態にあることが分かる。そしてこの case では、400 サイクル目程度から $\Delta\varepsilon^p$ が大きくなりはじめ、3000 サイクル目程度から一定になる。このように $\Delta\varepsilon^p$ がほぼ一定値になることを、**塑性シェイクダウン**の状態に達したという。図 4.11 には、図 4.10 の計測結果に対して、図 4.8 に示されているヒステリシスループの各種物理量のサイクル数に伴う変化の計測結果を示している。ヒステリシスループの塑性ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^p$ は最初は殆ど 0 であるが、本 case では 400 サイクル目付近から増加し始め、ある一定値（本図では 0.003（＝3000 μ ）程度）に向かって塑性ひずみ増分が漸近する傾向を示しており、漸近してほぼ一定値となってからは累積塑性ひずみはサイクル数に対してほぼ線形的に増加し続ける傾向にあることが分かる。

図 4.12 には他の３つの無次元応力振幅下で得られた計測結果も加えて $\Delta\varepsilon^p$ とサイクル数の関係の測定結果を示している。この図より、応力振幅が小さくなるにつれて、塑性ひずみ急増に至るまでのサイクル数 N が多くなり、その際に発生するひずみの大きさも小さくなる結果が得られている。なお、高繰返し応力側の塑性ひずみ幅 $\Delta\varepsilon^p$ が減少していく傾向が見えるが、

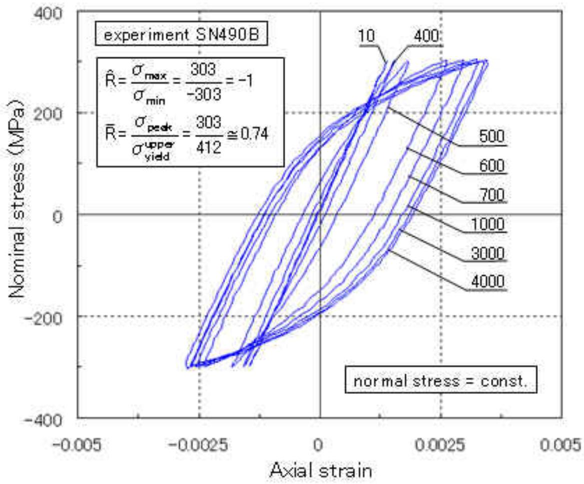


図 4.10 完全両振り荷重振幅下における繰返し負荷に伴うヒステリシスの成長計測結果

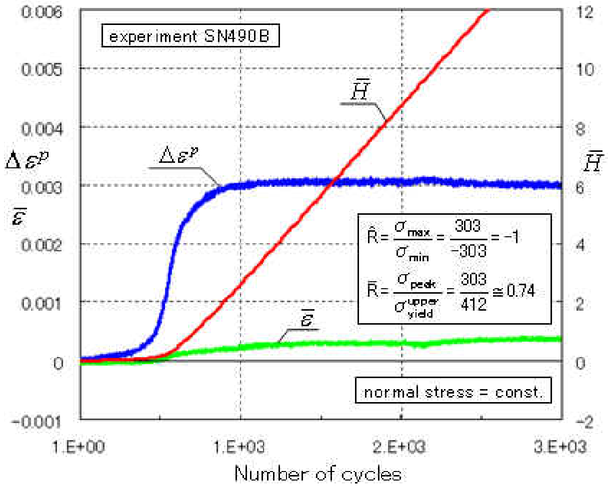


図 4.11 完全両振り繰返し試験で得られた各種ひずみパラメータの変化（SN490B）

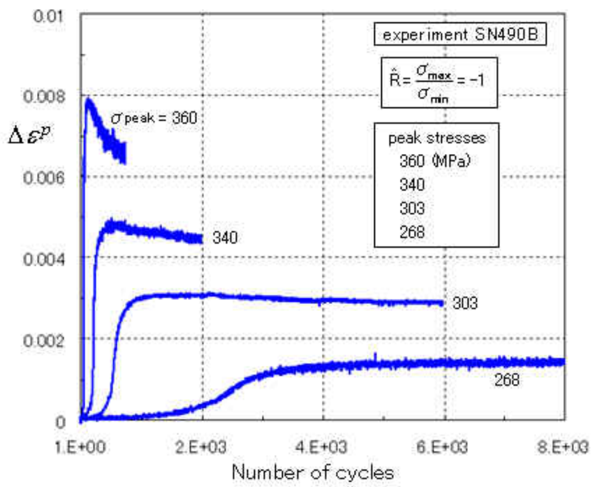


図 4.12 一定荷重振幅の完全両振繰返し下で現れるヒステリシスループの塑性ひずみ増分とサイクル数の関係の計測結果

それらについて転位論的に考察した研究[7]も報告されている。

4.3.2 両振り繰返し下の構成関係[55]

下負荷面理論にダメッジ関数を組み入れることで、繰返し負荷サイクルのある時点から突然塑性ひずみが急遽増加する現象をシミュレートできることが確認されている。4.2 の弾塑性モデルでは、4.2.2 の構成式から分かるように、応力速度－ストレッチング関係を直接時間積分することにより応力－ひずみ関係が得られる。このとき、応力－ひずみ関係の計算結果に影響が現れない程度に小さな時間刻み幅で計算が行なわれている。なお、ヤング率、ポアソン比を除いた材料パラメタはトライ・アンド・エラー方式で以下のように設定されている。

$$\left.\begin{array}{ll} E = 206000\ (\mathrm{MPa}),\ \ \nu = 0.3, & \\ F_0 = 350\ (\mathrm{MPa}),\ \ R^e = 0.4 & \\ m = c = 20000,\ \ a_1 = 0.75, & d_1 = 0.0035,\ \ d_2 = 1.6,\ \ d_3 = 0.0055, \\ a_2 = 750(\mathrm{MPa}),\ \ a_3 = 4 & k_2 = 8,\ \ k_3 = 0.5 \end{array}\right\} \quad (4.21)$$

上記係数を用いて、4.2 の弾塑性モデルから得られる単調載荷条件下の真応力－ひずみ関係は図 4.13 のようになる。なお、単調載荷条件下での大ひずみ範囲の移動硬化挙動などに対するパラメタ精度の向上を目的として、実験で採用した丸棒供試体を模擬した有限要素解析結果と計測値のフィッティング結果[56]も参考に上記パラメタは設定されている。図 4.9 に示した実際の応力～ひずみ曲線では一般軟鋼のように上降伏点、下降伏点ならびに踊り場が生じている。ゲージ長を 0 の極限とした場合踊り場は生じなくなると考えられることから、公称応力～公称ひずみ曲線上（図 4.9 に対応）では踊り場が生じても、真応力～真ひずみ曲線上（塑性領域を扱う場合は真ひずみが構成関係で用いられる）では、上降伏点や下降伏点ならびに踊り場が現れないことを考慮して、2 次硬化係数が図 4.9 とほぼ同じになるように、(4.21)式のように係数が設定されている。図 4.9 は公称応力～公称ひずみ曲線であり、これを真応力～真ひずみ曲線に置き換えると図 4.13 になると理解すれば良い。

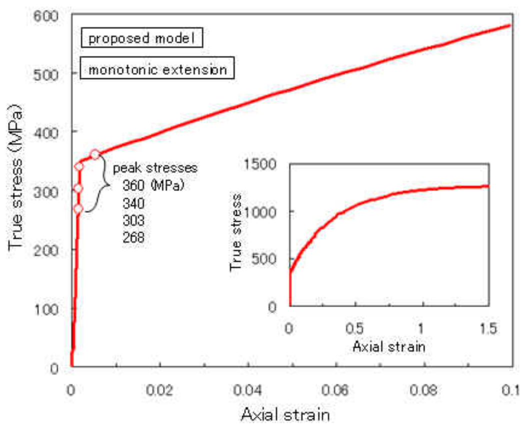


図 4.13 (4.21)式の材料定数を用いた 4.2 のモデルから計算される単調引張載荷条件下の応力-ひずみ曲線

4.3.1 での完全両振引張圧縮試験は最大荷重ならびに最小荷重（＝最大荷重の絶対値）を一定に保持して行われている。巨視的弾性状態のため、公称ひずみと真ひずみは殆ど差異がないので、最大真応力と最小真応力を保持したシミュレーションで、完全両振り引張圧縮荷重繰返し試験のシミュレーションとしている。最大応力（ピーク応力）が 360MPa の完全両振試験では、図 4.9 では完全に弾性状態にあるが、真応力～真ひずみ曲線上からはピーク応力時、塑性状態にあるこ

とが分かる。しかし、ピーク応力が 303MPa と 268MPa の完全両振試験の場合、図 4.13 の真応力～真ひずみ曲線と比較しても、巨視的には弾性状態にある。

図 4.14 は、真応力～真ひずみ曲線から見ても負荷過程全域において巨視的弾性状態にあるピー

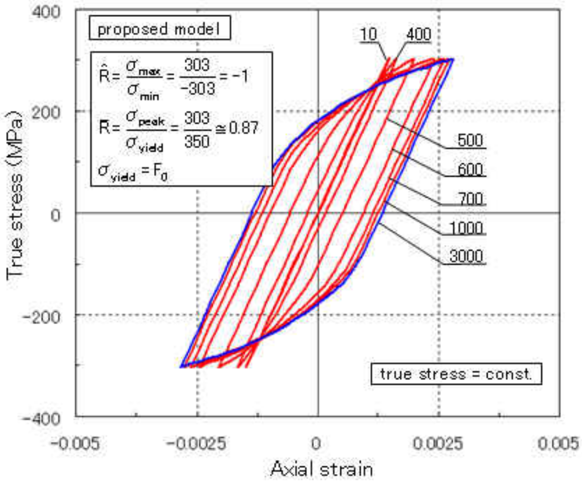


図 4.14 繰り返し負荷進行に伴う弾塑性モデル(各係数は(4. 21)式)で計算されたシステリシスループ（ピーク応力＝303MPa の場合）

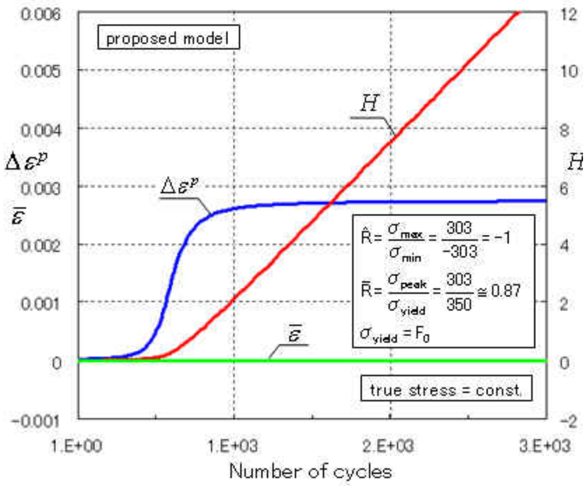


図 4.15 弾塑性モデルにより完全両振り下で得られたヒステリシスの特性値の変化（ピーク応力＝303MPa の場合）

ク応力 303MPa の完全両振り負荷の場合について、(4.21)式の係数を与えて、4.2 の弾塑性モデルより、繰返し応力～ひずみ関係をシミュレートした結果である。最初は繰返し負荷中殆ど塑性ひずみが生じていないが、あるサイクル数から塑性ひずみが急増しだし、1 サイクルにおける塑性ひずみ増分は一定値に漸近する傾向を有しており、実験結果の図 4.10 に定量的に良く一致していることが分かる。図 4.15 は図 4.14 を求めた 1 サイクル毎のデータより、図 4.8 に示したヒステリシスループの特性値を求め、それらと繰返し数との関係を示したもので、図 4.11 に対応している。

1 サイクル毎のヒステリシス・ループの塑性増分 $\Delta\varepsilon^p$ は、ピーク応力/降伏点＝0.87 という巨視的弾性状態での両振下で、初期には殆ど 0 であるが、400 サイクル目ぐらいから突如増加しだし、1000 サイクル目ぐらいでの塑性ひずみ増分に漸近的に増加する図 4.11 の現象が、4.2 の弾塑性モデルでほぼ再現出来ていることが図 4.15 より分かる。しかし、実験では、システリシスループの中心点のひずみ $\bar{\varepsilon}$ が負荷と共に大きくなり、所謂移動硬化現象が現れているが、本モデルではこの現象は再現さ

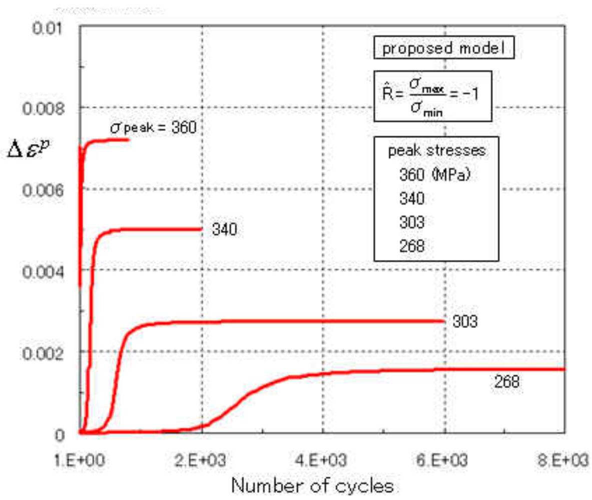


図 4.16 完全両振荷重振幅レベル毎の $\Delta\varepsilon^p$ 遷移現象（シミュレーション結果）

れていない。

図 4.16 は前述の 4case の完全両振り負荷試験における $\Delta\varepsilon^p$ の遷移現象を 4.2 のモデルでシミュレートした結果である。図 4.15 を見て分かるように、ここでは移動硬化現象は再現されていない。図 4.16 は図 4.12 の計測結果に対応するものであるが、巨視的弾性領域での完全両振り負荷では、初期には塑性的応答が現れず $\Delta\varepsilon^p$ はほとんど 0 であるが、あるサイクルになるとサイクル数の増加に伴って $\Delta\varepsilon^p$ が急増し、この急増する時期（サイクル数）は与える応力振幅が大きくなるほど早くなる。そして与える応力振幅に応じて決定される $\Delta\varepsilon^p$ の飽和値に漸近し塑性シェイクダウン状態に達することが、4.2 の弾塑性モデルで定量的に良く再現されている。ただし、高繰返し応力を与えた際に計測された塑性ひずみ幅 $\Delta\varepsilon^p$ が減少していく傾向は再現されていない。この現象は降伏面の拡大、もしくは移動硬化特性の変化などで表現可能であると思われるが、より詳細な実験的考察が必要であり今後の課題である。

ここで注目すべきは、従来の古典的な弾塑性モデルを用いた場合には、巨視的弾性条件下では弾性的な応答を繰り返すのみで、上記で得られたような非弾性ひずみの集積は予測されないことである。巨視的に弾性状態で負荷が繰り返された場合でも疲労損傷を起こしていることから、古典的弾塑性論の不完全さに気づかず疲労研究者の多くが、疲労現象解明の壁にぶつかり思考停止に陥ったものと考えられる。さらに、あるサイクル数から塑性ひずみ増分が急増する現象は 2000 年頃にほぼ確認されたものの、一部の疲労研究者のみが注目しているだけで、未だ大半の技術者は知らない現象である。やはり、古典塑性学がこの現象の認知に大きな壁となって横たわっているものと考えられる。

繰返し負荷が作用すると、最大せん断面に近い高密度原子面に刃状転位が生じ図 4.17 に示すように固執辷り帯がある間隔で生じるが、この段階では計測できるような大きな塑性ひずみ増分は生じないと考えられる。さらに繰返し負荷が作用すると、固執辷り帯間にラセン転位の梯子が架けられる。この梯子が固執辷り帯間にかかると大きな塑性ひずみ増分が観察されるようになると考えられる。この考察が正しいか否かは今後の研究に待つ必要があろう。

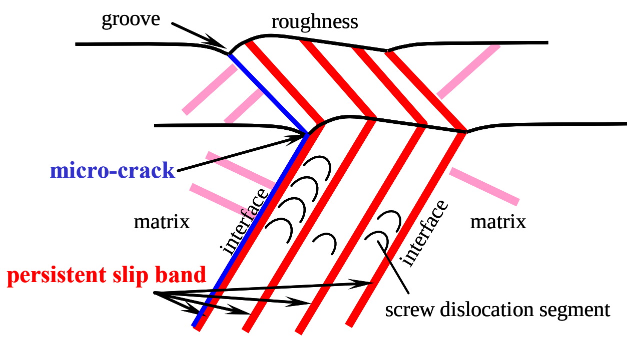


図 4.17 辷り帯内で生じると考えられる転位形成の模式図

図 4.18 に新弾塑性モデルで最大応力を 303MPa に設定した完全両振負荷を与えた計算で得られたサイクル数 N と各種パラメタの関係を示している。この図より、繰返し初期段階から僅かな塑性ひずみ $\Delta\varepsilon^p$ が計算され、その累積値を表す累積塑性ひずみ H もしくはダメージ・パラメタ H_d は

単調に増加していることが分かる。また、これに伴ってダメージ値 D も僅かながら上昇を続け、繰返し数が 100 回を超えた辺りから、急激に上昇することで塑性ひずみ幅 $\Delta\varepsilon^p$ が有意な大きさに進展した様子が分かる。さらに、ダメージ値 D が飽和状態に至ることで、塑性ひずみ幅 $\Delta\varepsilon^p$ も一定値に収束している。ただし、高繰返し応力を与えた際に計測された塑性ひずみ幅 $\Delta\varepsilon^p$ が減少していく傾向は再現されていない。この現象は降伏面の拡大、もしくは移動硬化特性の変化などで表現可能であると思われるが、より詳細な実験的考察が必要であり今後の課題である。

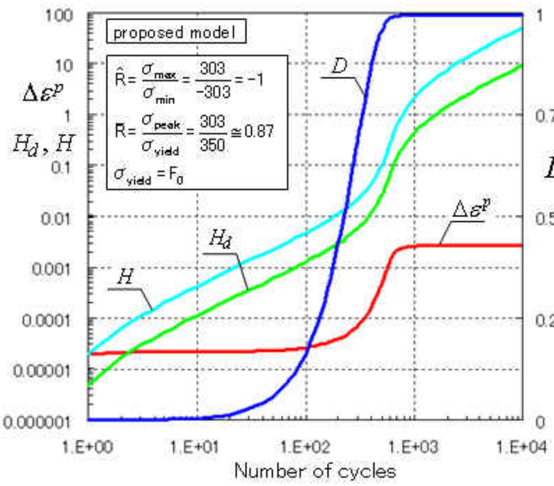


図 4.18 新弾塑性モデルにおける繰返し負荷に伴う各種パラメタの変化（ピーク応力＝303MPa の完全両振負荷の場合）

4.2.3 で説明したように H_d は正規降伏比 R と塑性ストレッチングの大きさの積、すなわち正規化した塑性仕事に対応する量として与えられている。したがって材料によって定まるある H_d になったときに疲労き裂の核（結晶粒径程度のき裂と考えられている）が形成されるものと考えられる。そこで $H_d=10$ で結晶粒径レベルのき裂が発生すると仮定して、以下の case study が行われている。

図 4.19 は新弾塑性モデルによる完全両振負荷における各種設定応力に対する完全両振一定繰返し負荷時のサイクル数 N とダメージ・パラメタ H_d の計算結果である。ただし、ピーク応力が 200MPa ならびに 190MPa の場合は計算時間が膨大になるため、10^7 サイクルで計算が打切られ

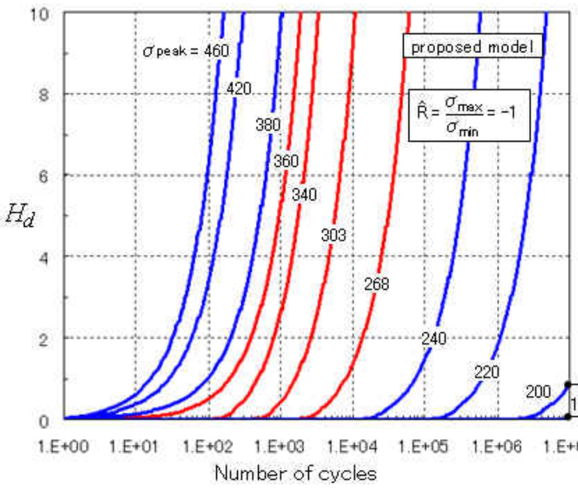


図 4.19 新弾塑性モデルで計算された完全両振の負荷レベル毎の繰返しに伴うダメージ・パラメタの変化

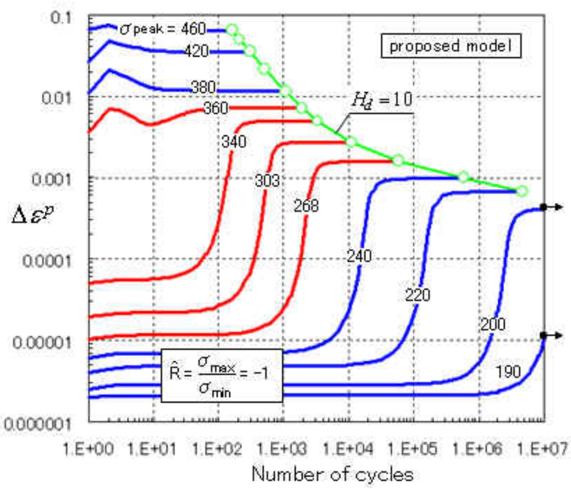


図 4.20 新弾塑性モデルで計算される各種設定応力に対する繰返し負荷に伴う 1 サイクルにおける塑性ひずみ増分とダメージ・パラメタ

ている。このときの繰返し負荷に伴う塑性ひずみ増分 $\Delta\varepsilon^p$ の動きが図 4.20 に示されている。ここでピーク応力が 360MPa 以上両振負荷でサイクル数の増加に伴い一旦 $\Delta\varepsilon^p$ が低下しているのは、加工硬化の影響である。H_d が材料に生じるき裂などの状況との関係は今後の課題であるが、完全両振負荷で初期に僅かな塑性ひずみが生じれば、H_d は増加し続けるので、いつかは疲労き裂が発生すると考えられる。なお図 4.20 は一様な応力下での疲労き裂発生寿命に関するもので、第 1 編図 2.5 ならびに図 2.6 の検討には、この手法を適用するべきと考えられるが、未だその検討はなされていない。

図 4.18 等を参照して分かるように、$H_d = 10$ ではき裂は生じていないかも知れないが、1 サイクルでの塑性ひずみ増分 $\Delta\varepsilon^p$ は飽和している。そこで、各種ピーク応力を与えて $H_d = 10$ となった時点の応力－ひずみ曲線を求めた結果が図 4.21 に示されている。図ではピーク応力を（320、303、268（MPa））の 3 種を例に示されている。この飽和応力－ひずみ曲線でのピーク値を結ぶ曲線（赤色線）がいわゆる繰返し応力－ひずみ曲線と呼ばれているものである。図には単調載荷時の結果が合わせて示されている（青色線参照）。単調載荷時の降伏点は 360MPa 程度であるが、繰返し負荷のもとでは、塗りつぶした赤丸で示しているように 150MPa 程度となり、繰返し荷重下では降伏点が単調載荷時のそれより非常に低い値になることが理解されよう。

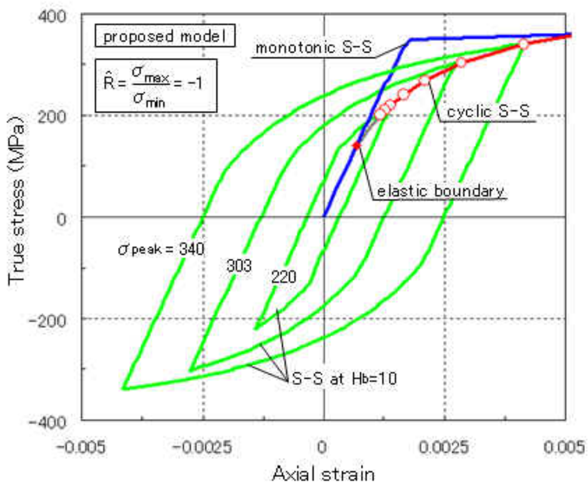


図 4.21　単調負荷時の応力～ひずみ曲線と、完全両振ブロック荷重下での塑性ひずみ飽和後の繰返しし・応力－ひずみ曲線の新弾塑性モデルによるシミュレーション結果（$H_d = 10$）

なお本モデルをノート PC で計算した場合 10^7 回の繰返し回数に到達するまでには、1 週間程度かかっている。

4.4 一定荷重振幅下での切欠底における繰返し負荷に伴う塑性域の発達 [57)]

4.2 節の新弾塑性モデル（ただし、材料定数は(4.21)式による）の構成関係を要素に組み込んだ有限要素法（汎用 FEM であるが、日本で開発されブラックボックスが存在しない FINAS に構成関係を組み込み、陰解法で解かれている。）を用いて、一様強制変位振幅下で切欠底に生じる塑性域の発達が計算されている。図 4.22 が用いられた要素分割である。図を見て分かるように、250mm 幅の帯板の片側に深さ 1mm、先端半径が 0.5mm の切欠が設けられており、帯板に一様変位が作用している問題である。8 節点のアイソパラメトリック 6 面体要素が用いられており、総節点数は 26006、総要素数は 12834 となっている。そして、板厚方向には 1 要素だけが配置されている。

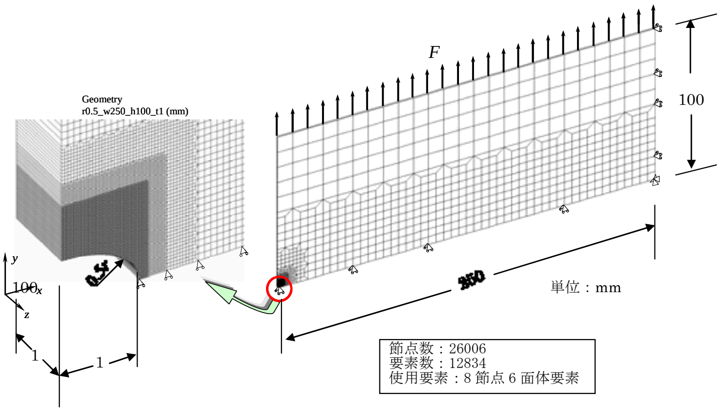


図 4.22 繰返し負荷に伴う切欠底における塑性域拡大現象のシミュレーションに用いられた FEM 要素分割

切欠底で板厚方向の収縮が生じると、負荷方向のひずみが大きく生じる傾向を知るために、固体要素が用いられている。第 1 サイクルにおいて、切欠底要素が降伏点の 0.9 倍となる変位を F_{max} として、繰返し外変位を 0〜 F_{max} とする一定変位振幅サイクルを作用させ、ひずみの発展挙動が調べられている。変位の内挿関数は 1 次であり要素内は一定ひずみとして近似されている。モデルの上下端に一様に強制変位を働かせている。 $x = 0$ 軸が対称面となるので、1/2 モデルとなっている。

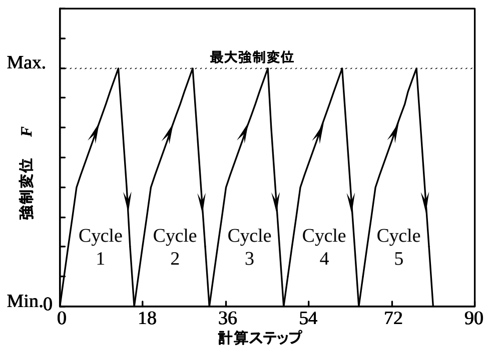


図 4.23 適用された FEM での計算ステップ

収束計算精度を確保するため、負荷過程は 12 ステップ、除荷過程は 4 ステップで外変位を与えている。負荷は第 1 サイクルの最大負荷時に切欠底で降伏点の 0.9 倍の応力が作用する時の外変位 F_{max} とし、以後、完全除荷と F_{max} が繰り返されている。その負荷サイクルを図 4.23 に示している。陰解法で常に収束させ精度良い計算を目論んだため、計算に多大な時間を要し、1 日間で計算が打ち切られている。計算されたのは 5 サイクルまでであった。

図 4.24 には繰返し負荷の最小負荷時と最大負荷時における板厚中央断面上の Mises 応力の分布を示している。図の下段が最小負荷時、上段が外変位＝ F_{max} の時点の結果が示されている。最大負荷時に切欠底においても巨視的には弾性状態のため、古典弾塑性論では最小負荷時には残留応力は生じないことになるが、除荷時（図 4.24 の下段）の Mises 応力分布を参照すると、繰返しと

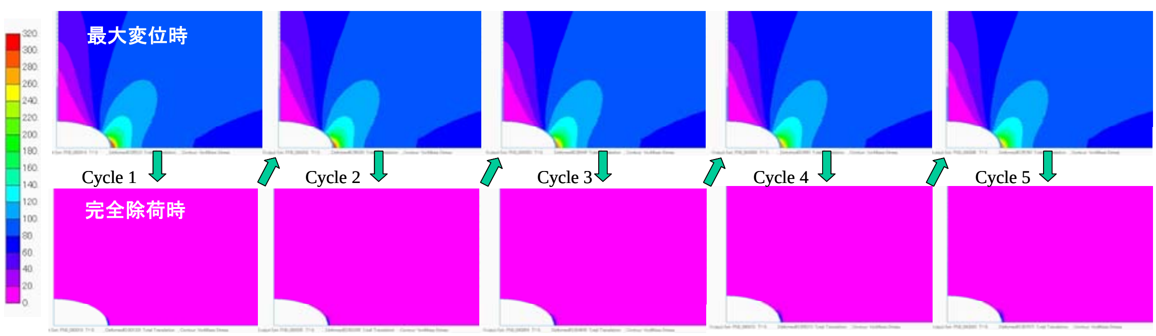


図 4.24 載荷回数に伴って生じる最大変位時と完全除荷時に働いているミーゼス応力分布

ともに僅かに残留応力が増大していることが分かる。しかし、最大負荷時には繰返しが進行しても殆ど Mises 応力は変化していない。

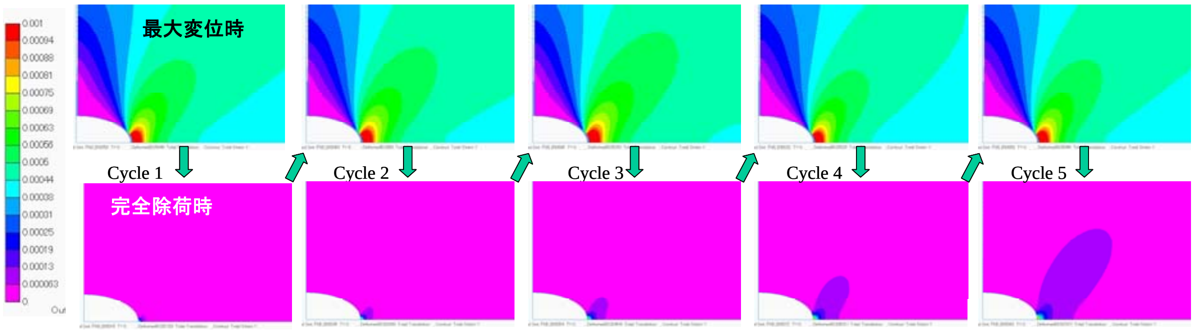


図 4.25 載荷回数に伴って生じる最大変位時と完全除荷時に働いている負荷方向ひずみ分布

一方板厚中央断面上における負荷方向（y 方向）ひずみを調査した図 4.25 を参照すると、上段の最大負荷時のひずみ分布は、Mises 応力分布と同様、最大負荷時の繰返し回数によらずほぼ同じとなっている。しかし、除荷時（図の下段）をみると、載荷回数の増加に伴って y 方向ひずみは増大している。この状態では外力は働いていないので、非弾性ひずみ、すなわち（引張りの）塑性ひずみである。このように最小荷重時には、載荷回数の増加に伴って引張塑性ひずみの大きさは増大し、また発生領域も拡大していることが分かる。

ここで外負荷による応力は、一般部はもちろん切欠底近傍の応力集中部でも全く古典弾塑性学では弾性状態にあり、塑性ひずみは一切生じない応力レベルである。しかし、4.2 節における弾塑性モデルを組込んだ FEM によれば、どの箇所においても弾性範囲の応力しか生じない状態で繰り返される一定外変位振幅下（一定荷重振幅下と考えても良い）でも、最小荷重時に荷重方向の塑性ひずみが載荷回数の増加とともに急速に発達していることが解かる。したがって、切欠底で弾性状態しか生じない場合でも、除荷時には固有変位（除荷時に生じる y 方向塑性ひずみを y 方向に積分した変位）が載荷回数とともに発達していくことになり、古典力学で弾性応力しか生じないという結果が生じても疲労き裂が発生することが十分考えられる。

5. 端部切欠付き極薄板帯板の最初の結晶粒内におけるき裂成長

5.1 き裂発生モデル [58)、59)]

繰返し荷重を受けた金属の表面には、せん断応力により辷り帯(slip band)が発生し、それが繰返しとともに発達し、入り込みや突き出しの表面微視凹凸になるとともに深さを増し、徐々に開口し始め、ついにはき裂となる [1)]。実構造では疲労き裂は 1 点から発生することはまれで、微小な表面き裂が複数個所で生じ、それらが成長する過程で合体を繰返し、ついには 1 つの表面き裂

状のき裂となる。複数個所から発生するのは、鋼が多結晶体であり、結晶毎に方位が異なることに起因することが多い。複数き裂が同時に発生・成長する問題をまともに扱うことは困難である。したがって、ここでは切欠を有する平面問題に関しての疲労き裂発生・成長を取り扱う。平面問題では板厚方向には理想的には結晶は１つだけしか存在しないことになる。

この場合、以下の３つの大胆な仮定を設けたき裂発生・伝播アルゴリズム[59]が提案されている。すなわち、

①「せん断き裂は圧縮荷重はもちろんのこと引張荷重も受持つ」、

②「せん断き裂が最初の結晶粒界に達した瞬間から、き裂開閉口モードが生じ出す」、そして

③「降伏点が繰返し降伏点まで一期に低下し、直前の降伏点が保持されると仮定すると仮想き裂先端が成長する場合、過去の仮想き裂先端位置を保持するように、静的降伏点を超えない範囲で回復する」

④ 直前の降伏点で評価した塑性域が仮想き裂を越える場合、塑性域先端は直前の仮想き裂先端位置を保持するように回復する。そして、仮想き裂が成長できるようになるのは、降伏点が静的のそれに回復してからとする。

①は、せん断き裂状態では負荷サイクル中全く開口していないことから、き裂面で圧縮荷重だけでなく引張荷重も受持っていると考えられることから、自然な仮定と考えられる。

②に関しては、以下の考察から導かれている。すなわち、切欠底から入る疲労き裂は、最初せん断き裂として入り、巨視的には最大せん断応力面に沿う。しかし微視的には結晶毎にき裂面が異なっている。これは、鋼では辷りが、鉄の原子密度が非常に高い面上で、原子密度の高い方向に生じるためである（面心立方体では最大の原子密度の面、すなわ稠密面で辷りが生じる。体心立方体では稠密面だけでなく、鉄原子密度が 2 番目に高い面でも辷りが生じることが判明している。）。そして、辷りは転位が移動することで生じる。転位論によると、転位はその運動方向には大きな付加応力を与えるが直角方向には殆ど付加応力を与えず、その大きさは転位位置に存在する転位の数に比例し、転位からの距離に反比例する。ここで、切欠材に１軸方向に負荷が作用する場合を考える（切欠線に対して上下対称な問題）。この場合最大せん断応力は切欠底から 45 度の線上に働く。この最大応力線に沿って切欠底から固執辷り帯が形成されることになる。この固執滑り帯には$\sigma_N\left(r\right)\cos\left(\pi/4\right)$（ただし、$\sigma_N$ ：荷重軸方向応力、r ：最大せん断応力線に沿う切欠底からの距離）なる垂直応力が作用する。したがって、この垂直応力が固執辷り帯に沿って発生するせん断き裂を開口させる力として働く。

ところで固執辷り帯中で計測された食違いは多結晶材よりも単結晶材の方が１オーダ大きい[60)、61)]。すなわち多結晶材よりも単結晶材の方がせん断き裂が開口しにくいことを意味している。外力の分力成分が切欠底から生じたせん断き裂を開口させる方向成分となるが、単結晶材では外

力の分力成分だけしかせん断き裂を開口させる力として作用しない。

図 5.1 は単結晶材の切欠底 o から成長した固執辷り帯が a まで成長し、せん断き裂が oc 間に生成されている状態を模式的に表している。転位は ca 上を運動することになる。せん断き裂先端位置 c 点近傍で転位密度が非常に大きくなる。しかし、単結晶材ではせん断き裂 oc の延長線上を転位が運動するが、この ca 間の転位によって生じるき裂を開口させる方向の応力は oc 間で 0 となり、転位によってせん断き裂を開口させる力は付加されないことになる。

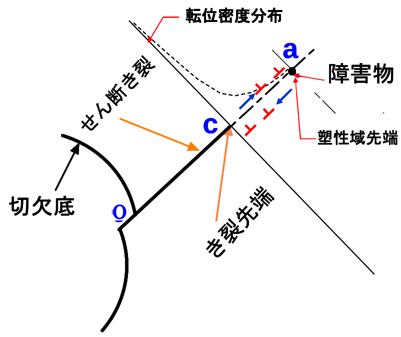


図 5.1　切欠底に生じる初期の剪断辷り（単結晶材、あるいは負荷が小さい場合）

他方、多結晶材の場合、結晶毎に方位が異なるため、辷り面ならびに辷り方向は結晶毎に異なることになる。図 5.2 は多結晶体中の切欠底より発達した辷り面を模式的に示したものである。結晶毎に辷り面が異なるので結晶粒界で辷り線が連続するのは 1 点のみとなるが、解かり易くするために連続的に示している（結晶毎に紙面奥行き方向移動させ、粒界で辷り線が連続するように加工したものと考えると良い）。図ではせん断き裂が結晶粒内を進んでおり、結晶粒界には達していない。この場合、cb_1 はせん断き裂の線上に位置し、b_1 前方の辷り線は切欠底の辷り方向とは異なることになる。辷り線に沿う転位密度はき裂先端に近づくほど大きくなる。しかし、き裂線上を運動する転位（cb_1 上を運動する転位）は、oc 上の点に対してき裂を開口させる方向の付加応力を殆ど与えない。結晶粒界を超えた次の結晶では oc 線とはθだけ傾いた b_1b_2 線上を転位が運動する。しかしこの位置での転位密度はき裂先端の c 点近傍よりも小さく、さらには c までの距離は cb_1 上の転位による位置よりも遠く、oc を開口させる力はあまり大きくない。しかし、せん断き裂が最初の結晶粒界 b_1 に達した時を考えると、前方の結晶粒内での転位密度が非常に大きくなり、しかもせん断き裂までの距離が短くなると同時にこれらの転位の運動方向がせん断き裂線とθなる角度を有するので、1 つの転位に対して sin 成分の応力が作用することになり、これらの転位によって最初の結晶粒内の辷り面を開口させる方向の付加応力が大きくなる。これらのことから②の仮定が採用されている。

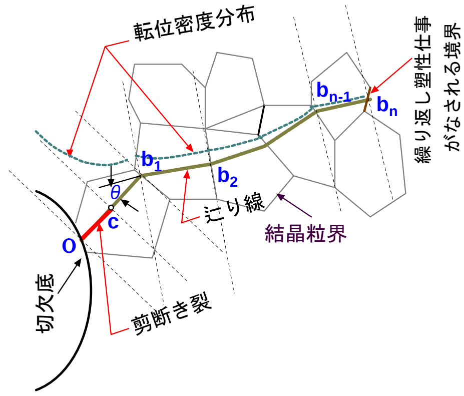


図 5.2　多結晶体の切欠底で形成される辷り線と転位密度分布の模式図（b_n は通常最小荷重時の圧縮塑性域先端を示している）

③に関しては、4 章で説明したように鋼に繰返し負荷を与えると複雑な現象が現れる。特に 4.3

節ならびに 4.4 節に示したように、どの箇所においても弾性状態しか作用していないのに、繰返し負荷が作用すると塑性ひずみが現れる現象は極最近判明したことで、定説になるまでには至っていない。4.3 節に示した「初期にはほとんど１サイクルでの塑性ひずみ増分が観測されない一定応力振幅下で、ある載荷回数に達すると塑性ひずみ増分が急増し、応力振幅に依存したある塑性ひずみ増分に漸近する現象」がなぜ生じるか（図 4.17 で説明した刃状転位間を繋ぐらせん転位の増殖と関連していると著者は考えている）を明確にして、あらゆる荷重パターン下でも適用できる構成関係式を確立するには、かなりの年月を要するものと考えられる。しかし、4.4 節での計算から、最大荷重時切欠底で降伏点より少し小さい応力となる完全片振り☆の一定荷重振幅下でも、除荷時に塑性ひずみが載荷回数とともに急激に発達し、圧縮塑性域が成長することが分かる。したがって、疲労が問題となる現実の構造においては、最小荷重時に圧縮塑性域が、載荷回数とともに発達する過程を無視し、いきなり上記漸近する状態に一期に発達すると仮定し、疲労き裂発生問題では繰返し荷重が作用した直後に繰返し降伏点（図 4.21 参照）にまで低下するとした仮定がなされている。

①、②の仮定より、せん断き裂が最初の結晶粒内を伝播している間は、き裂部でも外力を分担するから、き裂自身による応力の再配分はほとんど生じないと考えることが出来る。

以下では、一定振幅荷重の繰返しが作用する場合を考える。せん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点で、疲労被害蓄積領域の先端は図 5.2 の **bn** であったとする。き裂開口型の長いき裂に対して、疲労被害蓄積領域寸法 $\tilde{\omega}$ と ΔK_{RP} の間には(3.31)式の関係が成立している。せん断き裂におけるき裂結合力モデルである BCSS モデル[62)]と、開口型き裂のき裂結合力モデルである Dugdale モデル(第２編 1.6 節参照)における、仮想き裂先端位置と実き裂先端位置の関係が両者で等しく、なおかつ、前者のせん断変位と後者のき裂開口変位が等しい（ただし、Dugdale モデルの垂直作用応力 σ および降伏応力 σ_Y は、BCSS モデルでは、せん断作用応力 τ およびせん断降伏応力 τ_Y にそれぞれ置き換わる）ことから、(3.31)式はせん断き裂にも成立すると仮定されている。せん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点(以後、Ｓ時点と記す)での最深部の ΔK 値を ΔK_S とすると、その時点の疲労被害蓄積領域寸法 $\tilde{\omega}_S$ は、(3.31)式より、

$$\tilde{\omega}_S = \frac{\pi\eta}{8}\left(\frac{\tilde{U}_S \Delta K_S}{2\lambda\sigma_Y}\right)^2 \tag{5.1}$$

ただし、　$\tilde{U}_S$ ：有効荷重比
　　　　　λ ：塑性拘束係数

ところで、Ｓ時点までは最大荷重においても、き裂は閉口したままである。最小荷重時に圧縮塑性域、最大荷重時に引張塑性域が形成されることが、疲労過程が進行する必要条件となるので、

☆ 最小荷重か最大荷重のいづれか一方が常に０のサイクルを完全片振りという。

拡大過程にある疲労き裂では最小荷重時には、圧縮降伏域が切欠底に生じていることになる。そして、最小荷重から切欠底で $2\lambda\sigma_Y$ の応力変化が生じると、切欠底で引張塑性域が生じ出すことになるから、この時点までの RPG 荷重は*、

$$P_{RPG} = \frac{2\lambda\sigma_Y}{\sigma_{y0}} P + P_{\min} \tag{5.2}$$

ただし、　σ_{y0} ： P なる外荷重が作用した場合の切欠底での作用弾性応力

したがって、この時点までの有効荷重比は、

$$\tilde{U}_S = \frac{P_{\max} - P_{RPG}}{P_{\max} - P_{\min}} \tag{5.3}$$

S 時点まではき裂は全く開口しないから引張荷重を分担し、き裂自身による応力の再配分はほとんど生じない。したがって、き裂長さが a の場合には、図 5.3 を参照すると、疲労被害蓄積領域寸法 $\tilde{\omega}$ は、

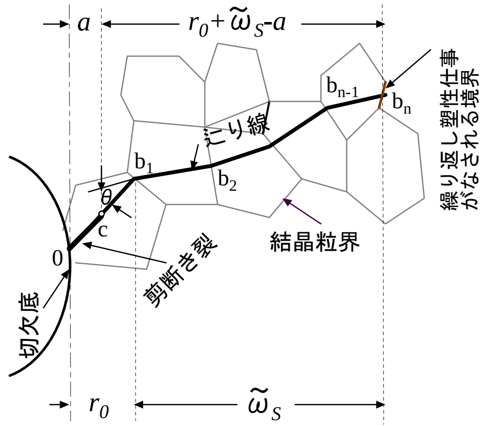


図 5.3　一定振幅荷重下で最初の結晶粒内を進むせん断き裂の投影き裂長と疲労被害蓄積領域寸法の関係（繰返し降伏点下の挙動と仮定）

$$\tilde{\omega} = r_0 + \tilde{\omega}_S - a \tag{5.4}$$

となるから、最初の 1 結晶粒内を、せん断き裂が成長していく段階での等価な ΔK_{RP} は、(5.4)式と(3.31)式から、

$$\left(\Delta K_{RP}\right)_{eq} = 2\lambda\sigma_Y \sqrt{\frac{8}{\pi\eta}\left(r_0 + \tilde{\omega}_S - a\right)} \tag{5.5}$$

ただし　σ_Y ：繰返し応力下の降伏点

(5.5)式から分かるように、最初の 1 結晶粒内を成長するき裂に関しては、き裂が大きくなるにつれて、$\left(\Delta K_{RP}\right)_{eq}$ が小さくなるので、これに対応して疲労き裂伝播速度は遅くなることが予想される。図 3.16 および図 3.17 で示したように、微小き裂ではき裂が大きくなるにつれて、疲労き裂伝播速度が遅くなる現象が生じるが、上記はこの現象に対応していると考えられている [58]。

き裂開口モード下ではき裂による応力再配分が生じるため、一定荷重振幅下では仮想き裂が進展している状態にあり、き裂前方の弾塑性境界付近は降伏ひずみレベルの繰返しを過去にほとんど受けない状態にあり、弾塑性境界は静的降伏応力に支配される。一方、切欠底に位置する最初の結晶粒内を伝播しているせん断き裂では、繰返しの全時期を通じてき裂は閉口したままであり、

---

* 以下ではき裂長さは荷重軸に対して垂直な方向を採用して、作用応力もその投影き裂に働く垂直応力としている。そのため、降伏応力も引張降伏応力を採用し（最初は最大せん断応力面に近い稠密面上で辷りが生じるが、少し成長すると、荷重軸に垂直な面上（一般的には最大主応力に垂直な面上）をき裂が進展する）、せん断き裂の領域でき裂のガース長さを考える必要を回避している。

き裂による応力再配分が生じない。そのため、き裂開口モードが生じるまでき裂前方の弾塑性境界付近は、降伏レベルのひずみの繰返しを絶えず受けることになる。降伏レベルのひずみが繰り返される場合、4.3 節の結果から推測できるように、降伏点は繰返しとともに急激に低下し、弾塑性境界は繰返し荷重下の降伏応力（図 4.21 参照）に支配されることになる。上記では、$\tilde{\omega}_S$ を求めるために一定荷重振幅が作用した場合としているが、１回の繰返しで降伏応力まで見掛け上低下すると仮定されている☀。

ところで、き裂が大きくなると、一定荷重振幅下では載荷毎に引張塑性域が成長するようになる。この場合には引張塑性域は静的降伏点で支配されることになる。

したがって、降伏応力 σ_Y は、図 5.4 に模式的に示すように、き裂の伝播に従い、繰返し荷重下の降伏応力⊗から、静的降伏応力まで変化する（き裂深さ 0 の状態で、初期には静的降伏点から、繰返し荷重下の降伏点まで始め低下する）。ここで、せん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点で、繰返し荷重下の降伏点から不連続的に静的降伏点に移行するのは不自然であること、またいきなり繰返し荷重下の降伏応力から、静的降伏応力まで変化すると仮定すると、一定荷重振幅下で塑性域が不連続的に小さくなり、それまで活動していた転位が消滅するという矛盾が生じるため、静的降伏点で規定される引張塑性域が過去の引張塑性域を超えない場合には、過去の引張塑性域先端が保持されるように、降伏点が変化すると仮定したき裂開閉口シミュレーションがなされている[58)]。

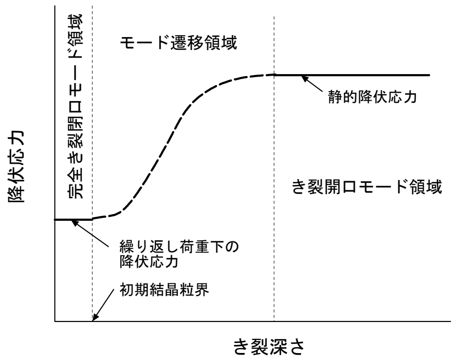


図 5.4　き裂モードの変化に伴う降伏応力の変化（概念図）

き裂自身による応力再配分が生じないせん断き裂状態でのランダム荷重下における固有変位分布の挙動は以下のように考察されている。大きな引張荷重 p_1 により塑性域が発達し、塑性域の先端が図 5.5 の A まで発達したとする。この時生じる固有変位は図 5.5 では DBAB'D' となる。次に圧縮側負荷（最小荷重 p_2 ）で圧縮塑性域が $\left[x_0, \tilde{x}_1^{C_2}\right]$ 間に生じたとすると、この間だけが固有変位が

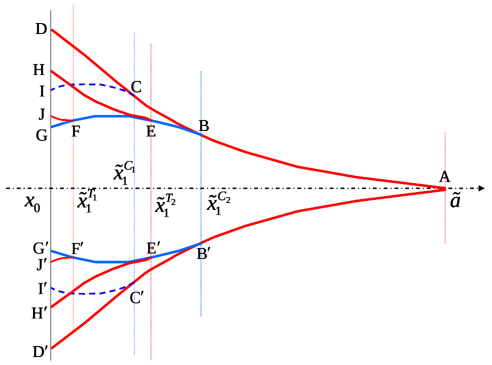


図 5.5 ランダム荷重下における固有変位の変化（模式図）

☀ この仮定は、(5.1)式と(5.4)式から分かるように、実き裂先端から繰返し塑性域の先端までの距離を大きくしているので安全側の評価となるように考えられている。繰返し降伏点を小さく設定すると、実き裂先端から b_n 点までの距離が長くなるので、き裂伝播速度が速くなり、安全側すぎる結果が得られると予想され繰返し降伏点をいかに与えるかが重要と一見考えがちである。しかし、(5.4)式より $(\Delta K_{RP})_{eq}$ は降伏点 σ_Y に比例するので、実際には疲労き裂発生寿命（せん断き裂が最初の結晶粒界に達する時点の寿命とここでは定義されている）は繰返し降伏点にそれほど敏感ではない。

⊗ 転位が運動しだす応力と等しく、材料の比例限と考えるべきかも知れない。

変化し、固有変位分布は GEBAB'E'G'となる。次の引張側負荷（最大荷重 p_3）で $\left[x_0, \tilde{x}_1^{T_2}\right]$ 間が引張降伏すると、固有変位分布は HEBAB'E'H'と変化する。一方、最小荷重 p_2 が作用した直後 p_3 より小さい最大荷重が作用し、$\left[x_0, \tilde{x}_1^{T_2}\right]$ 間が引張降伏した場合、固有変位は JFEBAB'E'F'J'となる。その後の負荷で塑性域が $\tilde{x}_1^{T_2}$ までは発達しない繰返し負荷がかかり、その後 p_3 なる最大荷重が作用し $\left[x_0, \tilde{x}_1^{T_2}\right]$ 間が降伏した場合に現れる固有変位分布は HEBAB'E'H'となる。このことから分かるように塑性域が過去のそれを越えて発達する場合には、過去の荷重履歴の影響は完全に消滅することになる。

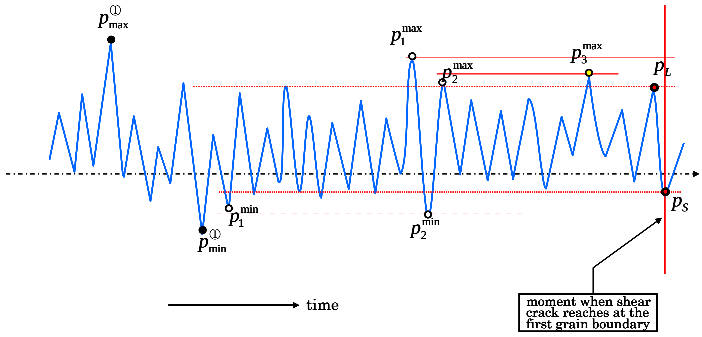


図 5.6 き裂発生時の固有変位分布を求めるための荷重群の抽出（説明図）

　そこで、せん断き裂が最初の結晶粒界を越え、き裂開口モードが現れ出す時点における固有変位を求める手順は以下のように与えられている。 図 5.6 はせん断き裂状態の時に作用した外応力履歴を模式的に表したものである。ここでは仮想き裂先端位置が引張荷重により規定された場合を示しており、$\tilde{a}$ まで $p_{\max}^{①}$ により仮想き裂が生じ、圧縮側負荷で最大の荷重 $p_{\min}^{①}$ が生じて（圧縮塑性域先端は図 5.5 の $\tilde{x}_1^{C_2}$ に対応）いる場合を考える。p_L の直前の最小荷重から p_S に至る 1 サイクルの時点で最初の結晶粒界を越えたとする。そこで、図 5.6 に示すように、$\left[p_S, p_L\right]$ 間に含まれない荷重を最大荷重側に対しては $p_i^{\max}$（$i=1,n$）、最小荷重側に対しては $p_i^{\min}$（$i=1,k$）とする。 $p_i^{\max}$、$p_i^{\min}$ のそれぞれについてその絶対値の大きいものから順番をつけ、それぞれのなかでの最大の荷重が生じた後の荷重について、さらに絶対値が最大のものを抽出する。これを繰返して抽出された $p_i^{\max}$（この列の最後は p_L となる）と $p_i^{\min}$（この列の最後は p_S となる）を出現順に並べる。そして、最大荷重もしくは最小荷重が続いて出現した場合には、後で生じる方の荷重（絶対値が小さい方の荷重）を棄却すれば良い（図 5.6 の例では、 $p_1^{\max} \to p_2^{\min} \to p_3^{\max}$ となる）（詳細は第 4 編 3.1 節参照）。

　この状態からき裂開口モードが生じるとした 3.1 節の取り扱いで、２次元問題に対してであるが、き裂発生から大きなき裂になるまでの疲労き裂成長曲線を、荷重順序の影響も考慮して推定できるアルゴリズムが与えられている。

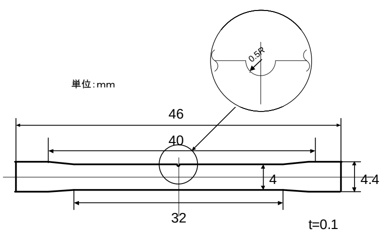
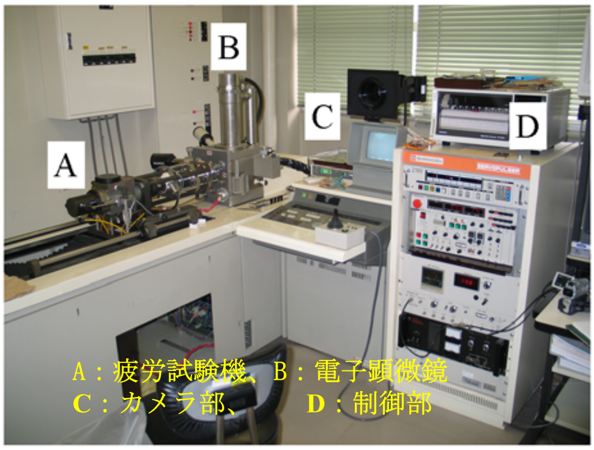


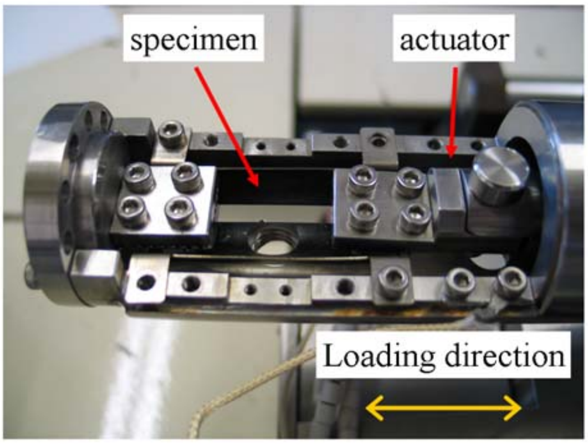
図 5.7 き裂発生。成長曲線計測のために用いられた端部切欠付極薄試験片

5.2 端部切欠付き極薄帯板を用いた疲労試験 [3)]

　前節のアルゴリズムの妥当性を確認するために、端部に切欠



a）試験機全体



b）A の試験片掴み部

図 5.8　SEM 内疲労試験機

を有する極薄帯板を用いた疲労試験がなされている。供試鋼材は SM400B 材でその降伏点は 305MPa である。図 5.7 が採用された試験片形状で、板厚は 0.1mm 以下となるように計画された。すなわち、板厚方向に多くの結晶があると平面問題として取り扱うことが出来ない。１結晶粒しか板厚方向に含まない試験片が理想であるが、それは困難なので、板厚を出来るだけ薄くした試験片に SEM 内で繰返し荷重を与えるように計画された。試験機は九州大学応用力学研究所所有の SEM 内疲労試験機（図 5.8 参照。b)の部分が SEM の中に入り、繰返し荷重下で顕微鏡写真が撮影できるようになっている。）を用いて行われている。試験片板厚は 0.1mm 以下を目論み、0.6mm に機械加工後、サンドペーパで注意深く薄くした試験片が用意された。総計 70 本が用意されたが、試験片セットや負荷時に試験片を壊すなどで試験のためのノウハウを掴むのに約１年の歳月を要したが、本試験で 6 本がデータ取得に成功した。これらの試験片の板厚は 0.081mm～0.437mm の範囲となっていた。荷重振幅を大きくすると、すぐさま破断したり、小さくしすぎると 1 ヶ月経ってもき裂が入らないなど、き裂発生・成長曲線を得るための適切な荷重を実験的に調査した結果、応力範囲を 214.6MPa、応力比 0.05 で一応データが取得されたので、他の試験片は全てこの試験条件で行われている。き裂の観察はビデオに収録した映像で行われている。図 5.9 に撮影された画像を例示する。A ならびに B は切欠底であり、本例では突き出し・入れ込みによる 1.6μm の段差（食違い）が観察されている。1 枚の画像だけではき裂先端位置の判別は難しいが、時間（コマ）を進めていくことでき裂か否かの判別が可能である。試験片毎に切欠底から最初の結晶粒界までの距離が異なるので、試験片毎に荷重線に垂直な面への投影距離 r_0 が計測された。

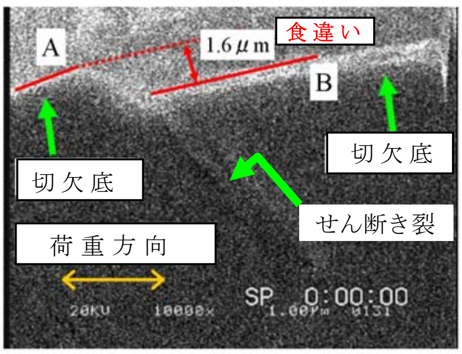
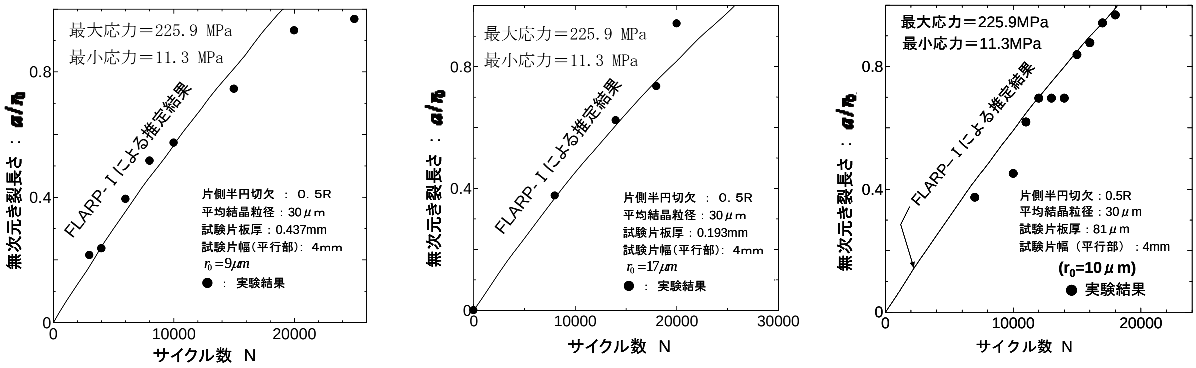


図 5.9 切欠底に入ったせん断き裂の例

得られた計測結果と、個々の試験片で計測された r_0 を



a)　試験片 A（板厚＝0.437mm）　b)　試験片 B（板厚＝0.193mm）　c)　試験片 C（板厚＝0.081mm）

図 5.10 切欠底から発生・成長した疲労せん断き裂の成長曲線の計測値とシミュレーション結果

用いた上記アルゴリズムによるシミュレーション結果の例を図 5.10 に示す。他の 3 つの試験片も含めて、計測結果とシミュレーション結果は非常に良く一致している。本供試体の平均結晶粒径は 30μm であるため、板厚方向には結晶粒が 2〜13 個含まれている。厳密には板厚方向に 1 個しか含まない試験体で計測する必要があるが、非常に薄い試験片であるため、計測されている面を他の層が拘束する程度が小さいので、これらが疲労き裂成長にあまり影響を与えないのかも知れない。本件に関しては今後検討する必要があろう。

したがって、2 次元問題に対して健全な応力集中場から発生・成長する疲労き裂発生・成長曲線を推定することに世界で始めて成功している。このプログラムを Fatigue　Life Assessment by RPG load ということから FLARP と称している。

5.3 切欠部を減厚した CT 試験片によるブロック・ランダム試験

図 5.7 に示した試験片では、非常に小さな容量の疲労試験機でないと、精度よく計画した応力を試験片に与えることが出来ない。また、少しの荷重変化が試験片には大きな応力変化となるため、特に完全片振に近い荷重制御で行う試験では最小荷重時に座屈を引き起こす懸念があり、試験を失敗する可能性が高い。5.2 での経験を踏まえ、図 5.11 に示すように、切欠部の一部分だけを薄くした CT 試験片にブロック繰返し負荷を与える疲労試験が後藤ら [63]によってなされている。供試鋼材は SS400（降伏点 303MPa、引張り強さ 429MPa、伸び 31%）で、その平均結晶粒径は 30μm であった。本試験片の K 値は求められていないので、汎用 FEM の MARC を用いて K 値が求められている。

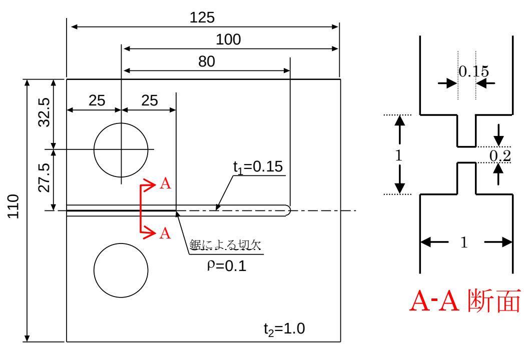


図 5.11 ランダム荷重下におけるき裂発生挙動を調べるために用いられた特殊 CT 試験片

試験片には図 5.12 に示すように 3 種の 3 段ブロック繰返し負荷荷重を作用させている。1 つは

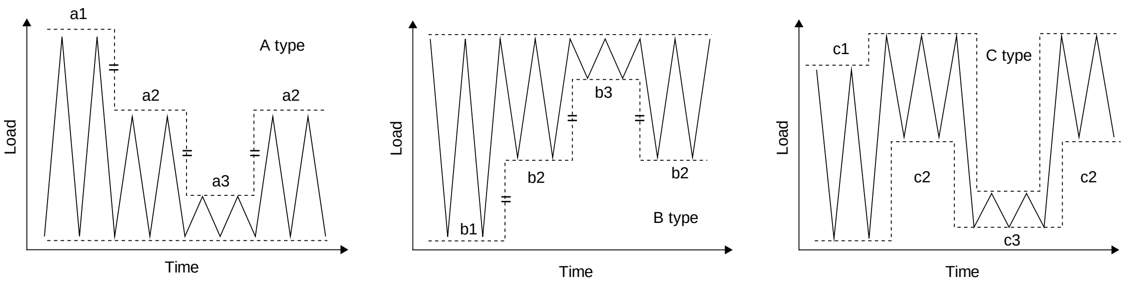


図 5.12　三段ブロック荷重の載荷パターン

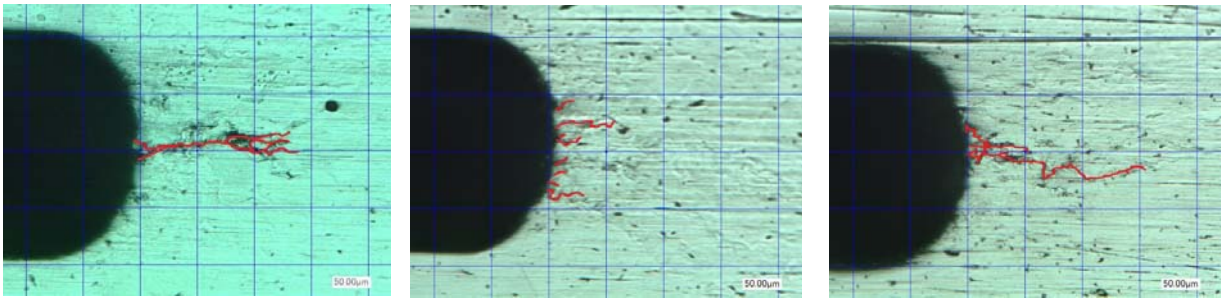
表 5.1 裁荷荷重の概要

載荷条件		最大荷重 [kN]	最小荷重 [kN]	サイクル数	荷重振幅 [kN]
A	a1	0.392	0.118	1000	0.274
	a2	0.261	0.118	1000	0.144
	a3	0.131	0.118	1000	0.013
B	b1	0.392	0.118	1000	0.274
	b2	0.392	0.248	1000	0.144
	b3	0.392	0.379	1000	0.013
C	c1	0.343	0.069	1000	0.274
	c2	0.408	0.265	1000	0.144
	c3	0.131	0.118	1000	0.013

最小荷重を常に保持して最大荷重を変化させる A パターン、2 つ目は最大荷重を常に保持して最小荷重を変化させる B パターン、最後の 1 つは最大荷重、最小荷重とも変化させる C パターンである。ブロックの出現順序は A パターンでは a1→a2→a3→a2、B パターンでは b1→b2→b3→b2、そして C パターンでは c1→c2→c3→c2 を 1 セットとし、これを繰返し与えている。それらの具体的な荷重は表 5.1 に示されている。載荷速度は 10Hz で行われており、き裂の計測には高解像度 CCD カメラ（拡大率 500 倍を採用）が用いられている。変動荷重下においても 5.1 節のアルゴリズムが成立することを実験で確認することが目的であるため、切欠底近傍はバフ剤で入念に研磨し、可能な範囲で表面の微細な傷や加工痕が除去されている。

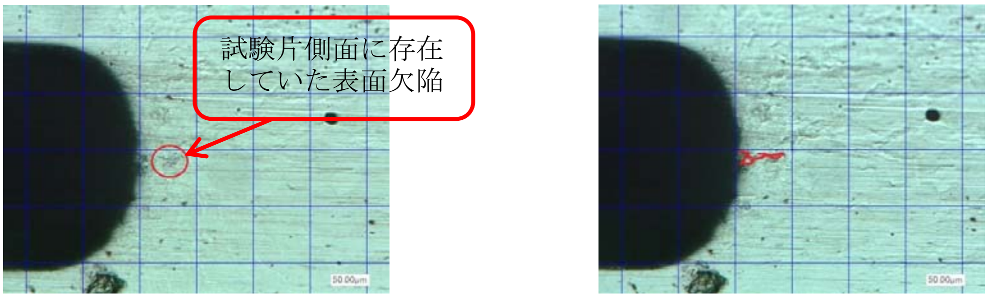
図 5.13 は試験を途中で打ち切った試験片の切欠底近傍の拡大写真である。き裂は薄い線として現れるので写真では視にくいため、赤線を付している。図にみるように、1 箇所だけからだけでなく、たくさんのき裂が生じている。しかも、合体だけでなく分岐も起っており非常に複雑な発生・伝播挙動を呈している。

図 5.14 は、主き裂先端の前方（試験片側面）に現れた表面き裂と主き裂とが合体する様子を観察したものである。試験前には(a)で赤丸印で示した位置で認められるき裂部で明確な傷を認められなかった。したがって、このき裂は極浅い表面傷から入った疲労表面き裂と考えられる。すなわち、切欠先端付近の溝底をバフ研磨を行っているが、溝幅が 1mm のため、研磨方向がき裂方向になり荷重垂直方向の傷をなくすことが出来なかったために、荷重直角方向の傷から疲労き裂が発生したものと考えられる。また、このために荷重軸と直角方向の微細きずを”そこかしこ”に残



a）A パターン、110387 サイクル　　b) B パターン、83087 サイクル　　c) C パターン、84700 サイクル

図 5.13 各荷重パターンの試験終了時点のき裂発生・成長状況



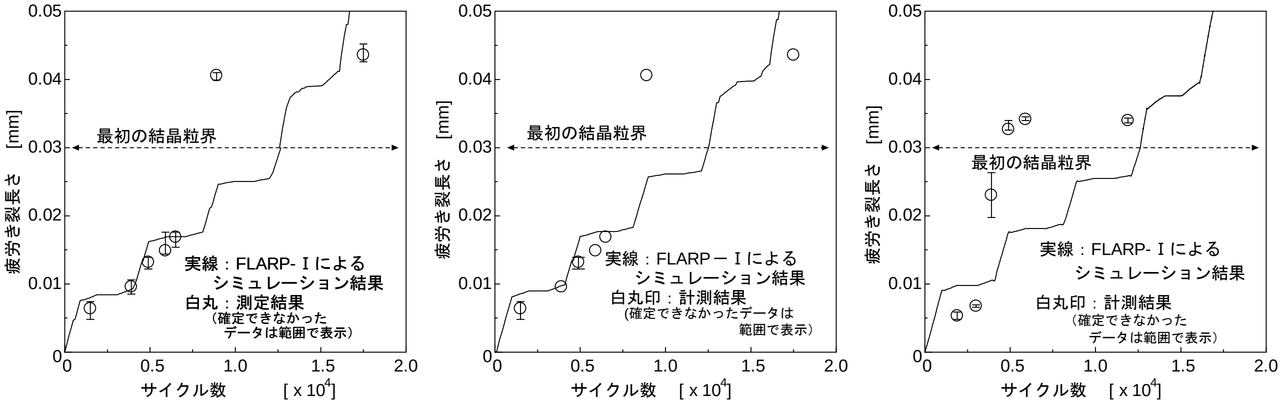
(a) 7905 サイクル　　(b) 8901 サイクル

図 5.14 試験片側面に存在する表面欠陥と主き裂の合体（荷重パターン A）

してしまった結果多数箇所から疲労き裂が発生し、それらが成長過程で他のき裂と合体したために最大せん断応力方向の荷重軸と 45 度に近い方向にき裂が成長しなかったものと考えられる。事実、5.2 節の試験ではこのような現象は観察されておらず、初期には荷重軸とほぼ 45 度傾いた方向に成長している。すなわち 5.2 節の切欠付帯板では、サンド・ペーパで研磨するとき、各ペーパの番手における研磨方向は 1 方向とし、直前のペーパ番手における研磨方向とは直角にし、直前の研磨傷がなくなるまで研磨しており、最終の研磨方向は荷重軸方向としているので、傷からの疲労き裂を入りにくくしている。

しかし図 5.11 のように幅が狭い溝では、溝と平行な方向の研磨はできるが直角方向の研磨は難しいので、小さな表面傷を残さないようにするのは非常に難しい。したがって荷重線に垂直な方向の傷が図 5.11 の試験片には存在し、これらからも疲労き裂が伝播し、これを主き裂は取込む形で成長している。そこで複数個存在するき裂に関して最も成長しているき裂に着目し、そのき裂の切欠線上への投影長さと載荷荷重サイクルとの関係が調査されている。それらの結果は図 5.15 に示されている。

図 5.15（a）の 9000 サイクル 付近及び図 5.15(c)の 4000 サイクル付近において、き裂長さが急激に伸びたという観察結果が得られているが、図 5.14 で示したような、主き裂先端の前方（試験片側面）に存在した表面欠陥が板厚方向に成長し、切欠底から発生したき裂と結合したことが原因としている。その後のき裂伝播速度が低下したのは、結合した表面き裂が板厚方向へ貫通するために、ある程度の期間を要した結果、観察対象のき裂進展が抑制されたことが原因であると推察されている。



(a) 荷重パターン A　　(b) 荷重パターン B　　(c) 荷重パターン C

図 5.15 ブロック荷重下における切欠底からの疲労き裂の大きさとサイクル数の関係（計測結果と FLARP-Ⅰによるシミュレーション結果。サイクル数は処女材に負荷を与えた瞬間からのもので、き裂発生寿命を含む）

このように、巨視的には表面傷からの疲労き裂によって主き裂伝播方向が変化したり、合体によって成長が一時的に促進されその後、表面状き裂が板厚方向に伝播するため停滞するといった現象が溝付き試験片には存在するが、5.1 節のき裂は主応力面に投影された長さで評価されていること、き裂結合力モデルが、塑性域がき裂線上から離れた位置で形成されていても塑性域をき裂線上に投影したもので成立しているという図 1.25 の結果などから、巨視的には 5.1 節のき裂発生モデルで、本節の疲労き裂発生・成長曲線が評価できているものと考えられる。

最初の結晶粒内を成長している間のき裂成長曲線は、図 5.11 の試験片に対して MARC で求めた K 値を用いて計算できるが、結晶粒界を超えてき裂開口モードが生じ出だしてからは、3.1 のき裂開閉口モデルを使用する必要がある。したがって図 5.11 の試験片のき裂面の任意位置に集中荷重が作用する場合の任意位置の COD を求めておく必要がある。しかしこれは煩雑すぎるので、ここでは後述の 7 章に示す等価分布応力を用いてシミュレートされている。図 5.15 中にこのようにして求めた結果が実線で示されている。ただし、疲労き裂伝播式(2.1)式の C、m は図 2.19 で得た結果が用いられており、繰返し荷重下の降伏点は静的降伏点の 55%としている。

このように、ブロック変動荷重下においても、5.1 のき裂発生モデルが成立していることが分かる。したがって、平面問題に関して応力集中箇所からの疲労き裂発生・成長曲線を定量的に推定する手法が世界で始めて確立されたことになる。すなわち繰返し塑性域寸法を介して、荷重順序ならびに残留応力の影響も考慮して、応力集中場からの疲労き裂発生・成長曲線を定量的に推定できる。

6. 表面き裂の成長・合体

溶接構造物では、構造的不連続箇所の溶接終始端部（止端）など応力集中部から表面き裂として疲労き裂が発生し、他から発生したき裂と合体・成長を繰返し、大きなき裂に成長していくのが一般的である。場合によっては、融合不良などの溶接欠陥から非貫通き裂として発生・成長す

る場合もある。5 章までの結果から、疲労き裂成長速度は繰返し塑性域寸法に依存することが分かる。しかし、表面き裂などの板厚非貫通のき裂に対する繰返し塑性域寸法を、固有変位の変化も考慮して求めることは容易ではない。6 章、7 章では、非貫通き裂のアスペクト比変化をデータ・ベース化し、最深点のみのき裂成長を固有変位を考慮して推定する手法について言及する。

6.1　単一表面き裂の成長

9%Ni 鋼板より作成された図 6.1 に示す試験片を用いて、繰返し引張荷重と繰返し曲げ荷重を同期させて与えた疲労き裂伝播試験（図 6.2(a)参照：疲労試験機は 100 トン引張・圧縮油圧サーボ試験機に 1000 kgf･m 平面 4 点曲げ油圧サーボ試験機を組合せた複合試験機を使用）、ならびに繰返し平面曲げ荷重を与えた疲労き裂伝播試験（図 6.2(b)参照）がなされている[64),65)]。試験片には、一様繰返し引張応力と一様繰返し面外曲げ応力が複合して作用する。試験片中央には、図 6.1 の切欠詳細に示す切欠が、放電加工で導入されている。この疲労き裂伝播試験では、ビーチマーク法（第 2 編 2.3.4 項脚注参照）が採用されており、破面に形成されたビーチマークをもとに、板厚方向の疲労き裂伝播速度が計測されている。

図 6.3[65)]はその結果であり、図中には、同じ 9%Ni 鋼鋼板から採取された 4 点曲げ試験片（き裂は板厚方向に伝播するように、切欠加工されている）を用いて疲労き裂伝播試験を行った結果も

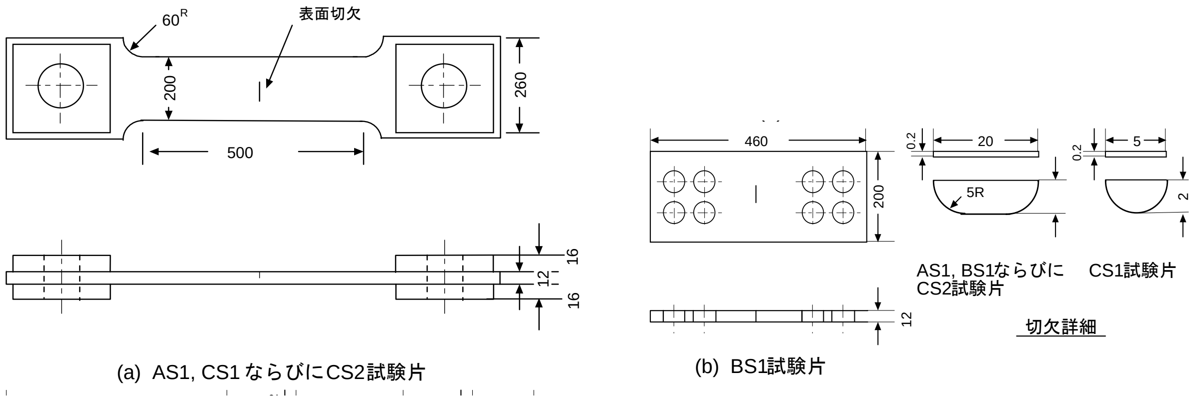


図 6.1　引張と面外曲げを受ける表面き裂付き平板疲労き裂伝播試験片

一点鎖線で示されている。これらの試験はすべて応力比 0.05、すなわち、ほぼ完全片振り条件下でなされたものである。図中の β は次式

$$\beta = \frac{\Delta\sigma_b}{\Delta\sigma_m + \Delta\sigma_b} \tag{6.1}$$

ただし、

$\Delta\sigma_m$ ：面内引張応力振幅

$\Delta\sigma_b$ ：面外曲げ応力振幅

で定義され、曲げ応力比と呼ばれている。

β がほぼ 0、すなわち、面外曲げ荷重がほとんど作用しない状態では、図 6.4(a)に示すように、

ほぼ半円状に表面き裂が成長する。一方、面外曲げ応力振幅が、面内応力振幅に比して大きい場

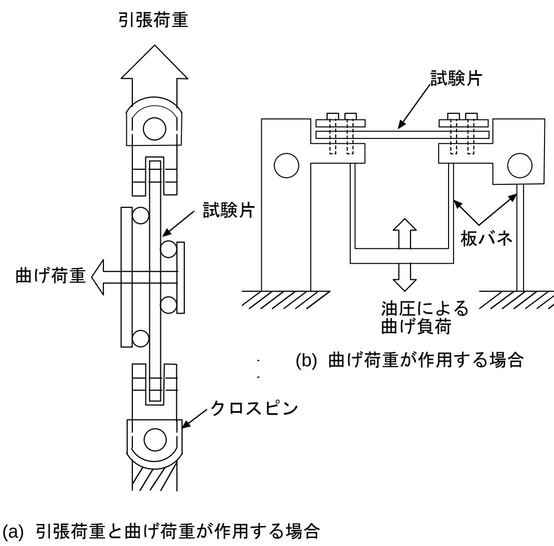


図 6.2　引張荷重と面外曲げ荷重を平板試験片に与える試験機
((a)引張±980kN、曲げ荷重±490kN、(b)静圧軸受けを用いた面外曲げ試験機

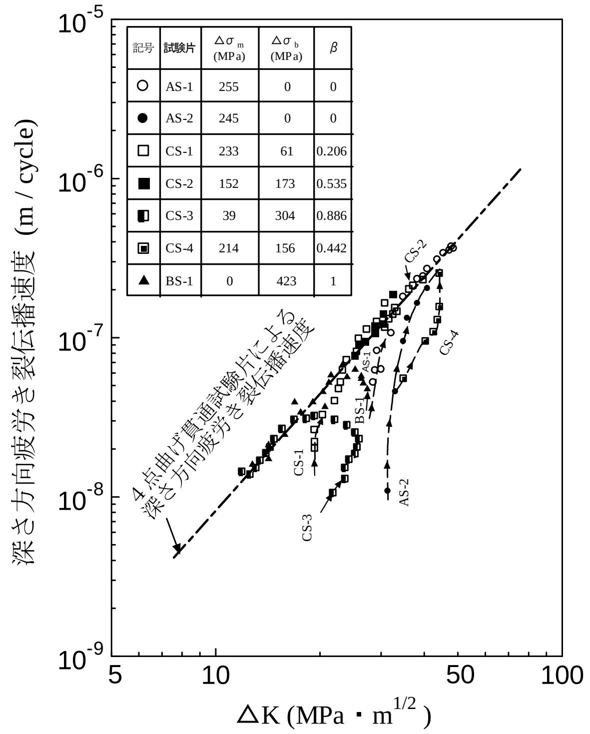


図 6.3　引張と面外曲げを受ける表面き裂の板厚方向疲労き裂伝播速度の計測結果

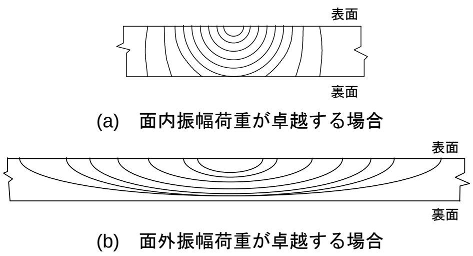


図6.4　引張と面外曲げの複合荷重下での表面き裂伝播形状の模式図

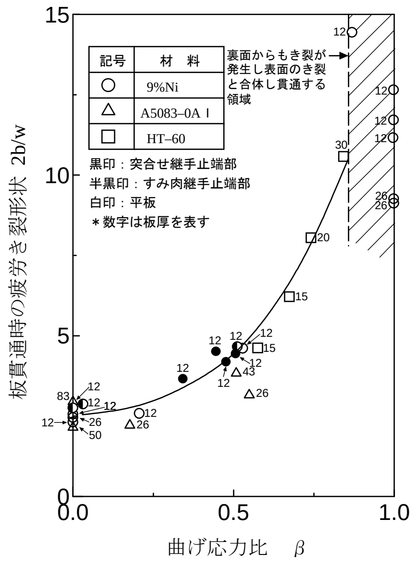


図6.5　板厚貫通時の表面き裂全長

合、図 6.4(b)に示すように、深さが浅く、表面が長い偏平な半楕円状き裂として成長する。

図 6.5 は、表面き裂が表面から成長して、裏面に達した時点のアスペクト比の逆数の 2 倍（＝き裂全長/き裂深さ）と、曲げ応力比の関係を調査した結果[65]である。βが大きくなる程、板厚貫通時の疲労き裂の表面長さが長くなっている。

β が 0.8 程度以上になると、疲労き裂はある深さ（板厚の８割程度）になってからは、表面から連続的に深さ方向に成長せず、表面幅方向のみ成長する。そして、非常にき裂が長くなってからは、低サイクル疲労により裏面からき裂が発生・成長し、これと表面側からのき裂が合体し、板厚を貫通することになる（すなわち、表面から裏面に進展するき裂と裏面から表面に向かうき裂が合体して板厚貫通き裂となる。裏面には、この直前、図 6.6 で、AB、CD、・・・LM というように、荷重軸に垂直な方向に数 mm の薄い線が２列に現れ、き裂進行に伴い、この線が段々黒くなり、ついには BC、DE、・・KL 間がせん断き裂で繋がることが観察されている。そのため、このような状態では、１サイクル中、板厚内でき裂が完全に開口することがなく、この貫通き裂を通じての液体の漏洩は、BC 等のせん断き裂の段差部で起こり、漏洩が激しくなるのは、かなりの長大き裂になった時と考えられている。

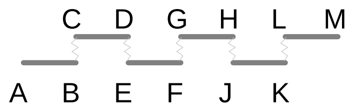


図 6.6　面外曲げが支配的な応力場において、裏面で認められた板厚貫通時のき裂形態

図 6.3 において、最深部についてのき裂成長方向が矢印で示されているが、一定振幅荷重下では、β が小さい場合には、き裂の成長に伴って ΔK が上昇する。一方、β が大きい場合には、始めき裂の成長に伴い ΔK は上昇するが、ある程度き裂が深くなってからは、き裂の成長に伴い ΔK は減少している。き裂閉口域が十分発達し定常状態に入ったと判断することは難しいが、き裂が大きくなってからは、表面き裂最深部の ΔK と疲労き裂伝播速度の関係が、２次元き裂のそれらの関係（一点鎖線）と等しくなっていることが分かる。なお、ここでの表面き裂最深部の K 値は、無限体中の埋没楕円き裂の応力解析解と、無限体中の一点に集中力を作用させた場合の応力解析解をもとに、front surface 上の垂直応力が打ち消されるように繰返し計算する（boundary collocation 法: boundary collocation method）ことにより求められた結果 [66] を多項式近似したものが使用されている。しかし、その K 値は、Newman による(1.59)式から与えられる結果と大差はない。

川原ら [67] は、平板中央に幅 1 mm、ならびにそれより幅広の種々の突起を付け、その中央に鋸で切欠を入れた後、繰返し荷重を与え突起物中に疲労き裂を発生・伝播させ、平板に疲労き裂が入った時点で、突起物を削除した試験片（図 6.7 に示した試験片から突起を削除したもの）を作成した。そして図 6.7 に示すように補剛材と一体にして、繰返し４点曲げ荷重を与え、表面き裂の成長に伴う形状変化をビーチマーク法で調査した。補剛材がない場合には純曲げとなり、補剛材が厚くなるほど β は小さくなる。また別に、繰返し引張荷重を与えて β が 0 の試験も実施している。

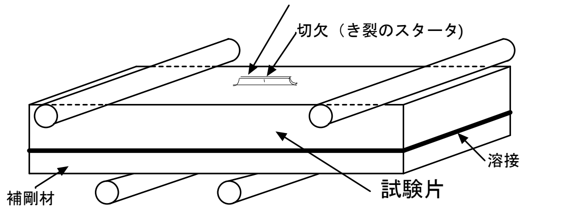


図 6.7　川原らが用いた、引張荷重と面外曲げ荷重を複合させた疲労き裂伝播試験法

その結果、表面き裂深さ a と表面半長 b の比、すなわちアスペクト比は、点状き裂を起点とする場合（突起物幅 1mm で、疲労き裂が平板に入った時点で、切削した後のき裂形状はほぼ半円形）は、き裂深さに対して線形に変化することを明らかにしている。そして、その形状変化は、

$$a/b = f\left(a/w\right) = y = f\left(x\right) = \tilde{A} - \tilde{B}x \tag{6.2}$$

ここで、

$$\tilde{A} = 0.98 + 0.07\beta$$

$$\tilde{B} = 0.06 + 0.94\beta$$

となることを示した。$f\left(x\right)$ を、彼らは均衡成長曲線(balanced growth curve)と名付けている。

一方、深さが浅く、表面の長さが長い表面き裂を起点とする場合（突起物幅が大きく、疲労き裂が平板に入った時点で、切削した後のき裂形状は浅い偏平な半楕円形となっており、その深さは a_0、表面長さは $2b_0$）は、$\left(X_0, Y_0\right)$(ただし、$X_0 = a_0/t,\ Y_0 = a_0/b_0$）点が(6.2)式より小さい場合、すなわち

$Y_0 < \tilde{A} - \tilde{B}\cdot X_0$ の場合､原点と $\left(X_0, Y_0\right)$ を通る直線 $g\left(X\right)$ と(6.2)式を漸近線とする放物線で表せることを示した[67]。

$$\frac{1}{Y^n} = \frac{1}{\left\{f\left(X\right)\right\}^n} + \frac{1}{\left\{g\left(X\right)\right\}^n} \tag{6.3}$$

ただし、　$n = 1 + m/2$

m ：Paris 伝播式の指数

しかし、(6.3)式は $\left(X_0, Y_0\right)$ を通らないので、下記のように修正されている[68]。すなわち

$$g\left(X\right) = \eta X \tag{6.4}$$

ここで、

$$\eta = \frac{X_0 Y_0\left(\tilde{A} - \tilde{B}X_0\right)}{\left\{\left(\tilde{A} - \tilde{B}X_0\right)^n - Y_0^n\right\}^{1/n}}$$

図 6.8 において赤色で示す漸近線のように変化する[68]。一方、　$Y_0 > \tilde{A} - \tilde{B}\cdot X_0$ の場合

$$Y^n = \left(\tilde{A} - \tilde{B}\cdot X\right)^n + \frac{1}{\left(X - \zeta\right)^n} \tag{6.5}$$

ここで、

$$\zeta = X_0 - \frac{1}{\left\{Y_0^n - \left(\tilde{A} - \tilde{B}\cdot X_0\right)^n\right\}^{1/n}} \tag{6.6}$$

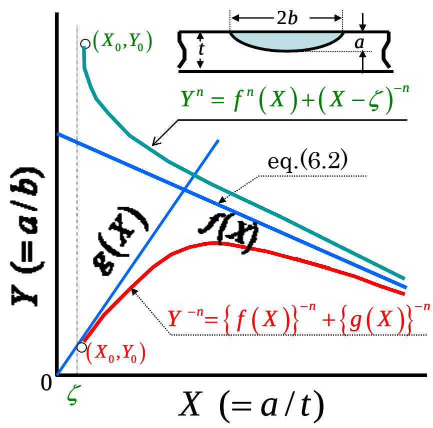


図 6.8 表面き裂のアスペクト比変化

となり、図 6.8 の緑線に沿って変化することが飯田らにより示された [69]。当然$\left(X_0,Y_0\right)$点が(6.2)式の線上にある場合には、(6.2)式に沿ってアスペクト比が変化することになる。なお、$g\left(X\right)$は、表面においてき裂は成長せずに、深さ方向にのみき裂が成長する場合のアスペクト比変化を表している。また、(6.2)式の線上に起点がなく、板厚方向に図 6.8 で赤線あるいは緑線で示すようにアスペクト比が変化するき裂成長を非均衡成長曲線(unbalanced growth curve)と呼んでいる。

これを契機に、単一表面き裂だけでなく、複数近接表面き裂の伝播過程におけるアスペクト比変化に関する共同研究が、日本溶接協会原子力部会で３年間なされ、膨大なデータが取得された [68]。そして、この結果を用いた解析結果が報告されている。単一表面き裂に対しては、上記提案式による結果と非常に良く合致したデータが得られている。上記の表面き裂の形状変化を模式的に表したのが図 6.8 である。

図 6.9[70]は、表面き裂の最深部と表面のそれぞれについて、Paris 則、すなわち、

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dN}&=C_1\left(\Delta K_A\right)^{m_1}\\\frac{db}{dN}&=C_2\left(\Delta K_B\right)^{m_2}\end{aligned}\right\}\qquad(6.7)$$

ここで、

C_1, m_1 ：板厚方向に伝播するき裂の Paris 則の定数

C_2, m_2 ：板厚貫通き裂の Paris 則の定数

K_A ：最深部の K 値

K_B ：表面における K 値

を連立させて、半円状表面き裂（細点線）および偏平な表面き裂（長い点線）を起点とした場合の、表面き裂成長に伴うアスペクト比変化を推定した結果である。図中には、均衡成長に対する川原らの結果も併せて記載しているが、(6.7)式では表面き裂のアスペクト比変化(change of aspect ratio)を推定できないことが分かる。点状の小さいき裂を起点とする均衡成長では、一様引張振幅応力が作用する（$\beta=0$）場合についても、アスペクト比がき裂成長とともに徐々に小さくなっており、面外曲げ振幅応力が重畳すると、さらにアスペクト比は、き裂深さ a に対して線形的に小さくなっている。したがって、均衡成長の場合、

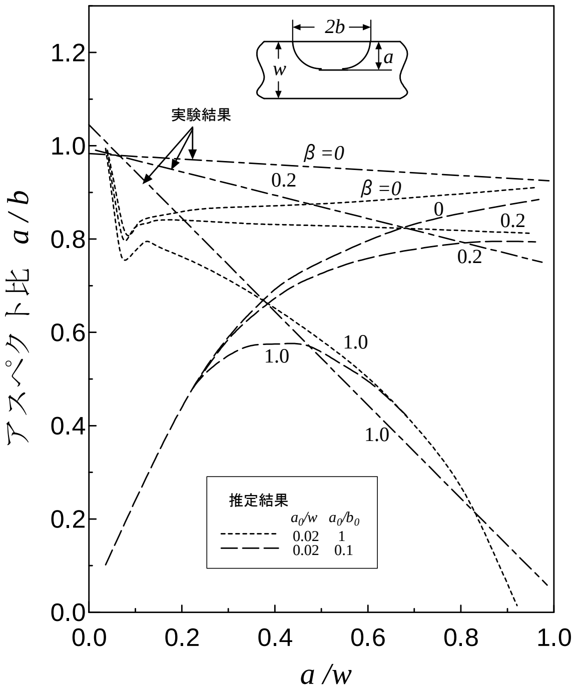


図 6.9 引張＋曲げ振幅荷重下での表面き裂成長に伴うアスペクト比変化（Paris 則による推定結果と実験結果の比較）

$$U_{RA}\Delta K_A < U_{RB}\Delta K_B \qquad (6.8)$$

ここで、

U_{RA}：最深部における有効荷重比
U_{RB}：表面位置における有効荷重比

しかも、(6.7)式の計算結果が、実験結果よりも小さいアスペクト比を与えることから、

$$U_{RA} > U_{RB} \tag{6.9}$$

(6.8)、(6.9)式より均衡成長の場合には、

$$1 > \frac{U_{RB}}{U_{RA}} > \frac{\Delta K_A}{\Delta K_B} \tag{6.10}$$

RPG 荷重がき裂開口荷重の直上にあることを考慮すると、(6.7)式より均衡成長の場合には、最深部の方が表面部より負荷過程の早い段階で開口するという現象が生じていることが分かる。

6.2　応力集中箇所から生じる複数表面き裂のアスペクト比変化

繰返し荷重下の複数表面き裂の成長・合体に関する共同研究 68)が、日本溶接協会でなされた。その目的は、稼働中に発見されたき裂を補修すべきか否かの判断をする際に、疲労き裂成長挙動を定量的に推定しておくことが重要となるからである。そこでは、個々のき裂の位置があらかじめ判明していることが前提となる。しかし、健全な継手部で複数個発生するき裂の位置を特定することはできない。さらに検査、補修という実用的観点から、表面におけるき裂成長に着目しており、健全な箇所からの寿命評価法としては利用できない。

図 6.10 は、図 6.11 に示す試験片に引張繰返し荷重を与えて適時試験を中断し、インクをき裂面に浸透させ（各段階で濃い色から、薄い色に変化させている）十分乾かした後、試験を再開するという過程を繰返して得られた破面から、個々の表面き裂のアスペクト比を調べた結果である

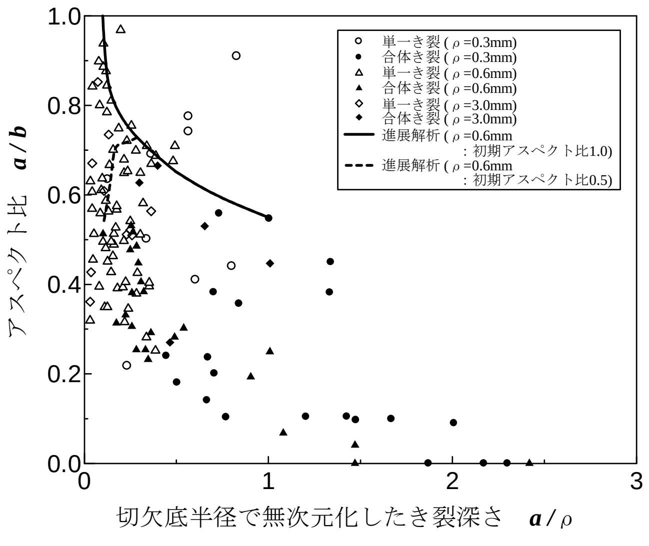


図 6.10　切欠底に発生した個々の表面き裂のアスペクト比

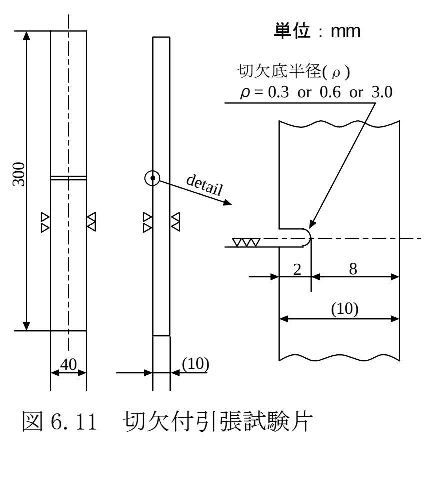


図 6.11　切欠付引張試験片

[71]。すなわち、試験終了後破面に残されたインク跡から、負荷中断時における個々の表面き裂のアスペクト比を求め、無次元き裂深さ(=き裂深さ/切欠半径)との関係を調べた結果である。

図中、合体したものは黒抜きの記号で示されている。この結果からは、き裂合体が完了する時点のき裂の深さは、$\rho = 0.3mm$（ρ：切欠底半径）で 0.25mm、$\rho = 0.6mm$ で 0.3mm、$\rho = 3mm$ で 0.4mm 程度となっており、非常に浅いき裂の状態で合体が完了していることが分かる。

また、図から分かるように、非常にバラツキが大きく、一定の関係を導出できない。しかし、全体としては、き裂が深くなるほどアスペクト比は小さくなり、き裂進展とともに偏平なき裂になる傾向がある。そして、き裂深さが浅い段階で偏平なき裂になっていることが分かる。なお、図中の実線および点線は、初期のき裂の深さを 0.3mm とし、その時のアスペクト比を 1 ならびに 0.5 に設定し、それぞれ 1 つだけのき裂が伝播したとして Paris 則を用いて、アスペクト比を推定した結果である。ただし、K 値は白鳥らの影響関数法 [72]によって求めたものが使用されている。

このように、個々の表面き裂に着目すると、その成長過程にある法則を見い出すことは非常に難しいことが分かる。

6.3　干渉効果で上昇した K 値と同じ K 値を有する単独表面き裂

多数の表面き裂が近接して存在する場合、表面だけでなく、き裂前縁線に沿う K 値は、近接する他の表面き裂の影響を受け、いわゆる干渉効果で大きくなる。表面では合体と同時に、き裂長さが急に大きくなり、疲労き裂成長曲線に不連続が生じる。

疲労き裂は、初期には辷り線上に生じるが、辷り線は最大せん断応力方向とほぼ等しい結晶の高密度原子面に生じる。疲労き裂が入る応力集中箇所の表面には、大きさ、結晶方位の異なる多数の結晶が存在する。したがって、稠密面（もしくは高密度原子面）が最大せん断応力方向とほぼ等しい結晶に、疲労き裂が最初入ることになり、結晶内で転位の移動を阻止する障害物(たとえば、パーライトのような硬い組織)が存在しても、結晶内ではマトリックスは連続しており（結晶内の障害物は連続していないため）、マトリックス(たとえば、フェライト組織)を通じて伝播し、連続する障害物、すなわち、結晶粒界に達するまでは同一法線を有する平面上を伝播することになる。

そのため、疲労き裂が入った結晶の内で、最も大きな結晶における疲労き裂が、最初は最も速く成長するものと考えられる。大きなき裂ほど K 値も大きくなるので、一番大きなき裂が核となり、それが成長する段階で、小さなき裂を包含するように成長するものと考えられる。したがって、最も深いき裂に常に注目し、深さ方向にき裂の成長を考えれば、連続した疲労き裂成長曲線が得られることになる。すなわち、最深部において干渉効果を考えたき裂成長を推定できれば良いことになる。

隅肉溶接止端部や開口部から発生・伝播する複数個の表面き裂が成長・合体を繰返し、合体を完了した時点の表面き裂の深さは、図 6.10 の結果からも分かるように、経験的には"ゼロ点ナン㎜～数㎜"のオーダであり、あまり深さ方向には進展していない状態で合体を完了する。したがって、合体が完了するまでを論じるのであれば、一様応力を受ける半無限体中の表面き裂に対する干渉効果を考慮に入れて、その成長を調べれば事足りる。

種々のき裂に対する K 値は、ハンドブックにまとめられて報告されている [19)、73)]。これらのハンドブックに掲載されている、半無限体の自由表面に複数個の直列表面き裂が存在する場合の K 値を使用することにより、以下の図 [76)] が作成できる。

図 6.12 は、同じ大きさの半楕円表面き裂が存在する場合の最深部における干渉効果による K 値上昇率 f_n を示している。すなわち、同じ大きさ・形の表面き裂が近接して存在する場合のき裂最深部の K 値は、薄く塗りつぶして示す表面き裂が単独で存在する場合のき裂最深部の K 値の f_n 倍になる。

一方、図 6.13 は、小さい半円表面き裂による、大きい半円き裂最深部のK値上昇率（干渉効果）を、同じ大きさのき裂（図中に薄く塗りつぶした２つのき裂）による最深部の K 値上昇率で除した無次元量を示したものである。横軸の 1 の位置は同一の大きさの半円き裂が 2 個近接して存在する場合に対応する。また、横軸の 0 の位置は大きい方の半円き裂が単独で存在する場合に対応する。$\varepsilon = 0$、すなわち、半円き裂が表面で合体する瞬間の K 値は、ハンドブックなどには与えられていないが、横軸が０、すなわち、$a_2 / a_1 = 0$ の場合には、単一の半円き裂の K 値減少率ということになり、図 6.12 中の $a / b = 1$、$\xi = 1$ における f_n の逆数が f_D となる（この時点では、$\varepsilon = 0$（図 6.13 で $d_2 = 0$、すなわち、　表面で２つのき裂が合体した瞬間）に対して、き裂寸法比

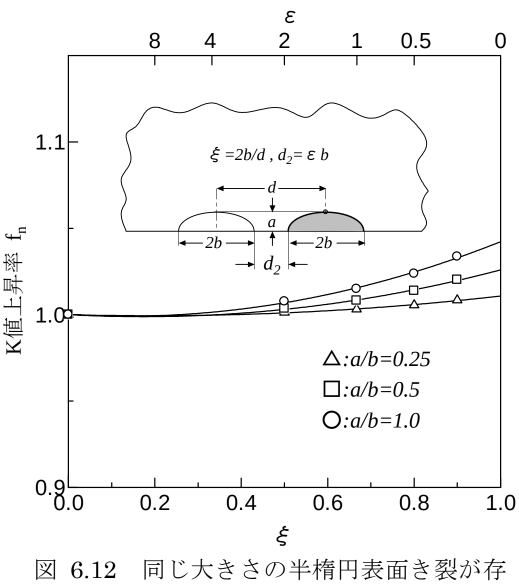


図 6.12　同じ大きさの半楕円表面き裂が存在する場合の最深部の K 値に対する干渉効果係数

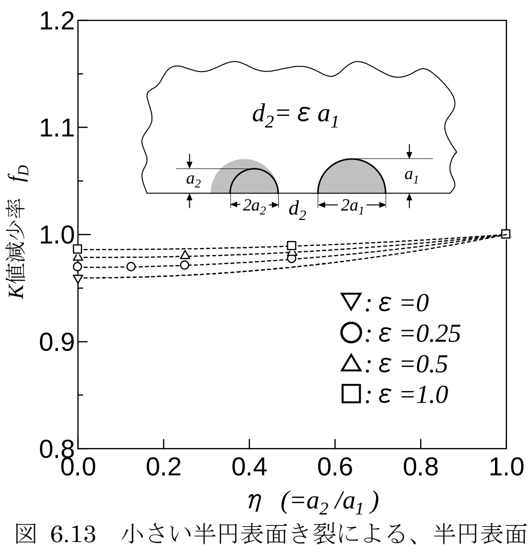


図 6.13　小さい半円表面き裂による、半円表面き裂最深部のK値減少率（同じ大きさの半円表面き裂が存在する場合の K 値に対して）

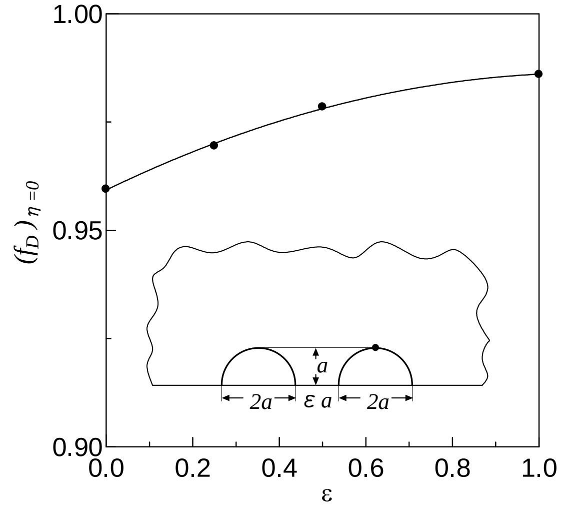


図 6.14　単独で存在する半円き裂の K 値と、同じ大きさの２つの半円き裂が存在する場合のＫ値との比（最深部について）

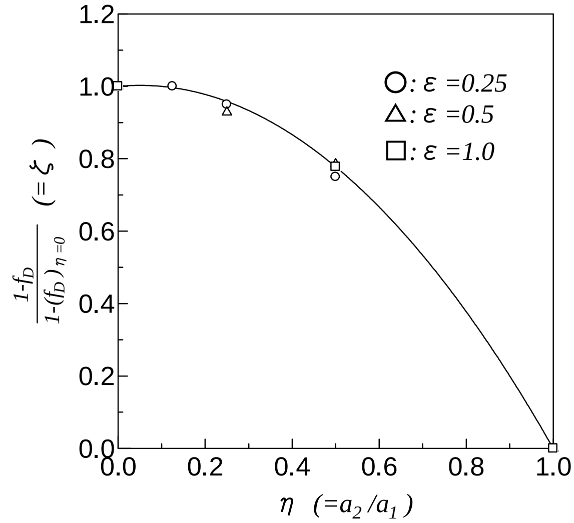


図 6.15　き裂隣接度が K 値に与える影響

$\eta = a_2 / a_1 = 0$ 以外の f_D は、決まらない)。

図 6.14 は、$\eta\left(= a_2 / a_1\right)$ が０の場合の f_D、すなわち、$\left(f_D\right)_{\eta=0}$ とき裂間隔の係数 ε との関係を、図 6.13 より求めた結果である。

図 6.15 は、図 6.13 の結果より、

$$\frac{1-f_D}{1-\left(f_D\right)_{\eta=0}}(=\varsigma)$$

を求めて、き裂寸法比との関係を調べた結果である。この結果より、2 つのき裂の間隔に関わらず、ς はき裂寸法比で決定されていると仮定して良いと考えられる（この線を用いて ε=0、0.25、0.5 および 1.0 の結果を推定したものが、図 6.13 中に点線で示されている)。この結果は、半円状のき裂が近接して存在する場合の結果である。相似な 2 つの半楕円表面き裂が近接して存在する場合、厳密には図 6.15 とは異なるが、ほぼ同じ結果が得られると期待される。

$\left(f_D\right)_{\eta=0}$ の値は図 6.14 より与えられるので、これと図 6.15 および図 6.12 を用いれば、相似な半楕円表面き裂が直列に存在する場合の、大きいき裂の最深部における K 値の干渉効果が推定できる。しかし、切欠底から生じるき裂は相似なき裂ではない。そこで、単独の表面き裂の伝播速度が、その面積の平方根と良い相関を示している [74)、75)] ことから、き裂寸法比を面積比の平方根とし、一番深いき裂の最深部における干渉効果が与えられている。これらの関係を使用することによって、深いき裂が単独に存在する場合の最深部の K 値に、上記の上昇率 f_n と減少率 f_D を乗じたものと同じ K 値となる単独の表面き裂(ただし、き裂深さは同じで、一様応力を受ける半無限体の表面き裂)の表面長さが求められる。

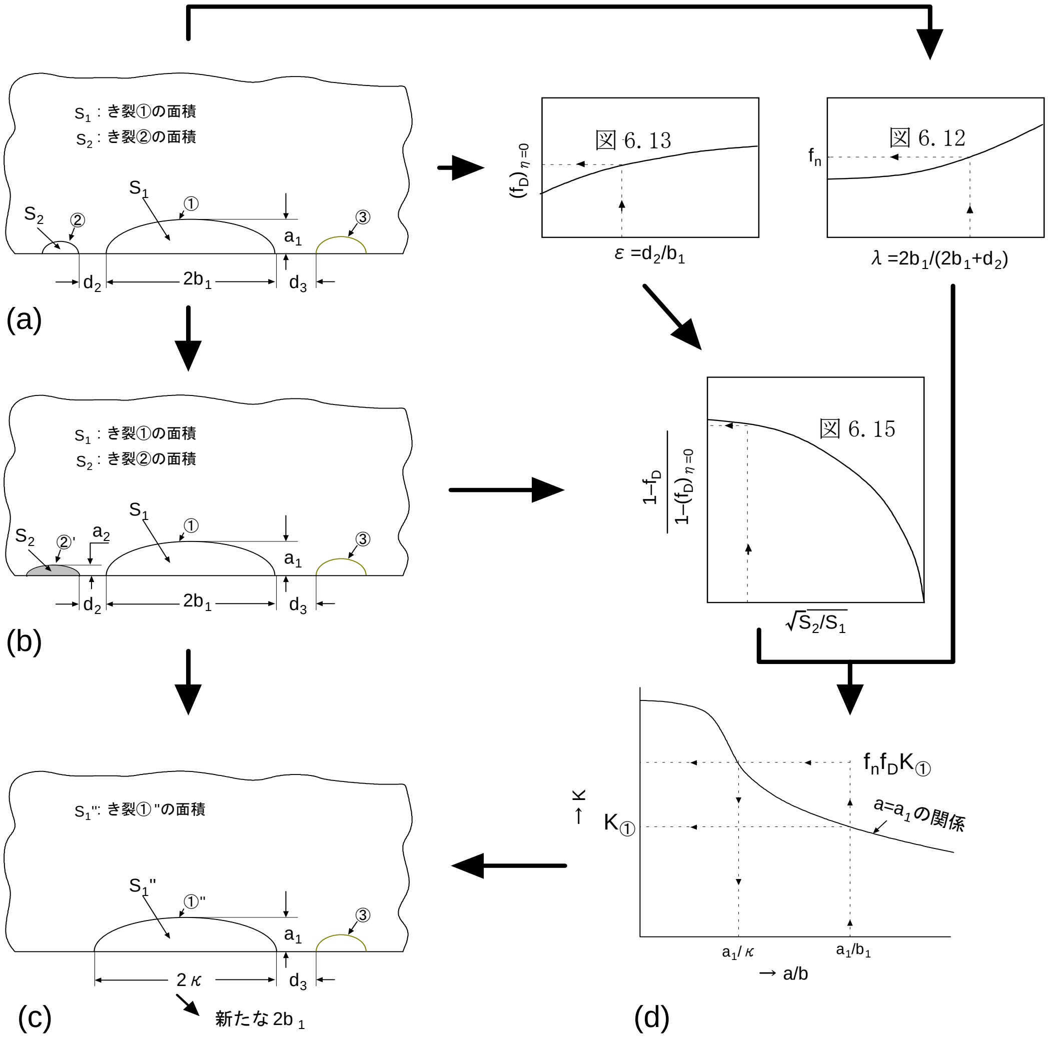


図 6.16　複数表面き裂の内最も深い表面き裂の最深部のK値と、同じK値を有し、なおかつ深さの等しい単独表面き裂への置き換え手順

上記の手法に従い、複数個の表面き裂が存在する問題を、単独表面き裂に代表させる（置き換える）手順を図 6.16 に示す。図 6.16(a)のように、３つの表面き裂が存在する場合について説明する。まず、この内で最も深いき裂①に着目する。このき裂と、このき裂に近接するき裂②の干渉を考えるため、①と同じ寸法のき裂がd_2離れて存在する場合のK値上昇率f_nを図 6.12 よりまず求める。次に、図 6.16 (b)に示すように、②のき裂をその面積S_2を保ったまま、①と相似なき裂に置き換え*、そのき裂深さをa_2とする ((b)図で黒く塗りつぶした②’と示したき裂)。$\varepsilon = d_2 / b_1$に対応する$\left(f_D\right)_{\eta=0}$の値を図 6.14 より求める。さらに、$a_2 / a_1 (= \sqrt{S_2 / S_1})$に対応する$\varsigma$値を図 6.15 から求める。そして、$\left(f_D\right)_{\eta=0}$と$\varsigma$値から$K$値減少率$f_D$を求める。次に、き裂深さ$a_1$を①の大きさに保持して単一表面き裂の最深部の$K$値と$a_1 / b_1$（$b_1$を変化させる）の関係を求め（図 6.16(d)

---

* 　面積が同じ表面き裂が、同じ干渉効果を与えるという保証はないが、単一表面き裂の場合には、疲労き裂伝播速度が、その時点のき裂の面積に規定されるという実験結果 72)、73)がある。すなわち、表面き裂の面積が△K値の役割を演じていることになり、同じ面積の相似なき裂への置き換えは、それによる干渉効果をほとんど変えないと期待される。

の実線)、a_1/b_1 に対応する K 値 $K_{①}$ を $f_n f_D$ 倍し、その大きさの K 値となるアスペクト比 a_1/κ を求める(図 6.16(d)参照)。

そして、②のき裂の干渉効果により大きくなった K 値と同じ K 値を有する表面き裂の表面長さ(半長)を κ とする(図 6.16(c)参照)。この κ を新たに b_1 とし、それを表面長さ(半長)とする仮想の表面き裂を考える。この表面き裂が単独で存在する場合の最深部の K 値は、図 6.16(a)で③のき裂が存在しない場合の、①のき裂の最深部の K 値とほぼ等しくなる。すなわち、②のき裂による干渉効果で上昇した K 値と等しくなる。③のき裂との距離 d_3 が変化しないように、この仮想の表面き裂を配置する(図 6.16(c)参照)。

上記の手順を、新しい仮想のき裂①”とき裂③について適用し、②と③のき裂の干渉効果で上昇した①のき裂の最深部の K 値を有する単独の表面き裂（仮想単独表面き裂）に置き換える。4 個以上の表面き裂がある場合には、上記と同じことを繰り返すことにより、複数個のき裂を単一のき裂に置き換えることができる。ここで、②と③のき裂を考える順序を逆にしても、仮想上の表面き裂長さはほとんど変化しないことが数例の計算により確認されている。

上記は、干渉効果を考慮した最も深いき裂の最深部の K 値と同じになる単独のき裂という概念により、1 つのき裂（仮想単独表面き裂）に代表させるものであるから、複数個のき裂の内で最も深いき裂についての K 値が、この仮想単独表面き裂によって表現できることになる。

6.4　仮想単独表面き裂のアスペクト比変化

6.4.1　母材開口部で発生・伝播するき裂

図 6.17 は、図 6.18 に示す U 型切欠付試験片を用いた疲労き裂伝播試験で得られた、切欠底に発生した表面き裂のアスペクト比変化である（全ての表面き裂をプロットすると図 6.17 のように上下に広い集団となり、傾向が分かりにくいので切欠(a)に対しては各計測時点で最も深いき裂についてのみ示されている）。

図中●印は、強制的に切欠底で 1 つだけの表面き裂が伝播するように目論まれた疲労き裂伝播試験結果である。すなわち、図 6.18(b)に示すように、切欠部の板厚中央部に残した薄いシート部に、薄い鋸で鋭い切欠を挿入し、そこから疲労き裂を伝播させ、少しき裂が切欠底板厚中央に入った時点でシートを切削した後、繰返し荷重を与えて疲労き裂を伝播させたものである [71)]。

強制的に 1 つだけの表面き裂を導入し、それが進展する場合には、アスペクト比変化はあまりばらつかずにある法則に従って変化しているように観察される。また、切欠底から普通に疲労き裂が入り進展する場合には、き裂進展につれて、全体としてはアスペクト比が小さく、すなわち、偏平になる傾向を示している。さらに、切欠半径が小さいほど、早く偏平なき裂になる傾向は認められる。しかし、図 6.10 同様、不連続的にアスペクト比が小さくなっているなど、ばらつきが

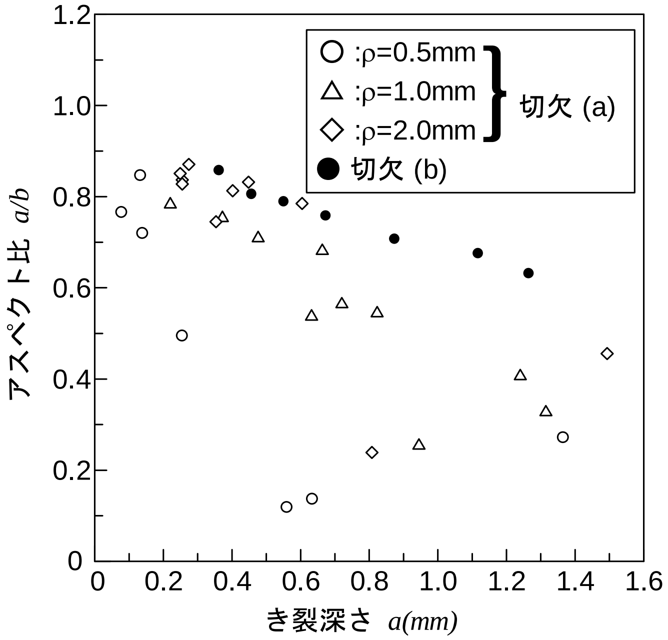


図 6.17　切欠底から発生した表面き裂のアスペクト比変化

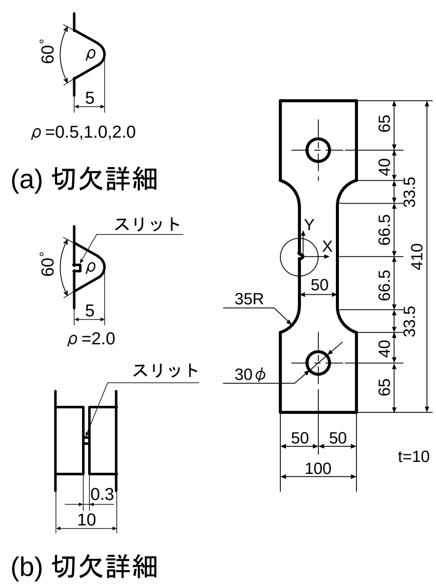


図 6.18　切欠付疲労き裂伝播試験片

大きく、明確な傾向を見い出すことが難しい。

図 6. 19[71]は、図 6. 18(a)の試験片のリガメントに作用する荷重軸方向の応力分布を BEM で求めた結果である。多点から発生したき裂が成長・合体を繰返し、合体完了する時点のき裂深さは図 6. 1 に示されているように、非常に浅い。したがって合体成長過程の表面き裂の K 値を推定するには、1. 7. 3 項でも説明したように、図 1. 28 の近似に替わって、表面の応力とき裂最深部での応力を直線で結ぶ応力下での表面き裂の K 値が一次近似として最も適切であると考えられる。したがって最深部の K 値と表面での K 値の比は、上記表面の作用応力と最深部位置での作用応力を結ぶ直線分布の応力が作用した場合の最深部の K 値と表面での K 値の比にほぼ等しいことになる。

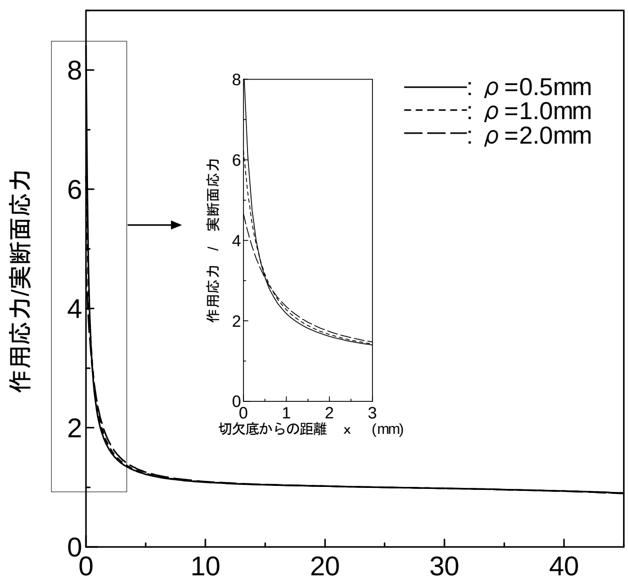


図 6.19 切欠付試験片の切欠線上に働く応力分布（図 6.18(a)試験片）

図 6. 20 は表面き裂最深部を含む板厚断面に作用する応力を模式的に示したものである。ここで、実線の $\sigma_y(x)$ は表面き裂が存在しない場合に切欠底断面 x 軸上に働く垂直方向応力分布で、図 6. 19 の応力分布に相当する。

したがって、$\sigma_y(x)$なる作用応力下で（き裂が存在しない状態において）、最深部のき裂深さがa_1である場合、表面き裂の表面でのK値と最深部のK値の比ϑは、切欠底位置での作用応力 A と、a_1位置での作用応力D_1を通るAB_1なる直線分布を有する応力が作用する場合の、表面のK値と最深部でのK値の比とほぼ等しくなる（図ではa_1が大きく、$\sigma(x)$とかなり異なる直線的応力分布となっているが、実際はa_1が小さいため、。AB_1なる直線状の応力分布と$\sigma(x)$は$[o, a_1]$間ではほぼ等しくなる）。また点状の小さい表面き裂から成長する表面き裂のアスペクト比は、き裂成長とともに常に小さくなっている（均衡成長）。一方偏平なき裂（非均衡成長をする）では、βが大きい場合を除くと、き裂成長とともにアスペクト比は大きくなる傾向にある。またβが大きい場合には、ある程度き裂が成長してからは、き裂の成長とともに小さくなるが、これは均衡成長曲線に漸近する領域である。すなわち、き裂成長とともにアスペクト比が小さくなる場合は、均衡成長曲線に従ってアスペクト比が変化すると期待される。

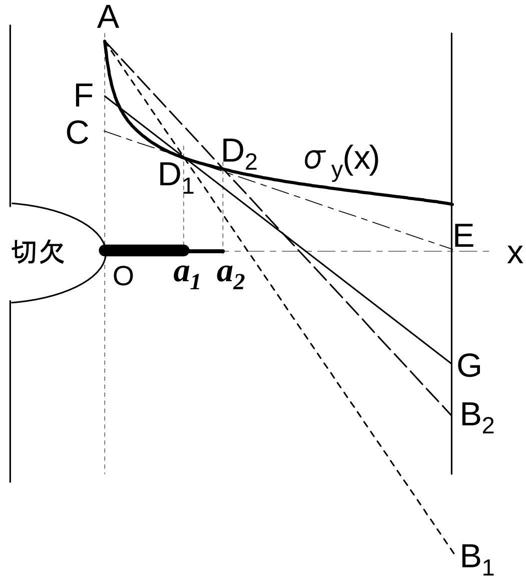


図 6.20　き裂最深部を含む断面に作用する応力分布

き裂深さがaのときのϑが、ABなる直線分布を有する応力が作用する場合のϑと等しいことから、き裂深さがa_iの時点でのアスペクト比変化率は(6.2)式を参照して、

$$\frac{d}{da}\left(\frac{a}{b}\right) = -\frac{(0.06 + 0.94\beta)}{w} \qquad (6.9)$$

ここで　β：AB_iなる直線分布に対する曲げ応力比

そこで、応力分布$\sigma_y(x)$より得られるβを用いて、ルンゲクッタ法(Runge-Kutta method)によりアスペクト比変化が推定された。その結果が図 6.21 の太実線である。この推定の初期値は、図 6.18(b)のシート中をき裂が伝播し切欠底に達した後、シートを削除した状態における表面き裂としている。図には、切欠底に働く応力分布σ_y（図

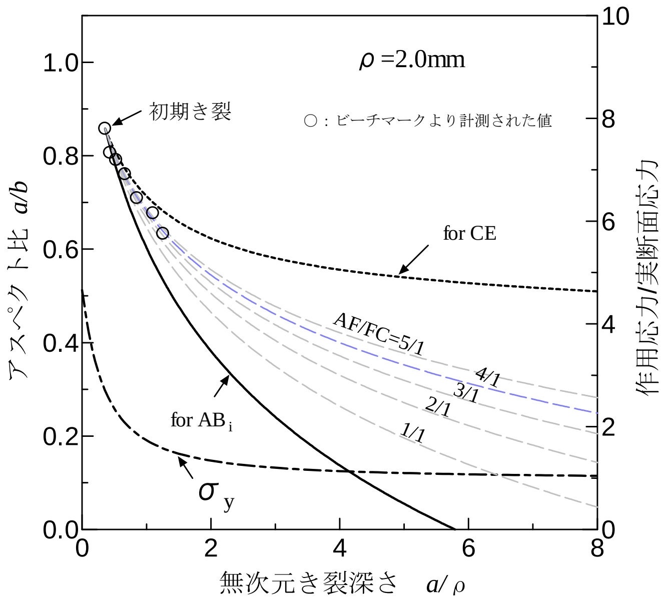


図 6.21 応力集中場を伝播する単独表面き裂のアスペクト比変化

6.15 の ρ=2mm）も併せて、一点鎖線で示されている*。

図中には、強制的に切欠底で１つだけの表面き裂を伝播させた図 6.17 の実験結果も示されているが、上記推定は、実験結果よりも、かなり偏平な形状で進展する結果を与えることが分かる。この理由は、下記のように考察されている。

図 6.20 において、AB_1 から AB_2 に応力分布が変化しても表面近傍ではあまり大きな応力分布の変化は生じないため、最小荷重時の表面部でのき裂閉口域はき裂が微小量成長してもほとんど変化しないと考えられる。一方、最深部では AB_1 から AB_2 に応力分布が変化すると、AB_2 なる応力によって生じる大きな COD の箇所に、過去の小さな残留引張変形層（AB_1 なる応力により引き起こされた）を取り込むことになり、き裂が開口し易くなり最深部のき裂閉口域が小さくなる。したがって、表面でのき裂成長速度で無次元化した最深部の無次元き裂成長速度を考えると、「最深部の RPG 荷重は小さくなり、a_1 なる大きさの時点における最深部の無次元き裂成長は、AB_1 なる直線応力が働く場合よりも、$\sigma_y(x)$ が作用する場合の方が速くなる」という現象が生じているために、図 6.21 での推定結果（太い実線）ほどには、偏平なき裂形状にならないものと考察されている。

そこで、図 6.20 の AB_1 と、CE（D 点で $\sigma_y(x)$ に接する直線）の中間の直線状応力分布 FG を有するとして、その直線 FG の β 値を(6.11)式に代入しルンゲクッタ法により推定したアスペクト比変化と、実験結果の○印（図 6.21 参照）を対比して、AF と FC の妥当な比が調査されている。その結果、図 6.21 に示すように、AF/FC＝4/1 とすれば、表面き裂が単独で成長する場合のアスペクト比変化曲線 $\Psi(a)$ がほぼ推定できている。

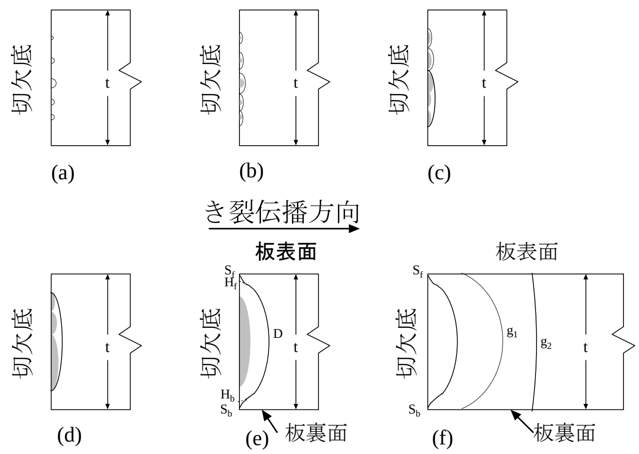


図 6.22　開口部の板厚中心部（切欠底）から発生・伝播する疲労き裂の成長過程

図 6.18(a)のような試験片の切欠底（構造要素の開口部などはこれに該当する）で板厚中央部から疲労き裂が発生する場合には、図 6.22 に示すようなき裂成長過程を呈する。すなわち、始めは図 6.22 (a)

[1] ＊　(6.2)式において、A と B は β の関数であるから、(6.2)式の微分は数学的には、

$$\frac{d}{da}\left(\frac{a}{b}\right)=\left(0.07-\frac{0.94a}{w}\right)\frac{d\beta}{da}-\frac{\left(0.06+0.94\beta\right)}{w}$$

となる。図 6.20 での ABi の応力分布に対応する β ならびに $d\beta/da$ をもとに、上式の a/b の変化率を与えて、ルンゲクッタ法によりアスペクト比変化を推定すると、多少小さなアスペクト比となってはいるが、図 6.21 の太実線とほとんど変わらない結果が得られた。しかし、図 6.20 での CE の応力分布を使用して、同様の推定をすると、実験結果より小さなアスペクト比を推定してしまい、両極端の応力分布による推定が実験結果を挟まない結果となった。そのため、(6.11)式の導出にあたっては、(6.2)式の A は定数の扱いをしている。

のように、多数点から表面き裂が発生し、それが成長し（図 6.22 (b)）、合体を繰返し（図 6.22 (c)）、ついには 1 つの偏平な表面き裂となる（図 6.22 (d)）。そして、表面が板表裏面にある程度近づくと、図 6.22(e)のように、深さ方向に選択的にき裂が成長する。ただし、表面近傍だけは表裏面の自由表面の影響で少し成長する。すなわち、き裂形状は、全体としては、半楕円形（S_f・D・S_b なる前縁線は半楕円形状ではないが、H_f・D・H_b は半楕円形状）となるが、板表裏面近傍だけ、切欠底表面でき裂が成長したものとなる。そして、その後は図 6.22(f)に示すように、g_1、g_2 と、板表裏面近傍を除き、き裂前縁線がほぼ直線になるように変化する。

切欠底の多数箇所から発生・伝播した表面き裂については、その内の最も深い表面き裂の最深部の K 値（近接表面き裂の干渉効果で、単独で存在する場合よりも K 値は大きくなっている）と同じ K 値を有する仮想の単独表面き裂に、図 6.16 に従って置き換え、その仮想単独表面き裂のアスペクト比変化が調査された。

図 6.23 から図 6.25[75)]は、図 6.18(a)の試験片で得られた結果である。図中、黒塗りの記号は、多数箇所から発生・伝播した表面き裂について、図 6.16 の手順に従って、最も深いき裂の最深部の K 値（近接表面き裂による干渉効果を考慮した）を有する、仮想単独表面き裂に置き換えられた結果である。個々の表面き裂のアスペクト比を計測した図 6.17 の結果と異なり（図 6.23 から図 6.25 で黒塗りの記号が、図 6.17 の結果から仮想単独表面き裂に置き換えられたものである。）、ばらつきが非常に小さくなっている。

これらの図中には、図 6.19 の応力分布から得られた単独表面き裂の均衡成長曲線 $\Psi(a)$（図 6.21 で AF/FC＝4/1 に対応する推定結果）が示されている。ただし、初期き裂は、結晶粒径を半径とする半円（この試験片では、半径 30μm）としている。

仮想単独表面き裂のアスペクト比は、均衡成長曲線 $\Psi(a)$ とは異なり、き裂深さが大きくなるにつれ、ほぼ線形的にかつ急激に小さくなっている。しかも、図 6.24 に見るように、応力比 R の影響をあまり受けず 1 つの直線でほぼ表すことができる*。この直線は、結晶粒オーダの半円表面

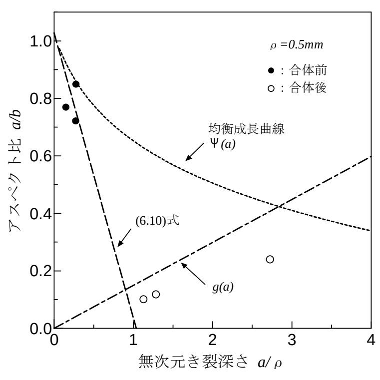


図 6.23 疲労成長に伴う切欠底に生じる仮想単独表面き裂のアスペクト比変化（ρ=0.5mm）

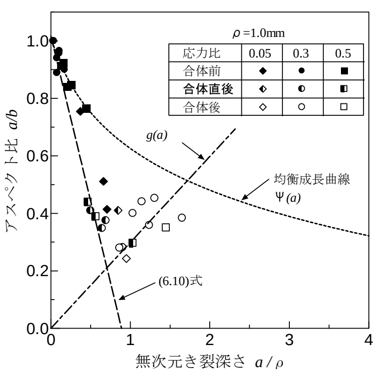


図 6.24 疲労成長に伴う切欠底に生じる仮想単独表面き裂のアスペクト比変化（ρ=1.0mm）

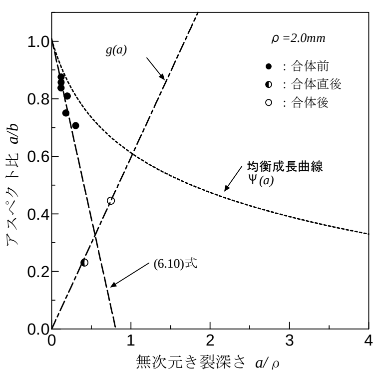


図 6.25　疲労成長に伴う切欠底に生じる仮想単独表面き裂のアスペクト比変化（ρ=2.0mm）

* 図 6.24 を詳しく見ると、R が大きくなるほど、アスペクト比は大きくなっている。しかし、この効果を計算に取り入れるには、もっと多くの実験が必要と考えられる。

き裂（半径＝r_0）を起点とした、単独表面き裂の均衡成長曲線$\Psi(a)$を用いて

$$a/b = 1.33\Psi'(r_0)\cdot a + 1 - 1.33\Psi'(r_0)\cdot r_0 \tag{6.12}$$

ただし、　$\Psi'(r_0)$：r_0におけるΨの勾配

として近似できる。このように、単独表面き裂の均衡成長曲線とは異なり、き裂の成長に伴い急激にアスペクト比が減少するのは、合体を繰り返すためである。さらにデータ集積を行うと、線形的なアスペクト比変化にならないかもしれないが、き裂が非常に浅い時点で合体を完了することから、多少の(6.12)式からのずれは、き裂成長曲線の推定結果に大きな影響を及ぼさないことが期待される(設計時には、実際より小さいアスペクト比を設定すれば、最深部のK値が大きくなるから、寿命を短く推定することになり安全側の評価となる)。

(6.12)式でアスペクト比変化が表せるのは､図 6.22(d)までの段階である｡図 6.22 (d)から図 6.22 (e)になる段階で、表面近傍を除いてき裂全体としては H_fDH_b（図 6.22 (e)参照）のように半楕円形状となっているが、 S_fDS_b なる前縁線のように表面近傍だけ浅いき裂となっている。*

これは、き裂の表面部が表裏面に接近することにより、表面き裂の表面近傍の K値が、図 6.22 (d)よりさらに、上昇することに対応している。すなわち、(1.82)式の f_w 値（有限板影響係数。ただし、$2h$ に t を代入し $w=45mm$ としたもの）が、板表裏面の影響で大きくなることに対応している。この有限板の影響は、表面き裂の両端近傍だけに働き、板厚中央部のき裂にはほとんど働かない。

図 6.26 は、(6.9)式に沿ってアスペクト比が変化するとした場合の(1.81)式の f_w 値を、き裂深さの関係で示したものであり､図中に一点鎖線で示した位置で､表面き裂の表面における全長 $2b$ が、板厚 t に等しくなる。f_w の影響を受けない場合､き裂前縁線はほぼ半楕円形になるので､図 6.22(f)の H_f と H_b の位置は、 f_w 値分布と関係するはずである。しかし、H_f と H_b の位置がどのような法則で決定されているかは、現在のところ不明である。そこで、 a～f_w 線図上で表面き裂長さの全長が板厚に等しくなる時点の接線を引き、その接線の f_w が 1 となる時点のき裂深さから(6.12)式でき裂表面長さ b を求め、$2b$ の表面長さ（全長）が H_f と H_b の距離に等しいと仮定して、図 6.8 の $g(x)$ を求めた結果が図 6.23 から図 6.25 中に一点鎖線で引かれた線である。合体完了後、アスペクト比は $g(x)$ に沿って変化していることから、合体完了直後しばらくは、表裏面で表面方向に

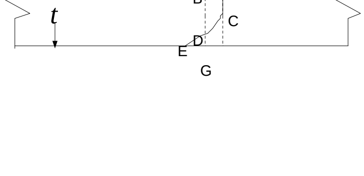
---

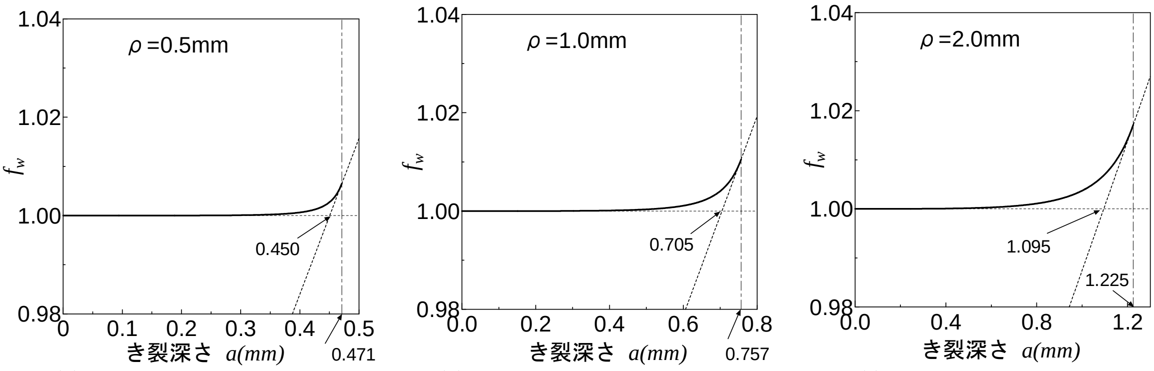
*　板厚中央部でき裂が長く、表裏面で短い、付図に示すようなパラボラ状き裂の板厚中央部Ｃ点のK値は、Neale によると、以下のように近似できる [79]。

$$K = (t/L)K_{a_1}$$

ただし　L：き裂前縁の弧 ABCDE に沿うガース長

K_{a_1}：パラボラ状き裂の平均長さ a_1 と同じ大きさのき裂に対して得られる２次元問題におけるＫ値（ここでは図 6.22 の応力分布下でき裂長さが a_1 まで成長した場合のＫ値）





(a)　ρ =0.5mm　　(b)　ρ =1.0mm　　(c)　ρ =2.0mm

図 6.26　単独表面き裂の表面における K 値の有限板修正係数

はほとんどき裂は成長せず、板厚内部でのき裂成長が支配的になることが理解される。

さらに、き裂が成長すると、き裂前縁が板表面にほぼ垂直、すなわち、２次元板厚貫通き裂として取り扱えるき裂になる。き裂合体終了から、板厚貫通き裂への遷移期間は、パラボラ状のき裂となっており、き裂前縁線の形状が既知ならば、K 値は有限要素法などの助けを借りれば求められる。ただし、この期間のき裂前縁線の形状に関する研究は殆どなされていない。

しかし、図 6.22(e)までき裂が成長すると、ほぼ板厚貫通き裂になる。図 6.27 中の①には、図 6.18 の試験片（ただし、曲率半径 1mm）の切欠底から発生するき裂（図 6.24 のアスペクト比変化を生じる）の最深部の K 値（ただし、切欠底断面の平均作用応力が単位応力の場合。K 値は、図 1.26 の近似法を適用して求められている）とき裂深さの関係が示されている。一方、②は、切欠底からいきなり一様な深さのき裂が生じた（２次元問題で扱える板厚貫通き裂）と仮想して求められたＫ値とき裂深さ（長さ）の関係である。①から②へは、滑らかに遷移するはずで、たとえば、③のように設定できる。③の曲線をできるだけ大きくなるように設定すれば、K 値を大きく見積もることになるから、安全側の評価を与えると考えられる（ただし、滑らかに①から②へ移行する曲線で、K 値を大きく与えた場合と、多少小さめに与えた場合を比べても、寿命評価結果にはあまり大きな差が生じるとは考えられない）。

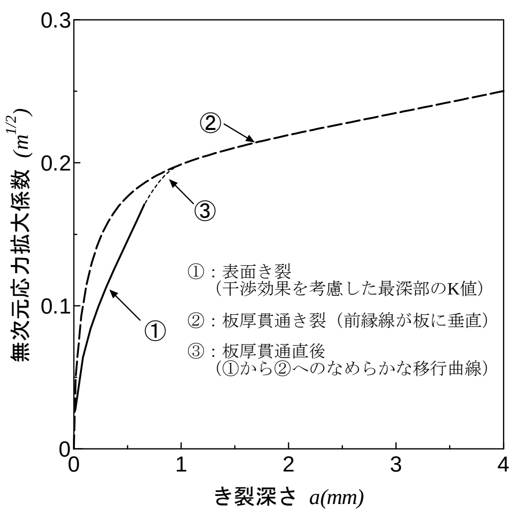


図 6.27 切欠底で発生・伝播するき裂の中の最大き裂深さ点のＫ値とその深さの関係（ρ＝1㎜、単位公称応力作用時）

6.4.2　溶接止端部から発生・伝播するき裂

大型構造物では、6.4.1 項に示したような開口部からの疲労損傷も経験しているが、圧倒的に多いのは溶接部を起点とする疲労損傷である。中でも構造不連続部の隅肉溶接止端部を起点とする

疲労損傷が最も多い。この箇所の疲労き裂成長曲線を推定するには、仮想単独表面き裂のアスペクト比変化に加えて、溶接残留応力による K 値の変化も考慮する必要がある。また、残留応力がアスペクト比変化に影響を与える可能性もある。

そのため、スティフナ板厚を３種変化させた図 6.28 に示す角回し溶接継手試験片に、最大荷重 147kN、最小荷重 7.4kN の繰返し荷重を与え、角回し隅肉溶接止端部で多数点から発生・伝播する表面き裂について、6.4.1 と同様の調査が行われている[76]。図 6.29 は、き裂合体完了前の個々の表面き裂について、インク浸透法(ink penetration method)とビーチマーク法を併用して、アスペクト比とそのき裂深さの関係を調査した結果である。これより溶接継手止端部に生じる疲労き裂においても、個々の表面き裂のアスペクト比に関してはばらつきが大きく、しかも、表面き裂の合体は非常に浅い時点で完了していることが分かる。

6.4.1 項に示したように、板厚中央部の開口縁に生じる表面き裂のアスペクト比が、切欠底の応力分布に依存して変化していることから、図 6.30 に示すソリッド要素モデル端部に、一様引張応力あるいは一様面外曲げ応力を作用させた弾性 FEM 解析を実施して、各々の外応力条件下において回し溶接止端部位置の主板断面に働く作用応力が求められている。

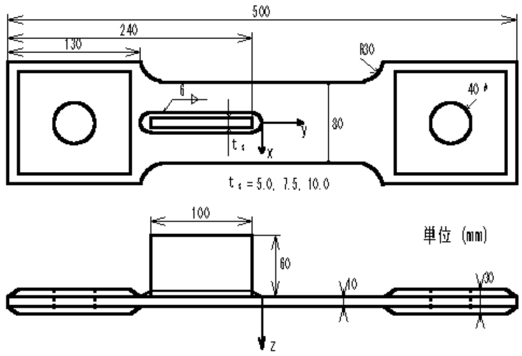


図 6.28　スティフナ付角回し溶接継手試験

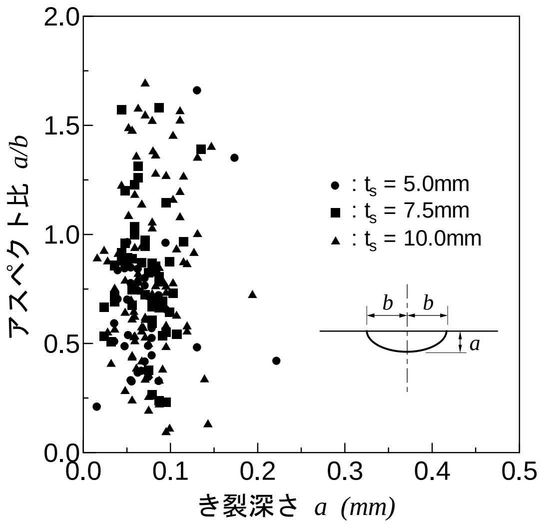


図 6.29 回し溶接止端に発生・伝播した個々の表面き裂のアスペクト比（合体完了前）（公称応力振幅 175MPa、応力比 0.05）

角回し隅肉溶接止端部近傍の板表面近傍に対する作用応力を求めるためには、非常に細かい要素分割が必要になると同時に、止端部近傍の溶接部形状を、忠実にモデル化することが FEM 解析では必要になる。この煩雑さを避けるために、Glinka が導いた次式(Glinka's equation)の応力集中場における応力分布式[77]と、FEM 解析結果を

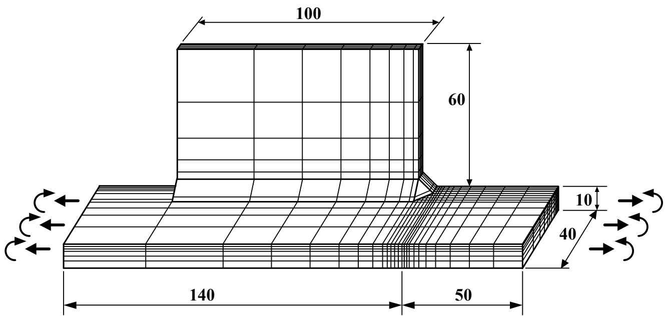


図 6.30 角回し試験片の有限要素解析において採用された要素分割例

結合して、止端側の表面近傍の応力分布を、一様な単位引張応力ならびに単位面外曲げ応力が作用した場合について求めている。すなわち、図 6.31 に示すような切欠付試験片の切欠線上に働く応力分布

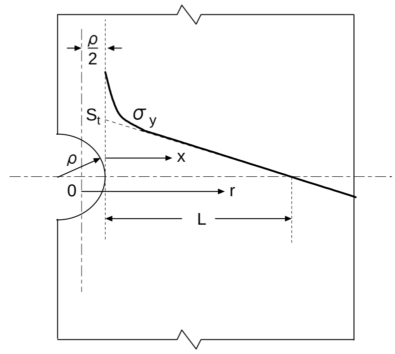


図 6.31　切欠付試験片の切欠線上の応力分布

$$\sigma_y = \frac{K_t S_t}{2\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{3/2} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{x_0} \left(\frac{r}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \right\} \tag{6.13}$$

ここで、　$x_0 = L/\rho$

K_t ：応力集中係数

S_t ：梁の仮定（板断面は変形後も平面を保つ）から得る回し溶接止端部の表面応力

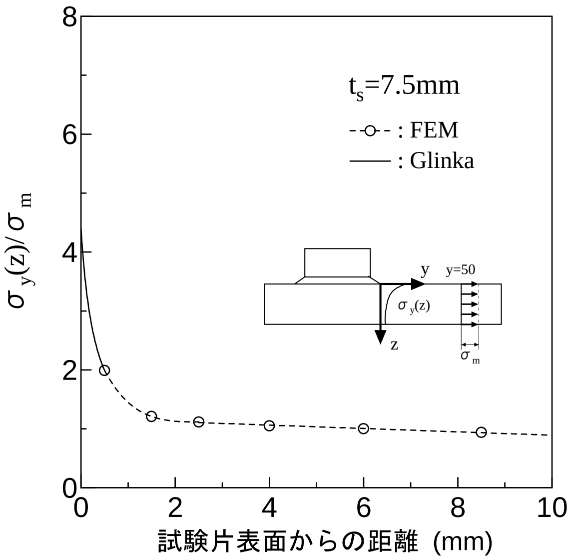


図 6.32　一様引張荷重が作用する場合に生じる回し溶接止端位置の主板板厚内の軸方向応力分布

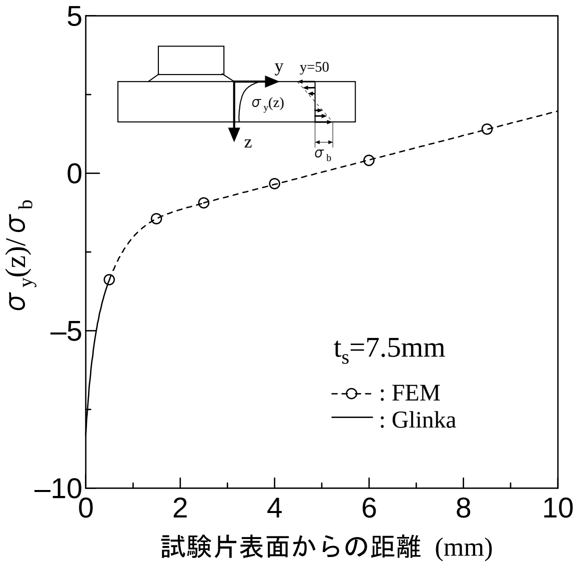


図 6.33　一様面外曲げ荷重が作用する場合に生じる回し溶接止端位置の主板板厚内の軸方向応力分布

と、FEM 解析結果を滑らかに連結することにより、止端部近傍の応力分布が推定されている。

図 6.32 および図 6.33 は、リブ厚 7.5mm が配置された主板に、それぞれ一様引張応力あるいは一様面外曲げ応力が作用した場合の回し溶接止端位置の主板内に作用する荷重軸方向応力分布の解析結果である。回し溶接止端部を印象材で型取りし、計測された曲率半径 $\rho = 0.7$mm 、ならびに有限要素法で解析された表面に最も近い要素の重心位置（z=0.5mm）での応力を、(6.13)式に代入することで、応力集中係数 K_t を求め、表面近傍の応力分布が推定されている（図の実線部分）。

ここで、用いられた試験片は、図 6.28 に示したように、板の片側だけにスティフナが配されているので、負荷とともに、偏心曲げ応力も作用することになる。回し溶接止端部より 50mm 離れた断面（図 6.28 の y=50mm 位置）の主板表裏面上でそれぞれ 5 カ所（x=0、±10、±30mm の計

10 カ所）に貼付した２軸ひずみゲージにより計測された平均表（裏）面応力と負荷荷重の関係を図 6.34 に例示する。低荷重下では偏心のためにリブ側が圧縮になるような曲げ応力が誘起されるが、高荷重になるとほとんど曲げ応力は働かなくなることが理解されるが、あまり大きな曲げ応力は誘起されていないと図 6.34 から判断される。

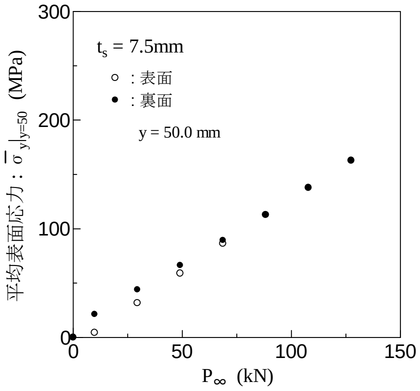


図 6.34 回し溶接止端から 50mm 離れた断面に作用する平均表面応力測定結果（t_s＝7.5mm）

図 6.29 の試験において、回し溶接止端部の主板内に働いている y 方向応力振幅分布は、例えば t_s=7.5mm の場合には、図 6.32 から図 6.34 を用いて、図 6.35 のように与えられる。

そこで、この回し溶接止端部の主板板厚内に働く荷重軸方向の応力振幅分布に対して、止端部表面における板厚方向に対する最大結晶粒の粒径（用いられた試験片での実測結果は 35μm ）を半径とする半円き裂を初期値とした均衡成長曲線 $\Psi(a)$ が、図 6.18 の試験片と同様求められている（均衡成長曲線は、図 6.20 で AF/FC＝4/1 とする方法により求められている）。

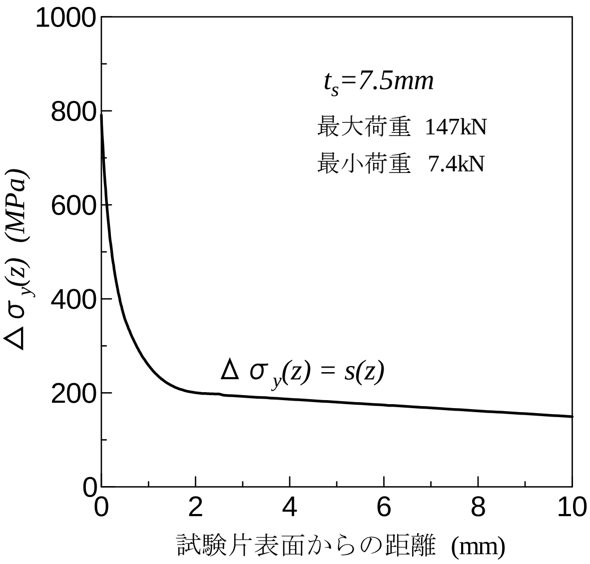


図 6.35 疲労試験に対応する溶接止端部位置における主板の板厚内応力振幅分布の一例（x=0mm の位置断面、最大荷重 147kN、最小荷重 7. 4kN）

その結果が、図 6.36 から図 6.38 中に示されている。図中には、図 6.18 の試験片で計測されたと同様、インク浸透法とビーチマーク法を併用し、個々の表面き裂の大きさと位置を計測し、図 6.16 の手法により置き換えた、仮想単独表面き裂のアスペクト比変化の実験結果が●印で示されている。図中には、半径 35μm の半円の最深部における均衡成長曲線の接線に対して何倍の勾配とすれば、実験結果を巧く表せるかを調査した結果が示されている。すなわち、角回し溶接止端部に発生する疲労き裂に関しては、

$$a/b = 4.62\Psi'(r_0)\,a + 1 - 4.62\psi'(r_0)\,r_0 \tag{6.14}$$

とすれば、き裂合体成長過程の仮想単独表面き裂のアスペクト比変化を表すことができている。

図 6.18 の切欠付試験片における、仮想単独表面き裂のアスペクト比変化式である(6.12)式よりも、図 6.28 の角回し隅肉溶接継手における(6.14)式の方が、勾配が大きくなるのは、残留応力のためであると考察されている。図 6.39 は、固有応力法によって推定された、角回し溶接止端部位

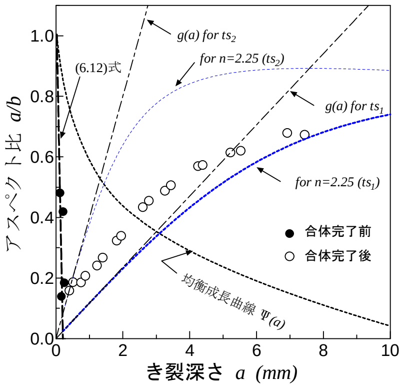


図 6.36　角回し溶接止端部に生じた仮想単独表面き裂のアスペクト比変化（t_S＝5mm）（公称応力振幅 175MPa、応力比 0.05）

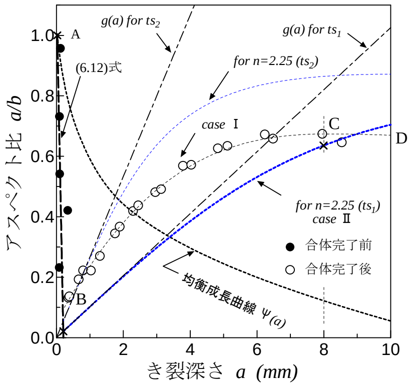


図 6.37 角回し溶接止端部に生じた仮想単独表面き裂のアスペクト比変化（t_S＝7.5mm）（公称応力振幅 175MPa、応力比 0.05）

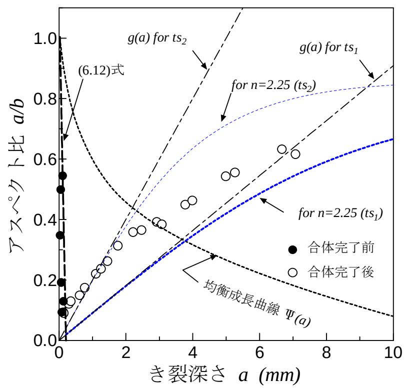


図 6.38 角回し溶接止端部に生じた仮想単独表面き裂のアスペクト比変化（t_S＝10mm）（公称応力振幅 175MPa、応力比 0.05）

置の主板内ｙ軸方向溶接残留応力結果である。図のように、止端部側表面に近づくほど、引張残留応力が大きくなっている。したがって、表面ほど引張残留応力が大きくなるので、残留応力が作用していない場合と比して、表面部でき裂が開口しやすくなり、表面近傍でのき裂閉口域の発達が抑制される。その結果、表面での RPG 荷重が低くなり、表面での加速効果が大きくなる。そのため、残留応力により、より扁平なき裂となり(6.14)式のように勾配が大きくなると考察されている[*]。

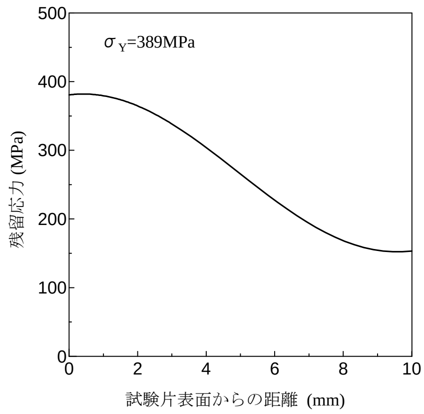


図 6.39　回し溶接止端位置の主板内の y 軸方向残留応力分布（固有応力法による推定結果。図 6.28 の試験片に対して）

(6.14)式に沿って､仮想単独表面き裂が急激に偏平になっていくが、最終的には表面き裂の合体が完了しある程度伝播すると、角回し溶接止端から表面でのき裂が逸れ出し母材に進み出そうとするが、表面での応力集中部からはずれるため、一旦表面での成長が遅くなり深さ方向に選択的にき裂が成長する。図 6.40 は、角回し溶接継手を上から見た模式図であり、一旦表面での成長が遅くなる時点の表面のき裂長さは、t_{s1} と t_{s2} に関連するものと考えられる。$2b=t_{s1}$ あるいは $2b=t_{s2}$ の時点で上記現象が生じ出すとして(6.4)式を用いて推定された $g(x)$ が、図 6.37 から図 6.39 中に各々一点鎖線で示されている。 $2b=t_{s1}$ で合体完了すると仮定してその後のアスペクト比変化を(6.3)式で推定した太点線の結果（caseⅡ）、$2b=t_{s2}$ で合体完了すると仮定して(4.9)式でその後のアスペクト比

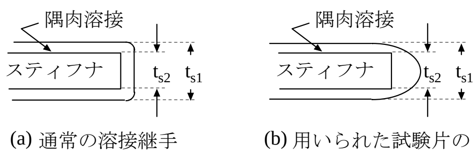


図 6.40　角回し溶接止端形状

[*] 残留応力により単一表面き裂に対しての均衡成長曲線 $\Psi(a)$ が小さくなり、 r_0 における $\Psi(a)$ の勾配が大きくなると考えるべきであるが、意図的に単一の表面き裂を入れるという実験が行われていないので、(6.11)式のような表現となっている。

変化を推定した結果（細点線）の中間に実験結果（○印：case I ）がこの試験片では位置している（図 6.37 参照)。ただし、$f(x)$は、図 6.28 の y=0 における主板断面内に働く引張荷重と、曲げモーメントから梁理論で得られる引張応力と曲げ応力をもとに定義される曲げ荷重比βに対応する均衡成長曲線（6.3）式が用いられている。また n 値は Paris 則の指数mから 2.25 と与えられている。

通常、角回し隅肉溶接は、図 6.40(a)のような形状となるが、図 6.28 の試験片の作成時、溶接に際して完全な下向き姿勢で機械的に CO_2溶接を行えるよう、試験片全体を 45 度に傾け、試験片を移動ならびに角回し部では回転させることのできる冶具を用いているため、図 6.28 の試験片では図 6.40(b)のような形状の角回し溶接部となっていた。そのため、t_{s1}よりも短い表面き裂状態で、表面の成長が一旦停止し、選択的に深さ方向に進展する現象が生じている。

種々の構造要素で生じる疲労表面き裂のアスペクト比変化の平均曲線および標準偏差を与えることができるほど、現時点では、データは集積されていない*。一方、き裂深さを一定とすると、アスペクト比が小さくなるほど、最深部のK値が大きくなるので、アスペクト比が小さくなるように設定すれば、安全側の疲労き裂成長曲線が推定できることになる。したがって、$2b = t_{s1}$としたアスペクト比変化を、設計時に設定すれば良いと考えられる。

いずれにしても、これらのデータは早急に整備する必要がある。特に、図 6.41 に示すような構造では、応力はガーダを通じて斜板に流れるので、内底板に働く応力分布は、図中に示すように、ガーダ付近が高くなり、離れるに従い小さくなる。この場合、き裂が発生する位置は、ガーダ近傍の斜板の隅肉溶接止端部と考えられ、ある程度離れた位置からは、疲労き裂が発生せず、その位置にき裂が達した時点では、合体が完了していると考えられる。そして、顕著な表面での一旦停止ならびに深さ方向の選択的成長は生じないかもしれない。この場合についても、データ取得ならびに図 6.18 の試験片におけるf_wと同様の考察を行い、アスペクト比変化の推定をできるようすることが、実用的観点から必要である。

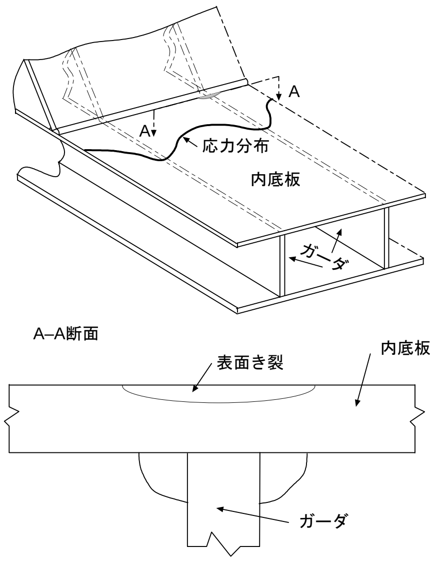


図 6. 41　連続隅肉溶接の特定の箇所に応力が集中する継手の例

なお、現時点では図 6.41 のような構造では、アスペクト比変化は、(4.18)式で、a/bは 0 まで進展し、いきなり長い貫通き裂になるという、かなり安全側の評価を期待した設定をせざるを得ない（ある程度偏平になると、表面き裂の長さは、K値に影響を及ぼさないものと考えられるが)。

* 構造要素に対して、表面のK値と最深部のK値を求め、(4.11)式を連立させて、アスペクト比変化を求めることがよくなされるが、き裂閉口現象は、図 4.27 で論じたように複雑で、これによりアスペクト比が大きく異なるので、このような計算は成立しない。

7. 等価分布応力 5)

2 次元問題、すなわち、板厚貫通疲労き裂のき裂開閉口挙動に対しては、第 3 章のシミュレーションが適用できる。しかし、疲労き裂は初期には、板厚貫通き裂でなく、表面き裂のように3次元問題として取り扱う必要がある。しかも、その期間の寿命が、板厚貫通き裂になってからのそれに比して圧倒的に長いのが通常である。

図 6.30 や図 6.41 に示したような表面き裂に対して、まともに、き裂開閉口現象を考慮して、RPG 荷重を推定するためには、仮想き裂前縁の形状を求め、3 次元問題のき裂結合力モデルを確立する必要がある。半楕円表面き裂の仮想き裂の前縁が、半楕円形になる保証もない現時点で、2 次元問題を 3 次元問題に拡張するには膨大な研究を必要とする。また、解析できたとしても、膨大な計算を必要とする。

今、2 つの物体を考え、一つは表面き裂、他方には板厚貫通き裂が存在するとする。最大荷重時および最小荷重時さらには無荷重状態において、前者のき裂深さと K 値の関係が、それぞれの状態における後者のき裂長さと K 値の関係（無荷重状態については残留応力による K 値）と全く等しく、なおかつき裂が存在しない状態で各位置が降伏する時点の外荷重が両者で等しいとする。すなわち塑性変形が始まる時期が両者で等しいとする。残留応力による K 値と最大荷重時の K 値が両者で同じであるから、表面き裂の深さと貫通き裂の長さが等しい場合、最大荷重時においてき裂先端近傍の応力分布は弾性学的には合同となる。また塑性になる時期が両者で等しいことから、最大荷重時においてき裂前方に形成される塑性域の大きさ、ならびに塑性域内の応力分布、弾性ひずみ分布、塑性ひずみ分布も両者でほぼ等しくなる。したがって、き裂前方に形成される引張変形層の分布も両者でほぼ等しくなる。さらに最小荷重時においても両者で K 値が同じであり、除荷過程において圧縮塑性域が形成される時期も同じとなることより、塑性収縮係数も同じになると期待されるから、除荷過程で着目しているき裂先端近傍での変位に影響を与える外乱*がなければ、き裂閉口域も同じになることが期待される。

表面き裂の最深部以外、たとえば、表面部は上記の外乱と同じ役割を演じる。すなわち、表面部が除荷過程で閉口すると、これにより、最深部でき裂閉口が生じにくくなり、たとえ最大荷重時および最小荷重時に同じ K 値変化をしたとしても、厳密には両者のき裂閉口域の発達過程は異なることになる

一定振幅荷重下で、き裂閉口域が発達した定常状態では、図 6.3 に例示したように、ΔK が上昇過程にあるか下降過程にあるかの如何を問わず、ΔK で整理すると、板厚貫通き裂の疲労き裂伝播速度と、表面き裂のそれとは非常に良い一致を示す。この結果は、定常状態では、表面き裂も板厚貫通き裂も、塑性有効荷重比 $\tilde{U}$ （(2.18)式参照）はほぼ同じになること、ならびに外乱が存

---

*たとえば、片方の物体に存在するき裂に対し、除荷過程でマウス部に異物が入り、き裂が閉口できなくなった場合には、両者の応力/ひずみ分布は合同でなくなる。

在し、き裂閉口域が一旦変化しても、定常状態の塑性有効荷重比に漸近する傾向を有することを意味している。

したがって、残留応力下、あるいは最大荷重時ならびに最小荷重時の、それぞれについての、表面き裂最深部における K 値とき裂深さの関係が、無限板中の貫通き裂の K 値とき裂長さの関係と、同じとなる分布応力をそれぞれについて求め、その等価な分布応力を無限板の貫通き裂に与えて、き裂開閉口シミュレーションを行えば、表面き裂最深部の RPG 荷重を近似的に求め得ることになる [5)]。

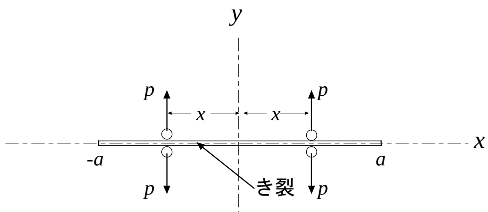


図 7.1 き裂面に双集中荷重が作用する板厚貫通き裂

図 7.1 に示す無限板中のき裂のき裂面に、双集中荷重が作用する場合の K 値は、

$$K = \frac{2p}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} \tag{7.1}$$

したがって、$s\left(\left|x\right|\right) = b_{1,1}x^2 + b_{1,2}x + b_{1,3}$ なる応力が、この貫通き裂に作用した場合の K 値は、

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{s\left(x\right)}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} dx = \frac{a^2\sqrt{\pi a}}{2} b_{1,1} + 2a\sqrt{\frac{a}{\pi}} b_{1,2} + \sqrt{\pi a} b_{1,3} \tag{7.2}$$

ここで、き裂が存在しない状態で、想定き裂線上（表面き裂の場合には、最深部を連ねる線）に働く法線方向応力を $\hat{\sigma}\left(x\right)$ とする。そして $x=0$ は、疲労き裂が発生する応力集中点とする。

$\hat{\sigma}\left(x\right)$ が働く場合、き裂長さ（あるいは深さ）a_i の時に K_i であるとする。実際に働く応力 $\hat{\sigma}\left(x\right)$ と、K 値変化を貫通き裂で再現させるための等価分布応力は、き裂長が 0 の位置で同じに設定する*。すなわち、$b_{1,3} = \hat{\sigma}\left(0\right)$ とすると、n 個の $\left(a_i, K_i\right)$ のうち（i の順にき裂の長さ a_i は大きくなるように配置されているとする）の $i=1$ と $i=2$ の結果を用い、(7.3) 式より、

$$K_1 = \frac{a_1^2\sqrt{\pi a_1}}{2} b_{1,1} + 2a_1\sqrt{\frac{a_1}{\pi}} b_{1,2} + \sqrt{\pi a_1}\hat{\sigma}\left(0\right) \tag{7.3}$$

$$K_2 = \frac{a_2^2\sqrt{\pi a_2}}{2} b_{1,1} + 2a_2\sqrt{\frac{a_2}{\pi}} b_{1,2} + \sqrt{\pi a_2}\hat{\sigma}\left(0\right) \tag{7.4}$$

(7.3)式と(7.4)式を連立して、$b_{1,1}, b_{1,2}$ を求める。上記により、$0 \le \left|x\right| \le a_1$ 間の等価分布応力 $s\left(x\right)$ が求められる。この区間の等価分布応力を $s_1\left(x\right)$ とする。

したがって、$a_{k-1} \le \left|x\right| \le a_k$ 間における等価分布応力 $s_k\left(x\right)$、

$$s_k\left(x\right) = b_{k,1}x^2 + b_{k,2}x + b_{k,3} \tag{7.5}$$

---

* 半無限板の自由表面に存在するき裂について、自由表面が存在することによるＫ値の修正係数は 1.12 であるので、x=0 における等価分布応力は、$\hat{\sigma}\left(0\right)/1.12$ とすべきかもしれない。しかし、現時点では $\hat{\sigma}\left(0\right)$ としている。

は $a_{k-2} \le |x| \le a_{k-1}$ 間の等価分布応力 $s_{k-1}(x)$、

$$s_{k-1}(x) = b_{k-1,1}x^2 + b_{k-1,2}x + b_{k-1,3} \tag{7.6}$$

と $x = a_{k-1}$ で連続で、かつなめらかに接続される必要がある。したがって、

$$\begin{aligned} s_{k-1}(a_{k-1}) &= b_{k-1,1}a_{k-1}^2 + b_{k-1,2}a_{k-1} + b_{k-1,3} \\ &= b_{k,1}a_{k-1}^2 + b_{k,2}a_{k-1} + b_{k,3} = s_k(a_{k-1}) \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \left[ds_{k-1}(x)/dx\right]_{x=a_{k-1}} &= 2b_{k-1,1}a_{k-1} + b_{k-1,2} \\ &= 2b_{k,1}a_{k-1} + b_{k,2} = \left[ds_k(x)/dx\right]_{x=a_{k-1}} \end{aligned} \tag{7.8}$$

また、(7.2)式より、

$$K_{k-1} = \frac{a_{k-1}^2\sqrt{\pi a_{k-1}}}{2}b_{k,1} + 2a_{k-1}\sqrt{\frac{a_{k-1}}{\pi}}b_{k,2} + \sqrt{\pi a_{k-1}}b_{k,3} \tag{7.9}$$

(7.7)式、(7.8)式および(7.9 式を連立させることにより、$b_{k,1}$、$b_{k,2}$ および $b_{k,3}$ が求められ、$a_{k-1} \le |x| \le a_k$ 間における等価分布応力 $s_k(x)$ が決定される。$k = 3$ から上記を繰り返すことで、n 個の (a_i, K_i) の変化を、無限板中の貫通き裂問題に再現できる等価分布応力 $s_k(x)$ が求められる。

$\hat{\sigma}(x)$ に単位荷重振幅が作用する場合の応力分布範囲 $\hat{\sigma}_a(x)$ を与え、それによる $a \sim K$ 関係を用いると、求められる等価分布応力は単位荷重振幅が作用する場合の等価分布応力範囲 $\hat{s}_a(x)$、$\hat{\sigma}(x)$ に平均一定荷重が作用する場合の応力分布を与え、それによる $a \sim K$ 関係を用いると、等価平均分布応力 $\hat{s}_m(x)$、$\hat{\sigma}(x)$ に残留応力分布を与え、それによる $a \sim K$ 関係を用いると、等価残留分布応力 $\hat{s}_R(x)$ が得られる。ここで、a－K関係は単位荷重振幅が作用する場合に生じるき裂形状に対して与えられるものとなる。

図 7.2 中の細い実線は、帯板に作用させた応力分布 $\hat{\sigma}(x)$ であり、この自由端にき裂が入った場合の K 値を、この応力分布を考慮して積分する(具体的には第２編(1.53)式の p に $\hat{\sigma}(x)dx$ を代入して $0 \sim a$ まで積分）ことにより求めた結果が●印で示されている。この●印で示すデータ群 (a_i, K_i) を用いて、上記の手順で求めた等価分布応力 $\hat{s}(x)$ を、太い実線で示している。そして、この等価分布応力を無限板の貫通き裂に作用させて得たＫ値が点線で示されている。このように●印と点線は、当然のことながら、完全に一致する。

したがって、上記の手順により、き裂進展

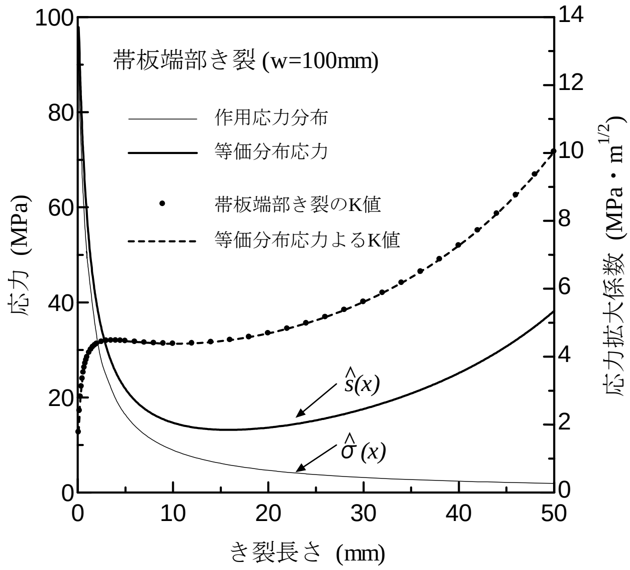


図 7.2　応力分布を受ける帯板に端部き裂が入った場合のＫ値と、それを無限板中のき裂で再現する分布応力

に伴うK値変化を、等価分布応力で無限板中の貫通き裂に再現できることが分かる。

表面き裂と無限板中の貫通き裂のK値に対する修正係数が異なるため、図 7.2 からも分かるように等価分布応力$\hat{s}(x)$と実際に作用している応力分布$\hat{\sigma}(x)$が異なることになる。$\hat{\sigma}(x)$に対してσ_Yが降伏の基準になるから、$\hat{s}(x)$に対して降伏の基準をσ_Yとすると、両者の降伏時期が異なることになる。すなわち、き裂開閉口現象を解析する場合、塑性になる条件に関して配慮が必要となる。単位荷重が作用する場合のき裂最深部に沿う応力分布を$\hat{\sigma}_a(x)$、平均一定荷重が作用する場合の応力分布を$\hat{\sigma}_m(x)$、またき裂最深部に沿う残留応力分布を$\hat{\sigma}_R(x)$とする。この場合、

$$P_{ai}\hat{\sigma}_a(x)+\hat{\sigma}_m(x)+\hat{\sigma}_R(x)=\begin{cases}\lambda\sigma_Y & \text{（引張降伏する場合）}\\ -\lambda\sigma_Y & \text{（圧縮降伏する場合）}\end{cases} \tag{7.10}$$

なる荷重P_{ai}でxの位置で、引張あるいは圧縮降伏すると仮定すると、等価分布応力下でも、同じP_{ai}でそれぞれ引張あるいは圧縮降伏しなければならない。

したがって、各要素中心x_iにおける引張等価降伏応力強度((tensile)equivalent yield stress)をS_{Yt}とすると、

$$P_{ai}\hat{s}_a(x_i)+\hat{s}_m(x_i)+\hat{s}_R(x_i)=\lambda S_{Yt}(x_i) \tag{7.11}$$

となるから、(7.10)式のP_{ai}を用いると、

$$S_{Yt}(x_i)=\left\{\frac{\lambda\sigma_Y-\hat{\sigma}_m(x_i)-\hat{\sigma}_R(x_i)}{\hat{\sigma}(x_i)}\hat{s}_a(x_i)+\hat{s}_m(x_i)+\hat{s}_R(x_i)\right\}/\lambda \tag{7.12}$$

同様に、圧縮等価降伏応力強度をS_{Yc}とすると、

$$P_{ai}\hat{s}_a(x_i)+\hat{s}_m(x_i)+\hat{s}_R(x_i)=\lambda S_{Yc}(x_i) \tag{7.13}$$

となるから、(7.10)式のP_{ai}を用いると、

$$S_{Yc}(x_i)=\left\{\frac{-\lambda\sigma_Y-\hat{\sigma}_m(x_i)-\hat{\sigma}_R(x_i)}{\hat{\sigma}(x_i)}\hat{s}_a(x_i)+\hat{s}_m(x_i)+\hat{s}_R(x_i)\right\}/\lambda \tag{7.14}$$

上記のように、棒要素ごとに等価降伏応力強度を変化させることで、表面き裂と同じ荷重レベルで降伏することになる。この機能を有し、き裂発生時点から任意の大きさになるまでのき裂成長に伴うき裂開閉口挙動を解析し、RPG 荷重を求め、疲労き裂成長曲線を推定するプログラム FLARP(<u>Fa</u>tigue <u>L</u>ife <u>A</u>ssessment by <u>RP</u>G load(Ver.1) がすでに開発されている。FLARP(Ver.1)への入力は、K値でなく、等価分布応力（当然、作用応力分布、残留応力分布も）の形で行うようになっており、ブロック荷重に対しても、解析できるようになっている（4.7 節および付録D参照）。

8. 変動荷重下における溶接止端部からの疲労き裂発生・成長曲線の推定結果の例

第１編で説明したように、1960 年代に入り油圧サーボ試験機が登場し、構造要素にランダム荷重を作用させせることが出来るようになり、種々のパターンの荷重を作用させた疲労試験結果から、線形被害則は成立しないことが明確になった。そして 1940 年代に提唱された「疲労リスクを回避する唯一の手段は、実構造もしくは実機をつくり、それに実際に作用するであろう荷重とその順序を再現して作用させ、十分な寿命を有することを確認することでしか達成できない」という Thum の指摘は今も正しい。Thum の指摘ならびに 1960 年代初頭に実機に実働荷重を作用させた大々的な疲労試験結果からの教訓に従って、自動車産業と航空機産業は実機の耐久性試験を行い、その結果をもとに設計・製作されている。しかし、疲労が問題となるその他の産業は少量生産のため、実際のものを作るにはコストがかかりすぎる。そのため、S-N 曲線と累積応力頻度分布☆を比較し、各応力レベルに対する被害を線形に重ね合わせた総被害が、これまでの実績値の範囲内になれば疲労は生じないであろうと期待する設計が取り入られてきた。すなわち、第 1 編 1 章で説明したシャルピー衝撃試験による靭性要求の使われ方「これらの規格は従来の経験から逸脱しない構造が、従来と同じ使われ方、あるいは従来と同レベルの負荷を受ける場合を想定したもので、あくまで品質管理的発想からの要求をしたもの」が S-N 曲線の使われ方にも当てはまる。

しかし、3 章と 5 章ならびに 6 章から荷重順序が疲労き裂成長に与える影響も考慮して、健全な応力集中場からの疲労き裂の発生・成長曲線を推定できる可能性がでてきた。これが可能となれば、対象構造（機器）の荷重スペクトルを整備すれば合理的疲労設計が出来ることになる。そこで以下ではビードオンプレート試験片にブロック変動荷重を与えた疲労試験に対して FLARP を適用し、実験結果との比較をした結果 [78]を紹介をする。

ビードオンプレート試験片を用いて一定荷重振幅下だけでなくブロック荷重を与えた疲労試験が楠葉らにより行われている。彼らは最終結果のサイクル数だけでなく、予め他の試験片で応力集中箇所の始端から発生・成長する表面き裂の深さと応力集中係数減少率との関係を求めておき、疲労試験中に計測された応力集中係数減少率からき裂深さを推定している。図 8.1 は用いられた疲労試験片である。ここで応力集中係数減少率は図 8.2 を参照して、

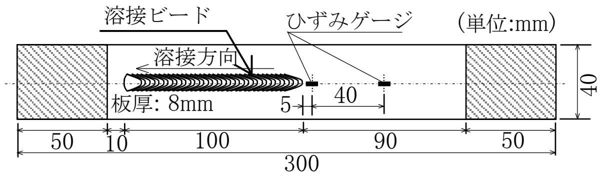


図 8.1　用いられた試験片

$$R_{SC}(\%) = \frac{\varepsilon_{ni}/\varepsilon_{fi}}{\varepsilon_{n0}/\varepsilon_{f0}} \times 100 \qquad (8.1)$$

ここで、

ε_{r0} ：無損傷時の溶接止端近傍ひずみ

ε_{f0} ：無損傷時の溶接止端遠方ひずみ

☆ 機器が一生の間に受ける疲労参照応力の出現確率をもとに、疲労参照応力レベルと出現回数の関係を表したもの。

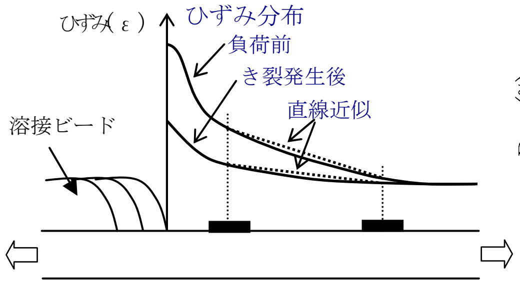


図8.2　き裂の発生によるひずみ低下の模式図

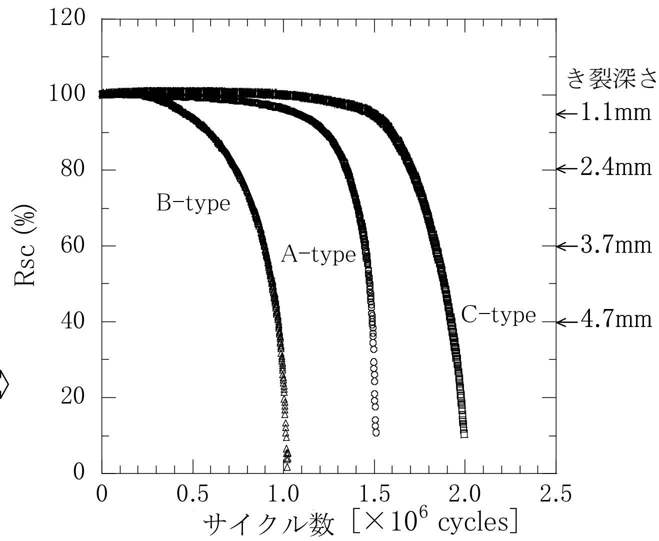


図 8.3　ひずみ集中低下率（Rsc）の計測結果

ε_{ri} ：疲労試験中の溶接止端近傍ひずみ
ε_{fi} ：疲労試験中の溶接止端遠方ひずみ

と定義されている。溶接は棒径 3.2mm の低水素系溶接棒とイルミナイト系溶接棒の２種を用いてなされている。そして低水素系溶接棒に関しては運棒角を前進角としたタイプ A と後退角としたタイプ B、そしてイルミナイト系溶接棒は後退角（タイプ C）で溶接がなされている。溶接トーチは簡易台車に装着され、電流 120A、電圧 23V、溶接速度 15cm/min という溶接条件で溶接され、入熱量は 110kJ/cm であった。

ひずみ集中低下率 R_{SC} の計測結果の例を図 8.3 に示す。R_{SC} は、き裂発生時までは 100%を維持しているものの、その後、滑らかに低下しており、低下を始める時点の繰返し数からき裂発生寿命が推定されている。

また、別途、同様の試験片で、R_{SC} がそれぞれ 95%、 80%、 60%、 40%となった時点で試験を中断し、試験片を切断して表面き裂の成長の様子が調査されている。B タイプ試験片における疲労破面形状を図 8.4 に示す。表面き裂は、ほぼ半

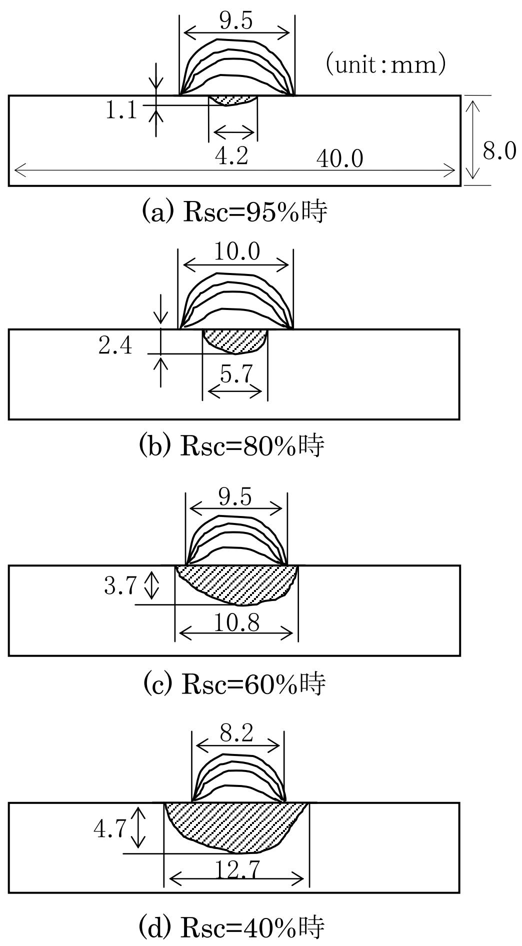


図 8. 4　表面き裂の成長（試験片 B タイプ）

楕円状に成長しており、き裂の成長とともにR_{SC}が低下していることが分かる。計測で得られたき裂深さを図 8.4 にも併記している。図 8.4 に示すようにR_{SC}と繰返し数の関係にき裂深さを対応させることで、き裂深さと繰返し数の関係、すなわち、表面き裂の成長曲線が推定されている。

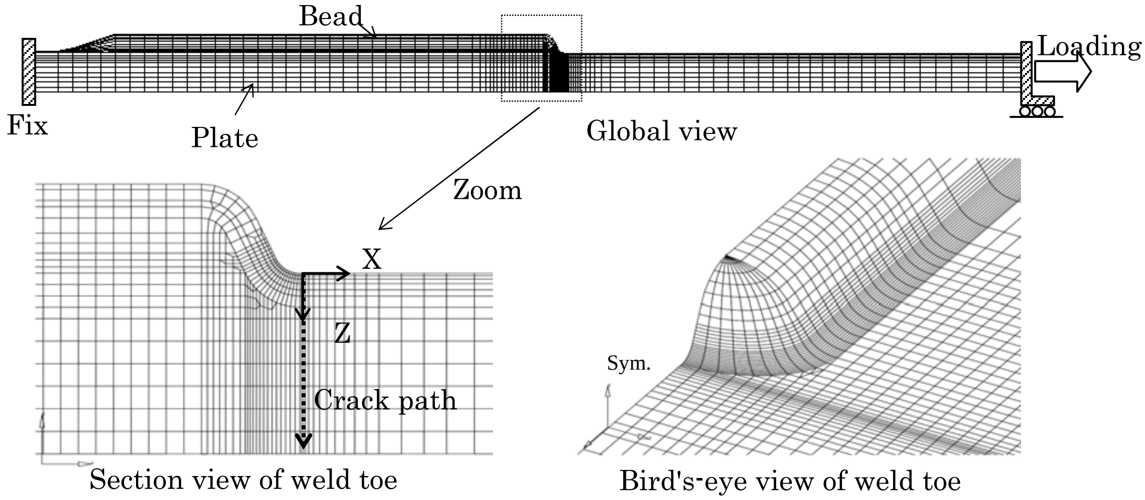


図 8.5　FEM モデル（試験片 B タイプ）

FLARP で疲労き裂発生・成長曲線をシミュレートするためには、（切欠付超薄板でき裂発生初期から平面問題として扱える場合を除いて）き裂成長に伴う外力ならびに内力（残留応力）によるK値変化をそれぞれ求める必要がある。結晶粒オーダの小さな表面き裂から、寿命評価をしようとする最終き裂の大きさの前方に生じる引張塑性域先端までをき裂と仮想したき裂について、10 数ケース程度のき裂を選定し、直接き裂を FEM 中でモデル化して、単位外力ならびに内力を働かせてK値を求めることも可能である。しかし、非常に煩雑になるので、楠場らは 1.7.3 項の近似手法を用いて上記K値を推定している。

この場合、き裂を含まない物体について、荷重軸方向の法線を有するき裂発生点を含む平面を考え、その断面に働く垂直方向応力分布を求める必要がある。そこで、彼らは、タイプ毎に図 8.5 に例示するように実際の溶接で得られた溶接ビード形状もモデル化して、汎用の FEM 解析プログラム ABAQUS（Ver.6.5）を用いて、X=0 における YZ 平面に働く応力分布を求めている。FEM モデルは、平板と溶接ビードをソリッド要素で要素分割し、応力集中が大きい始端底近傍の要素サイズは 0.1mm

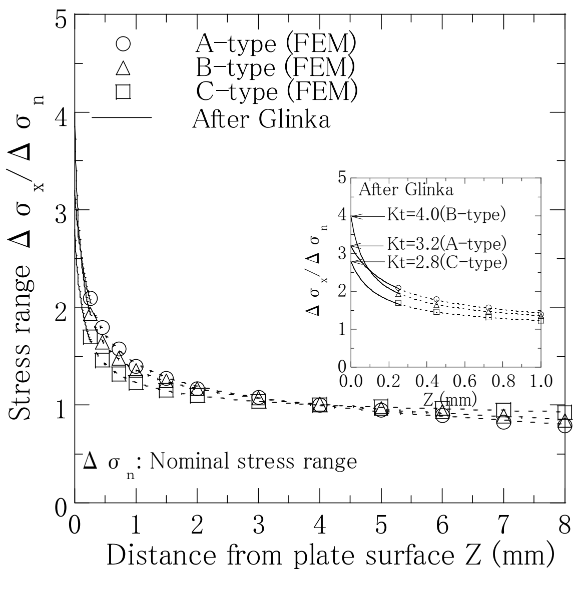


図 8.6　単位外力振幅に対する応力分布

としている。溶接ビードの始端部は、各試験片タイプにおけるビード高さ、フランク角度、および始端半径の平均形状をモデル化している。

図 8.6 に単位外力が作用したときの溶接始端位置における板厚方向に沿う X 方向応力分布の解析結果が示されている。始端部近傍の板表面に近い箇所の応力を FEM で求めることが難しいので、始端部の曲率半径 ρ の計測結果を Glinka による円弧型切欠底近傍の応力分布式 [77]、(6.13)式に代入して得られる分布と、FEM 解析で得られた板厚方向応力分布とを滑らかに連結することで推定している。

そして、溶接残留応力は単位外力による応力分布を求める際に使用したソリッド要素（タイプ B 試験片に対しては図 8.5）を用い、溶接ビードと熱影響部の領域に、降伏ひずみ相当の熱収縮ひずみを負荷して、溶接残留応力を求めている。その結果が図 8.7 である。このとき FEM 解析で得られた反り変形（図 8.5 に示す試験片モデルの負荷側端部における面外変形）が、試験片の計測結果とほぼ一致していることから、溶接残留応力の推定結果は、妥当と判断されている。

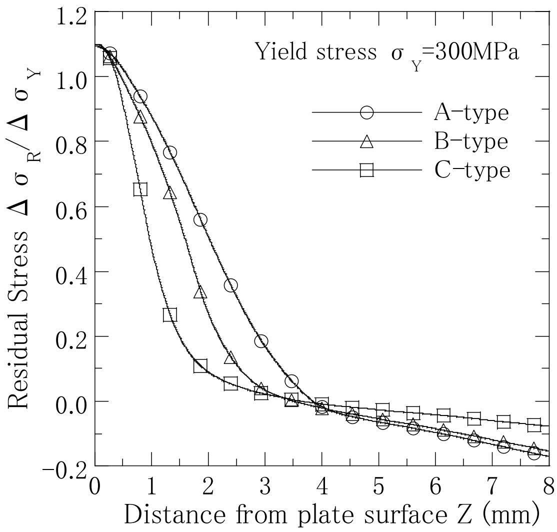


図 8.7　溶接残留応力分布解析結果

図 8.6 に示す溶接始端部の板厚内の応力分布をもとに複数個所から発生した表面き裂の合体成長過程の仮想単一き裂のアスペクト比変化を(6.14)式で求め、合体終了を表面き裂幅がビード幅と等しくなった時と仮定して、6.4.2 項に従い合体終了後のアスペクト比変化を推定している。その結果が図 8.8 である。図中①は最初の結晶粒界のリガメント線への投影点である。切欠底からこの点までの間は半円形表面き裂として成長し、この間の段階でアスペクト比は 1 である。①から②の過程は、多点で発生したき裂が成長する段階で合体を繰返すため、深さ方向には殆ど進展しないのに表面が大きく進展する段階でアスペクト比が急激に減少している。そして②で合体が完了し 1 つの表面き裂となった時点を表している。図 8.1 の試験片の場合には、表面き裂の長さが溶接ビー

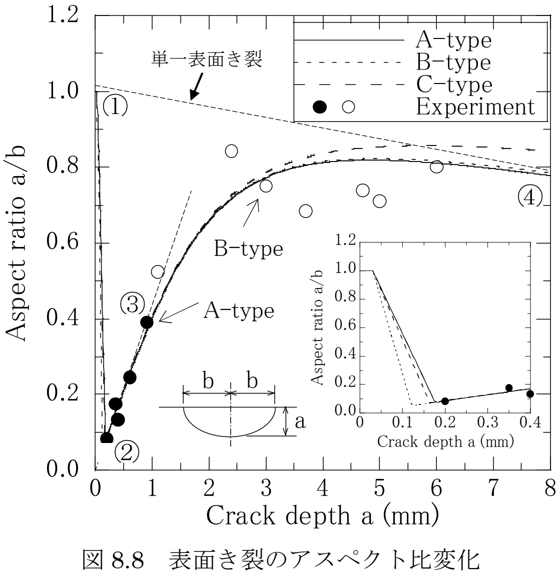


図 8.8　表面き裂のアスペクト比変化

ド幅になった時点に相当する。この直後は表面の K 値が最深部のそれより十分小さくなるため、表面は殆ど進展しないが深さ方向に大きく進展する。完全に表面が進展せず、深さ方向のみ進展する場合は原点を通る直線③の点線で（6.3)式および(6.4)式（図 6.8 参照）に相当する。そして、均衡成長曲線(図 8.8 で単一表面き裂と表示した線。(6.2)式）と、③との漸近線（(6.3)式）でその後のアスペクト比変化が与えられている。図には A タイプと B タイプの試験片で得られたアスペクト比データも示されている。イルミナイト系溶接棒で溶接された C タイプ試験片はビード高さが、低水素系溶接棒で溶接された A、B タイプのそれより低いために、誘起面外曲げ応力が小さくなるために、き裂深さが板厚の 3 割程度以上の深さになると、より円形に近いアスペクト比変化を示している。

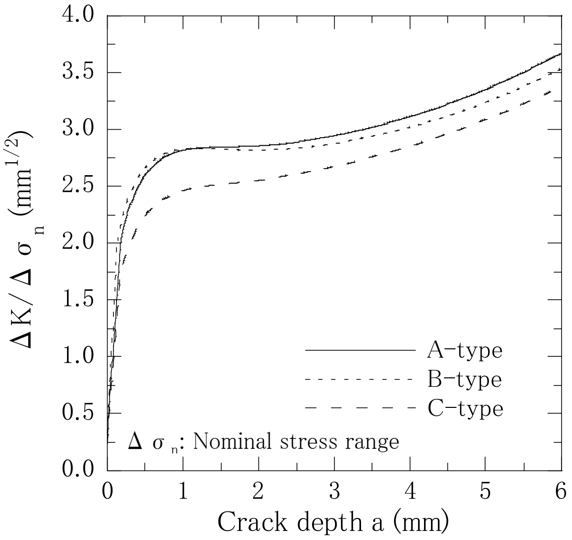


図 8.9　a-ΔK 関係（単位外力振幅）

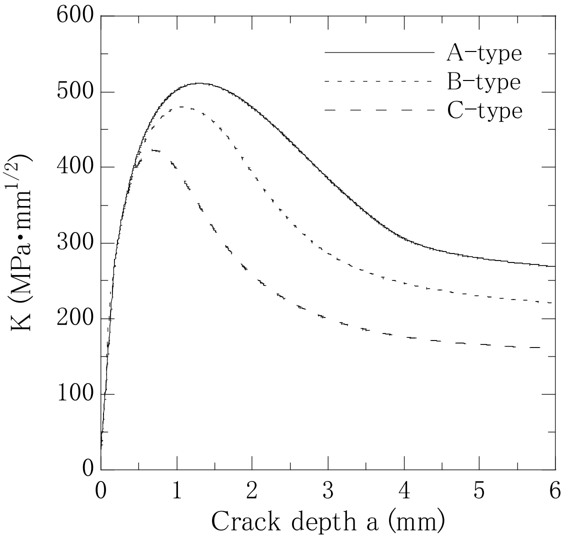


図 8.10　a-K 関係（溶接残留応力）

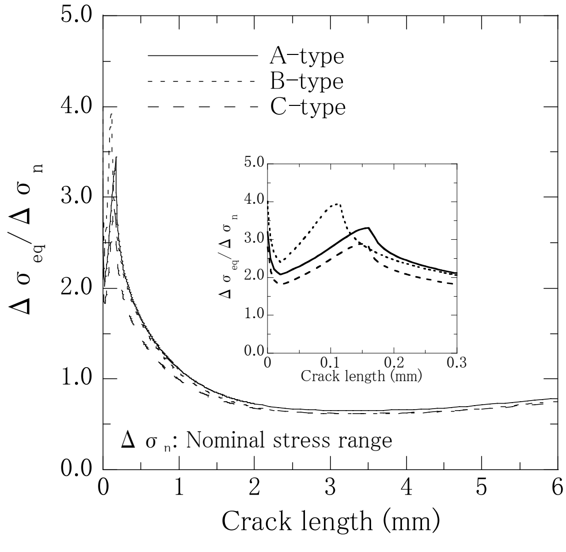


図 8.11　等価分布応力（単位外力振幅）

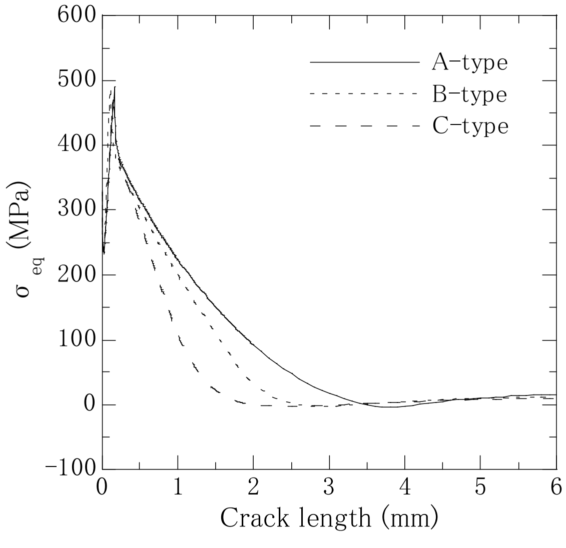


図 8.12　等価分布応力（溶接残留応力）

これらのアスペクト比変化と、図 8.6 ならびに図 8.5 のモデルによる溶接始端位置の試験片断面における応力分布から、1.7.3 項にしたがって求められた単位外力作用時の K 値を求めた結果が図 8.9 に示されている。また、溶接始端位置の試験片断面における溶接残留応力解析結果を用いて 1.7.3 項にしたがって求められた溶接残留応力作用時の K 値を求めた結果が図 8.10 に示されている。そして、7 章にしたがって等価分布応力に変換されたものが、単位外力に対しては図 8.11、残留応力に対しては図 8.12 に示されている。

この図 8.11 に示す単位外力振幅による等価分布応力と、図 8.12 に示す溶接残留応力による等価分布応力をもとに、5.1 のき裂発生モデルと 3 章のき裂開閉口モデルを組み合わせてき裂発生・成長曲線が FLARP によりシミュレートされている。図 8.13 に、C タイプの試験片に 3 荷重振幅レベルの一定荷重振幅（応力比は 0.05)を与えた場合の結果を例示する。横軸を対数軸で表しているため、サイクル数 0 の結果は表示されていないが、き裂が存在しない健全な溶接始端からの発生寿命も含んだ形で計算されている。なお、C、m 値は図 2.20 で得られている値、そして繰返し降伏点はこれまでの実績値として静的降伏点の 55%が用いられている。図に観るように、シミュレーション結果は計測結果と非常に良く一致している。他のタイプの試験結果も同様に良く一致している。

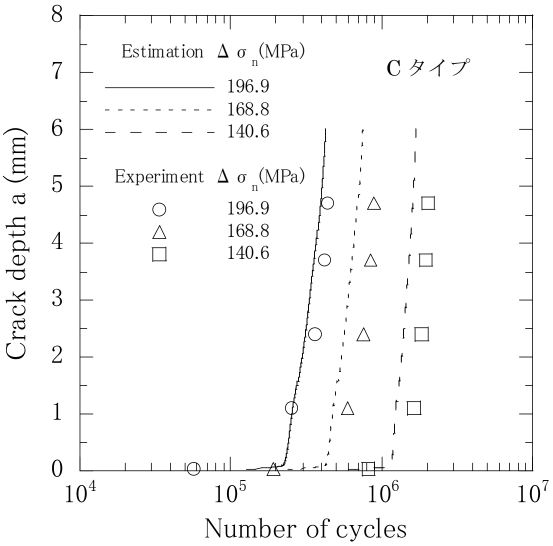
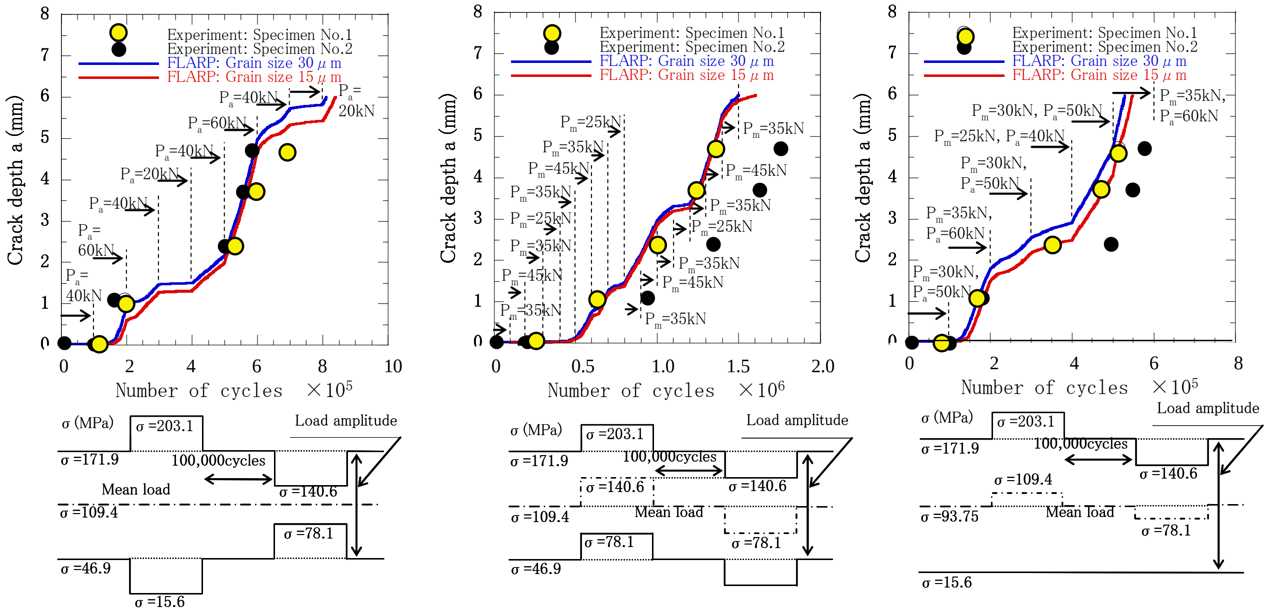


図8.13　き裂成長曲線の推定結果と試験結果との比較例（Cタイプ）

図 8.12 に示すようなき裂発生寿命を含んだき裂成長曲線のデータは、これまで殆ど採られていない。疲労寿命が S-N 曲線で評価されてきたためである。すなわち、従来の疲労寿命データは一定荷重振幅下における破断寿命を纏めたものが大部分である。したがって、これまで研究されてきた膨大な疲労研究データは、破断寿命に関しての検証にしか使えない。当然、一定荷重振幅下の従来データの検討は S-N 曲線との対比でしか行えない。これまでに数種の S-N 曲線に対しての検討がなされているが、これらは全て FLARP でのシミュレーション結果と良く一致している（FLARP 研究会総合報告書 [7]を参照されたい)。

図 8.14 には、B タイプの試験片に対して各図の下段に示されているブロック荷重を与えて得られたき裂深さの成長曲線の計測結果が示されている。3 種のブロック荷重に対し各々２繰返しの試験が行われている。(a) の平均応力を一定として 10 万サイクル毎に応力振幅を変化させた 4 段ブロック荷重負荷試験では、両者ほぼ同じ疲労き裂発生・成長曲線を描いているが、(b)の応力振



(a) 平均応力を一定として 10 万サイクル毎に応力振幅を変化させた 4 段ブロック荷重負荷試験

(b)応力振幅を一定として 10 万サイクル毎に応力振幅を変化させた 4 段ブロック荷重負荷試験

(c) 最小応力を一定に保ち応力振幅を 10 万サイクル毎に変化させた 4 段ブロック荷重負荷試験

図 8.14　種々の荷重パターン下における 4 段ブロック荷重試験結果とシミュレーション結果の比較（B タイプ試験片、各パターンとも 2 本の試験が実施されている。シミュレーションは結晶粒径を計測値の 30μ とその半分の１５μ について行われている。）

幅を一定として 10 万サイクル毎に応力振幅を変化させた 4 段ブロック荷重負荷試験ならびに(c)の 最小応力を一定に保ち応力振幅を 10 万サイクル毎に変化させた 4 段ブロック荷重負荷試験では、同一負荷条件下で２つの試験片で少しき裂発生成長曲線が異なっている。発生寿命までは同じで、き裂開閉口型き裂になってから寿命に差が生じているのか否かは、これら 2 ケースだけの結果だけでは断定できない。しかし、この差は溶接の縦収縮によって試験片長手方向にそりが生じていたか否かによるものだと考察されている。いづれにしても、図 8.14 の横軸は正規座標であり、通常の疲労試験の感覚では誤差の範囲と処理される範疇のものであろう。

図には溶接始端の R 部底の結晶粒径を 30μ（計測結果）と 15μ（先の検討で、切欠底の結晶粒径が大きくなる程、短寿命となるが 30μ 以上ではあまり大きく寿命が短くならない。しかし 10μ以下になると長寿命になる程度が大きくなるという結果が得られている。)を設定して FLARP で、溶接始端部からの疲労き裂発生・成長曲線を付与された 4 段応力ブロック負荷を与えてシミュレーションされた結果が黒線（結晶粒径＝30μ）と赤線（結晶粒径＝15μ）で示されている。図にみるようにブロック荷重下でも FLARP は疲労き裂の発生から大きなき裂になるまでの成長曲線を定量的に妥当に与えていることが理解されよう。なおここでも、C、m 値は図 2.20 で得られている値、そして繰返し降伏点はこれまでの実績値として静的降伏点の 55％が用いられている。

上記のように、疲労き裂発生問題を、き裂が生じたか否かだけを論じ、そのき裂長さを無視してきた従来の S-N 曲線アプローチに替わって、実働荷重が作用する問題に対し、健全な応力集中

箇所から結晶粒径オーダのせん断き裂になるまでの寿命ならびに、き裂開口モードに遷移していく過程を残留応力ならびに荷重順序の影響も考慮した上で連続的にシミュレートできる理論体系がほぼ完成しつつあり、これを適用することで疲労設計のパラダイムシフトができる環境が整備されつつある。これを実現するには、構造毎に外力データを測定し荷重スペクトルの整備を今後行っていかなければならないのは当然である。

第３編参考文献

1) W.A.Wood：formation of fatigue cracks、 philosophical magazine、 3- 31、(1958)、p.692

2) 豊貞、丹羽、永見、松田 ： 回し溶接止端部から発生・伝播する表面き裂の疲労寿命推定法について－無き裂状態から任意の大きさのき裂になるまでの疲労寿命推定法－、西部造船会会報、99、(2000)、p.255~268

3) 杉谷、村上、後藤、豊貞：切欠底に位置する結晶粒内でのき裂成長曲線について、日本機械学会 2006 年度年次大会講演論文集、vol.1、(2006)、p.669

4) 豊貞、丹羽、松田：応力集中部から発生・伝播する表面き裂の成長過程とその寿命予測について、日本造船学会論文集、vol.190、(2001)、p.517~530

5) 豊貞、丹羽、後藤、坂井：ΔK_{RP} の物理的意味と構造物の疲労寿命推定法－ RPG 規準による疲労き裂伝播挙動の研究（第８報）－、日本造船学会論文集、vol.180、(1996)、p.539~547

6) M.Toyosada and T.Niwa：Algorithm of Fatigue Life Assessment by a Unified Theorem without Distinguishing between the Crack Initiation and the Propagation Life、 NK TECH BULLETIN、 vol.13、(1995)、p.1-10

7) FLARP 研究会：FLARP 研究会総合報告書、（監修＆編集）豊貞:FLARP 研究会主宰、(2009・3)

8) W.Elber : Fatigue crack propagation : some effects of crack closure on the mechanisms of fatigue crack propagation and cyclic tensile loading. Ph. D. Thesis、 University of New South Wales、 (1968).

9) 菊川、城野、田中、高谷：除荷弾性コンプライアンス法による低進展速度領域における疲労き裂進展速度とき裂開閉口挙動の測定、材料、vol.25、(1976)、p.899-905

10) 豊貞、山口、丹羽、武中、梶本、矢島：新疲労き裂伝播パラメタの提案と高精度コンプライアンス計測法の開発－ RPG 規準による疲労き裂伝播挙動の研究（第１報）－、日本造船学会論文集、vol.169、(1991)、p.245-255

11) D.Chen and H.Nishitani：Analytical and Experimental Study of Crack Closure Behavior Based on an S-Shaped Unloading Curve、 ASTM STP-982、(1988)、p.475

12) 勝田、河野、熊纓、楠葉：溶接止端部からの微小疲労き裂の検知と破壊評価、JCOSSAR2003 論文集、Vol.5、(2003)、p.597-604

13) 豊貞、丹羽、山口、武中、荒巻:疲労き裂伝播過程における1サイクル中の微少コンプライアンス変化の考察、第3回機械・構造物の強度設計、安全性評価シンポジューム講演論文集、(1991)、p.12-17

14) 橋口、鈴木：転位論の金属学への応用、日本金属学会結晶分科会編、(1961)、p.36

15 町田、吉成、牧野：疲労き裂先端ひずみ変化の詳細観察、材料、46、2、 (1997)、p.138、

16) 牧野、町田、吉成：疲労き裂伝播を律するパラメタに関する考察、材料、46、5、（1997)、p.495、

17) 豊貞、丹羽、村上：RPG 荷重決定法に関する一考察、西部造船会会報、103、(2002)、p.167-172

18) M.Toyosada and T.Niwa: The Significance of RPG load for fatigue crack propagation and the development of a compliance measuring system、 Inter. Journal of Fracture、 67、(1994)、p.217-230

19) H.Tada、 P.C.Paris and G.R. Irwin：The Stress Analysis of Cracks Handbook、3rd Edition、ASME (2000)

20) A.T.Stewart：The influence of environment and stress ratio on fatigue crack growth at near threshold stress intensities in low-alloy steels、 Engineering Fracture Mechanics、13-3、(1980)、 p. 463-473

21) K.Minakawa and A.J.McEvily：On crack closure in the near-threshold region、 Scripta Metallurgica、 15-6、(1981)、 p. 633-636

22) H.D.Dill and C.R.Saff：ENVIRONMENT - LOAD INTERACTION EFFECTS ON CRACK GROWTH、Tech Rep AFFDL TR Air Force Flight Dyn Lab US AFFDL-TR-78-137、(1978)、 p.208

23) B.D.Bell and A.Wolfman：Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads、 ASTM STP-595、(1976)、p.306

24) 小倉、大路、 大久保、 芝野: 変動応力下の疲労き裂伝ぱに関する解析的研究、日本機械学会論文集、42(358)、(1976)、 p.1615-1624

25) 白鳥、三好、宮本、森:BCS モデルに基づく疲労き裂伝ぱのシミュレーション 材料、26-287、(1977)、p.753-759

26) J.C.Newman Jr.:. CRACK-CLOSURE MODEL FOR PREDICTING FATIGUE CRACK GROWTH UNDER AIRCRAFT SPECTRUM LOADING. (Conference Paper)、ASTM STP 748、(1981)、p.53-84

27) J.C.Newman Jr.：FASTRAN Ⅱ-A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program、NASA Tech. Memo.104159、(1992)

28) 豊貞、岡本 、 藤原：き裂開閉口を考慮した疲労き裂伝播モデル、日本造船学会論文集、153、(1983)、 p. 344-351、

29) 豊貞、後川、 丹羽、 武中: 任意応力場における疲労き裂伝播シミュレーション：RPG 規準による疲労き裂伝播挙動の研究(第 2 報)、西部造船会会報、83、(1992)、p.189-206

30) 丹羽、豊貞：き裂開閉口モデルにおけるき裂成長時の塑性収縮係数における一考察、日本造船学会論文集、188、(2000)、p.669-678

31) B.Tomkins：Fatigue crack propagation-an analysis、 Phil. Mag.、 Int. J. ech.、3、(1967)、p.301

32) C.Laird：ASTM Conf. on Fatigue Crack Propagation、 Atlantic City、 (1966)

33) O.E .Wheeler:Spectrum Loading and Crack Growth、 J. Basic Eng.、 Trans. ASME、 Vol. 94、 No. 1 (1972)、 pp. 181-186

34) 豊貞、丹羽：RPG 荷重のシミュレーション－RPG 規準による疲労き裂伝播挙動の研究（第５

報）－、本造船学会論文集、176、(1994)、p.427-438

35) 後藤、村上、野田：船殻用アルミにウム合金 A5083 の疲労き裂伝播性能に関する検討、溶接学会溶接疲労強度研究委員会資料、FS-1163-09、(2009)

36) 豊貞、丹羽、山口: 長いき裂に対する疲労き裂遅延減速現象とき裂停留条件について－ RPG 規準による疲労き裂伝播挙動の研究（第６報）－日本造船学会論文集、176、(1994)、p. 439

37) 豊貞、丹羽：残留応力場における疲労き裂伝播挙動－ RPG 規準による疲労き裂伝播挙動の研究（第７報）－、日本造船学会論文集、178、(1995)、p. 505

38) 日本造船研究協会：第 219 研究部会報告書、き裂伝播解析手法の実用化に関する研究、(1996).

39) 冨田、河辺、福岡、田所 ： 波浪荷重の統計的性質と疲労強度評価のための波浪荷重のシミュレーション法(その 1)、日本造船学会論文集、170、 (1991)、p. 631-644

40) SR202 研究部会報告：海洋構造物の疲労設計法および溶接部の品質に関する研究、(社) 日本造船研究協会、研究資料 No. 395、(1991)

41) R.Hill：Mathematical Theory of Plastisity、 Clarendon Press、Oxford、(1950)、 邦訳、鷲津、山田、工藤：R.ヒル著：塑性学、培風館、(1954)

42) W.Prager：Recent development in the mathematical theory of plasticity、 J. Appl. Mech. (ASME)20、(1949)、p.493-496

43) (社) 日本鉄鋼協会「高強度鋼板の疲労強度向上研究部会」報告書：溶接用鋼の疲労強度向上に関する基礎検討、(1995)

44) H.Hi、 and Z.Wang：Materials Science and Engineering、 A 314、 (2001) 、p.12-23

45) Y.Li et al.、 Materials Science and Engineering、 A 372、 (2004) p.221-228

46) 大沢、冨田、橋本、松田、山鹿：結晶弾塑性有限要素法を用いた疲労き裂形成機構に関する研究(その 1)、日本造船学会論文集、 184、 (1998) 、p.347-359

47) 大沢、上野、下池、橋本、稲見：造船用鋼材の繰返し軟化特性とき裂伝播速度の関係に関する一考察、日本船舶海洋工学会論文集、 4、 (2006)、p. 257-267

48) K.Hashiguchi ： Constitutive equations of elastoplastic materials with anisotropic hardening and elastic-plastic transition、 Journal of Aplied Mechanics、 ASME、 48、 297-301 、(1981)

49) S.Tsutsumi 、 M.Toyosada and K.Hashiguchi ： Extended subloading surface model incorporating elastic boundary concept、Journal of Applied Mechanics、JSCE、9 (2006)、pp. 455-462

50) 堤、豊貞、村上：巨視的弾性条件下での一定両振り荷重繰返しに伴う塑性ひずみ成長挙動、日本機械学会論文集、 A73(730)、 (2007)、p. 724-731 、

51) 堤、矢嶋、村上、後藤、豊貞：損傷を考慮した繰返し弾塑性モデル－巨視的弾性条件下における疲労き裂発生－、応用力学論文集、 10、 (2007)、p. 437-444 、

52) K.Hashiguchi and S.Tsutsumi：Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect、 International Journal of Plasticity、 17(1) 、 (2001)、p. 117-145

53) K.Hashiguchi and S.Tsutsumi：Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect、 International Journal of Plasticity、 19(10)、 (2003)、p. 1651-1677

54) S.Tsutsumi and K.Hashiguchi：General non-proportional loading behavior of soils、International Journal of Plasticity、 21(10)、 (2005)、p. 1941-1969

55) 堤、豊貞：弾性境界面およびダメージを考慮した繰返しし弾塑性モデル、日本機械学会 2006 年度年次大会、熊本市、9 月 10 日、S13-3617、(2006)、p.771-772

56) S.Tsutsumi：Cyclic and gradient plasticity model extended to fatigue and scale-dependent phenomena under macroscopically elastic condition、 Dr.. Thesis Kyushu University、(2007)

57) S.Tsutsumi、 M.Toyosada、 K.Gotho and K.Hashiguchi：FE Analysis on Mechanical Fatigue、 Proc. of ICCES'05、1-10 December、 INDIA、(2005)、p.1380-1385

58) 豊貞、丹羽、永見、松田：回し溶接止端から発生・伝播する表面き裂の疲労寿命推定法について無き裂状態から任意の大きさのき裂になるまでの疲労寿命推定法－、西部造船会会報、99、 (1999)、p.255-268

59) M.Toyosada、 K.Gotho and T.Niwa：Fatigue life assessment for welded structures without initial defects:an algorithm for predicting fatigue crack growth from a sound site、 Int. J. of Fatigue、 26、(2004)、p.993-1002

60) H.J.Gudjact、 J.Schneider、 W.Wunderlich and V.Gerold、 Proceedings of the Fifth Inter. Aluminum-Lithium Conf.、Williamsburg、Virginia、Ed.、by E.A.Sanders Jr. et. al.(1989)、p.1105

61) P.J.E.Forsyth：Acta. Met.、Vol.11、(1963)、p.703

62) B.A.Bilby、 A.H.Cottrell and K.H.Swinden：The Spread of Plastic Yield from a Notch、Proc. Roy. Soc.、 A272、(1963)、p.304

63) 後藤他：多段ブロック載荷条件下における疲労き裂発生挙動のその場観察と寿命推定手法の検討、溶接学会疲労強度研究委員会資料、資料 No. FS-1207-12、(2012)

64) 金沢、町田、峰久、永井、豊貞、岡本、田中：曲げと引張を受ける貫通欠陥の疲労き裂伝播速度と脆性破壊発生について、日本造船学会論文集、vol.136、(1974)、p.191-205

65) 豊貞：舶用 LNG タンクの安全性評価法に関する研究、東京大学博士論文、(1975)

66) R.C.Shah and A.S.Kobayashi：Stress Intensity Factors for an Elliptical Crack Approaching the Surface of a Semi-Infinite Solid、 Int. J. of Fracture Mech.、3、(1971)

67) 川原、栗原：表面き裂の疲労による伝播成長過程に関する予備的考察、日本造船学会論文集、Vol.137、(1975)p.297-306

68) 日本溶接協会原子力部会：原子炉圧力容器及び配管の疲労強度安全性評価に関する試験研究、JWES-AE-7707 (1977)および JWES-AE-7805、(1978)

69) 飯田、高：疲労表面き裂の形状表現式について、日本造船学会論文集、Vol.147、(1980)p.203-210

70) M.Toyosada、 M.Tateishi and M.Kitazono：Fatigue Crack Propagation from an Initial Defect－Non-Through Thickness Crack－(Failure Analysis Step Ⅱ)、 Hitachi Zosen Technical Review、vol.39、no.2、(1978)、p.48-53

71) 豊貞、山口、武田、竹下：切欠底に生じる疲労表面き裂のアスペクト比変化についての実験的検討、西部造船会会報、vol.91、(1996)、p.169-176

72) 白鳥他：任意分布力を受ける表面き裂の応力拡大係数の解析（第 2 報、平板中の半楕円表面き裂に対する影響係数の解析とその応用）、日本機械学会論文集、52-474、(1986)、p.A390

73) Committee on Fracture Mechanics：Stress Intensity Factors Handbook、 Ed. by Y.Murakami、 The Society of Material Science、Japan and Pergamon Press、vo.1&2(1987)、vol.3(1992)

74) A.Nagai、 M.Toyosada and T.Okamoto: A Study on the Fatigue Crack growth in 9%Ni Steel Plate、Eng. Fract. Mech.、vol.7、(1975)、p.481-490

75) Y.Murakami and T.Tomiyama: The $\sqrt{area}$ parameter model for quatitative evaluation of effestc of nonmetallic inclusion on fatigur strength、Fatigue 93、vol.1、(1993)、p.303-309

76) 豊貞、山口、武田、渡辺：回し溶接止端部から発生・伝播する微視・微小表面き裂のアスペクト比変化に関する研究、西部造船会会報、vol.95、(1997)、p.171-180

77) C.Glinka：Calculation of Inelastic Notch-Tip Strain-Stress Histories under Cyclic Loading、Engineering Fracture Mechanics、22-5、(1985)、p.839-854

78) 楠葉：き裂のモニタリングとシミュレーションを用いた疲労寿命評価に関する基礎的研究、長崎大学博士論文、(2007)

79) B.K.Neale：An investigation into the effect of thickness on the fracture behavior of compact tension specimen 、 Int. Jour. of Fracture、14、2、(1978)、p.203

第４編　先端破壊力学(ADSTIC の確立に向けて)

まえがき

第 2 編を通読すれば分かるように、非線形破壊力学は一様応力場に存在するき裂問題を基礎としてきた。しかし、これまでに経験した破壊事故は応力集中箇所で生じたものが大半である。第 2 次大戦中 Liberty 船などで経験した、ブラケット端部から表面き裂が入り、板厚貫通き裂になる前に転化した脆性破壊事故（板厚貫通き裂になった後、かなり長いき裂になってから脆性破壊に転化したものもあるが)、構造的不連続部に存在した非貫通溶接欠陥から直接発生した脆性破壊事故 [1]などが典型的なものである。塑性域の大きさがき裂長に比べて十分小さい状態（小規模降伏条件下）においてはき裂先端近傍の応力状態が K 値によって規定できるので、線形破壊力学理論 [2]が、かなり低い作用応力のもとで生じる脆性破壊事故防止には有力な武器になってきた。

しかし、脆性破壊防止の観点からの材料開発が進み、高靭性材料が提供されるようになった現在、局所的な塑性域の生成を暗黙のうちに認めた設計が各分野で取り入れられてきている。すなわち、剛性要求が厳しくない部材に対して、許容応力を高くして構造の軽量化を目指す願望が強くなってきた。言い換えると、高張力鋼を用いてこれまでよりも許容応力を高く設定して設計する構造物を指向する傾向が強まっている。しかし、高張力になるほど一般的には、破壊靱性値が低くなるとともに、溶接時の割れ感受性が高くなる傾向にある。さらには、第 3 編図 4.2（以後____で第 3 編の図番号であることを表す。また 1 本線の下線は第 1 編、2 本線の下線は第 2 編の番号であることを表している。式番号も同様）に示したように、溶接継手の疲労強度は高張力鋼を使用しても軟鋼のそれとほとんど同じで、場合によっては軟鋼溶接継手の疲労強度より低くなる場合もあることが報告されている [3]。すなわち、許容応力を高くする（軟鋼を使う設計で高張力鋼を使用してアレスト性能を向上させる特殊な使い方が米海軍でなされた例があるが、これは例外である）と、相対的に疲労強度が低くなり、疲労損傷リスクも大きくなる。静的状態で使用するから、疲労を考える必要がないと単純に考える技術者もいるが、4.4 節で示したように、たったの 5 回の高応力状態（静的降伏点の約 8 割）の繰返しで、最小荷重時に負荷方向塑性ひずみが大きく発達している。すなわち、繰返し荷重が作用しないと考えていたとしても、定期検査や不具合によるシャット・ダウンなどにより一生の間に数十回程度の繰返しが作用することは通常であり、実際の稼動状態に基づく低サイクル疲労を考慮する必要がある。

損傷を経験すると増厚などを施し作用応力を下げることで、損傷が起こりにくくなるという経験から許容応力は決められている。すなわち、許容応力は経験工学的に決められたものである。高靭性鋼材など良い材料を使用すれば、確かに剛性要求部位を除いて、許容応力を高く出来るはずである（外力による材料劣化を無視する許容応力度法においては、安全率を経験から決めている)。これまでの損傷事故から脆性破壊に至るシナリオを考えると、①溶接部で生じた低温割れや溶融不良などのき裂状

欠陥から直接脆性破壊が生じる。②溶接部に存在する欠陥から疲労き裂が発生・伝播して、き裂が大きくなった時に低靭性箇所に突入して脆性破壊に至る。③ブラケット端や開口部など構造的応力集中箇所から疲労き裂が発生・伝播して、大きくなってから低靭性箇所に突入して脆性破壊に至る。④塩素イオンなどハロゲンイオンがリッチな腐食環境下で腐食によるき裂が入り [4)]、それより直接脆性破壊が発生したり、疲労き裂が発生・伝播して、き裂が大きくなってから低靭性箇所に突入して脆性破壊に至るなどが考えられる。

したがって、設計寿命内に上記シナリオが進行しなければ、許容応力を上げることが出来るはずである。しかしながら、これまで採用されてきた S-N 曲線を用いた疲労寿命設計では、き裂の大きさに対する情報を全く与えられないだけでなく、寿命の大きな影響因子である荷重順序を無視せざるを得ないなど、寿命とき裂長さに対する定量的な評価は出来ておらず、推定寿命に 100 倍以上のばらつきを有している [5)]。また繰返し負荷を受けて構造的応力集中により局部的に塑性となる箇所に生じた小さな表面き裂からの脆性破壊評価法としては、Burdekin らが提案した CTOD 設計曲線(Design Curve for Crack Tip Opening Displacement)[6)]を発展させた、イギリス、日本で規格化 [7),8)]されているものがある。そこでは、要求 CTOD 値が与えられるが、それに対応する計測可能な表面き裂のマウス部での COD（Crack Opening Displacement)を求めることができず、どの程度の安全率を有しているかが判断できない。

このような技術的背景からは、論理的に安全を担保して許容応力を大きくすることは困難である。しかし、第 3 編で説明したように、健全な応力集中場からの疲労き裂発生・成長曲線を、結晶粒径、残留応力ならびに荷重順序などの影響を考慮して定量的に推定出来るようになりつつある。また、構造的不連続部などで局部的に塑性となる場に非貫通き裂が存在する場合の脆性破壊強度を推定するアルゴリズムが、上記疲労問題に派生して確立されつつある。したがって、外力の統計データを整備し、計画する構造の寿命を安全側に設定するための荷重順序が推定出来るようになれば、許容応力を妥当に設定出来る時代が、すぐそこに来ている。

上記命題を解決するには、き裂破壊に至るシナリオ、すなわち、せん断き裂が最初の結晶粒界に達するまでの寿命（本書では、これをき裂発生寿命と定義する）、多点から発生した複数個の表面き裂が成長して合体完了する寿命、表面き裂が板厚貫通する寿命さらには板厚を貫通して大きなき裂になりリガメントが小さくなって、延性破壊にいたる寿命などの定量的予測法の確立がまず必要である。すなわちき裂成長曲線を、実働荷重下で定量的に予測できるようにすることが必要である。その上で、不安定破壊を起こさせないためのき裂成長に伴う要求破壊靭性値を理論に基づいて定量的に設定できるようにすることが必要である。そして、この要求破壊靭性値を保証できる鋼材、溶接材料、溶接法ならびに溶接条件を選択することが必要になる。

き裂発生から板厚を貫通して長いき裂になるまでの疲労き裂成長曲線の定量的予測は、第 3 編の手

法を発展させることで可能となる。この場合、き裂が生じると危惧される構造要素に対して、き裂成長に伴う単位荷重下での K 値ならびに残留応力下の K 値、さらにはき裂結合力の上下限に対する K 値を求める必要がある。なお、き裂結合力の上下限に対するものは、降伏応力と塑性拘束係数の積に等しい分布をき裂面に内圧として働かせて求めることができる。

構造部材に生じるき裂のき裂結合力モデルを直接構築することが困難なことから、構造部材に入るき裂の応力特異場を、き裂成長に合わせて平面問題に再現する等価分布応力（*EDS*、仮想の応力分布）をまず説明し、*EDS* 上でのき裂結合力モデルを構築した結果を説明する。そこでは、き裂発生段階で K 値が不定となることが考慮されており、微小き裂領域を除いては区分 3 次方程式で構成されたスプライン補間で、外力、残留応力ならびにき裂結合力に対する *EDS* が与えられるようになっている。

高強度で高靭性の材料で構成された構造が実現し、局部的にある程度の大きさの塑性域が形成される構造を許容したいという要望が強くなっている。この場合、この場に表面き裂が存在しても脆性破壊を生じさせないことが必要となる。この評価法として、前述の CTOD 設計曲線を使用した破壊靭性要求（限界 CTOD 値の要求）がなされるが、この理論には、overall starin（第 2 編 2.4 節参照）と塑性域での平均塑性ひずみという定義が異なる 2 つの量の比較で脆性破壊発生を論じるという論理飛躍がある。さらには限界 CTOD の要求はなされるが、それに対応する表面におけるき裂の開口量（マウス COD）は全く分からず、どの程度の安全率を有しているかも判断できない。CTOD 設計曲線が提案された背景には、一様応力場におけるき裂結合力モデル（Dugdale モデル [9)]）における、塑性域もき裂と仮想してこの間には降伏点相当のき裂結合力が働くとして解析的に得られる実き裂先端位置での開口変位が材料固有の値となった時に破壊するという Wells による COD 仮説 [10)] がある。しかし、構造物を対象としたき裂結合力モデルが作成できないため、種々の修正を施して非線形破壊力学が構築されてきた。

EDS 上のき裂結合力モデルでは、本来の定義のき裂先端 COD（CTOD）値が定義できる。したがって、3 点曲げ COD 試験片に関しても本来の定義で CTOD が求められ、この限界値（脆性破壊を生じる）と、構造に対応する *EDS* 上のき裂結合力モデルによる CTOD と比較することで、上記の課題を論じ得る可能性がでてきた。そこで、これらの脆性破壊の非線形破壊力学の解説を第 2 章で説明している。

一方、疲労き裂発生・成長問題に関しては、第３編で説明したように、繰返し塑性域寸法をパラメタとすることで、実働荷重下の疲労き裂発生・成長寿命を定量的に推定することに世界で初めて成功し、160 年来の命題を解決する糸口が与えられた。第３編では、主として中央貫通き裂を用いて物理現象の解明にあたった結果を説明している。そのため、一つの現象を説明するための論理形成が精一杯で、適用範囲や解析精度の検討などは度外視していた。また、微小き裂領域における等価分布応力（*EDS*）の与え方、ならびに仮想き裂が端部などの境界に近づいた場合の *EDS* の与え方に問題があった。そこ

で本編では、き裂成長に伴う *K* 値変化だけでなく COD 形状も近似的に再現できる *EDS* を区分 3 次方程式と微小き裂領域に対しての *EDS* を組み合わせて与える手法について解説すると同時に、*EDS* 下での結合力の定式化についても説明する。

さらに疲労限設計が機能しない状況について解説を加え、単に作用応力を小さくすることだけでは疲労問題は解決しないであろうことを説明している。

これらは未だ研究段階にあり、実験等で確認しなければならない事象も含まれている。そして場合によっては、修正しなければならないアルゴリズムがあるかも知れない。すなわち、未完成な部分が存在している可能性はあるが、構造物のき裂問題に対して今後より良い評価法が早く確立されることを期待し、あえて記述している。

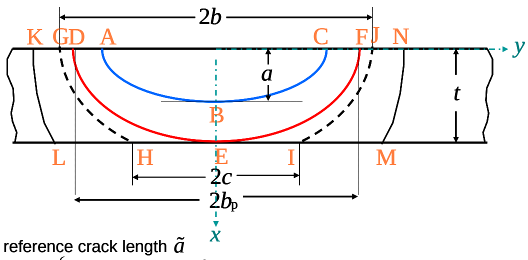
すなわち、FLARP（3 編参照）での不適切な取扱いを合理的なものに改良することにより、*EDS* 上でのき裂結合力モデルによるき裂開閉ロモデルの確立、ならびに応力集中部近傍に形成される局所的塑性域場に存在する表面き裂の COD や要求 CTOD を理論的に求めるシステムの構築が期待される。このシステムは、Advanced Design system for STructural Integrity against Cracking ということから ADSTIC と称しその汎用プログラムの開発を進めている。本編ではその定式化等を解説している。

今後、これらと構造が受ける荷重スペクトルの研究が結びついて、構造完全性を保証するための要求破壊靭性値と寿命を求める道具として実用に供され、経済性も兼ね備えた、軽くて安全な新しい構造が出現するものと期待したい。

1．*EDS* 下のき裂結合力モデル

1.1 参照き裂長さについて

疲労表面き裂発生点の裏面に防撓板がない場合には、図 1.1 に示すように、表面き裂が進展し裏面に到達すると板厚貫通き裂となる。表面き裂状態では、き裂伝播寿命を論じるためのき裂寸法はき裂縁に沿った *K* 値のうちで最大となる位置の寸法であり、通常はき裂深さ a となり、主き裂の成長方向は x 方向である。また、ブラケット端の回し溶接止端部などから疲労き裂が発生する場合、6.4.2 項で説明したように、通常 1 点からではなく多点からであり、発生した表面き裂が成長とともに合体を繰り返す。この場合、表面き裂長さに着目し、近接表面き裂の干渉効果を考慮した *K* 値を用いれば、合体時にはき裂長さに不連続が生じる。しかし、常に一番深いき裂位置に着目し、近接表面き裂の干渉効果を考慮した *K* 値を用いれば、合体時にもき裂深さが不連続的に成長することがなく、寿命計算に都合が良い。さらに、この点にお



reference crack length $\tilde{a}$

$$\tilde{a}=\begin{cases} a & (\textit{for non-through thickness crack}) \\ b-(b_p-t) & (\textit{for through thickness crack}) \end{cases}$$

図 1.1 参照き裂長さ $\tilde{a}$ の定義例

ける K 値がき裂前縁のそれの中で通常最も大きい。一方、板厚貫通き裂となってからは、寿命のパラメタとなるのは通常き裂半長 b となり、この後のき裂成長方向は y 方向になる。ただし、表面き裂発生点の主板裏面に防撓板がある場合には、防撓板に入るき裂が主き裂となるのが一般的で、この場合にはき裂進展方向は x 方向のままとなる。

表面き裂が板裏面に近づくか、作用応力が大きくなると、塑性域は板裏面に達し、その後は同一軸上のき裂結合力モデルは成立しなくなる。しかし、表面き裂の疲労き裂伝播試験によると、表面き裂前縁線に沿う ΔK 値はほぼ一様な分布となるように進展している。そして板厚貫通時に板表面でき裂が不連続に成長することなく、滑らかに移行している。したがって表面き裂から板厚貫通き裂に遷移するような場合でも、一定外荷重下では K 値は滑らかに変化するものと仮定できる。これらのことから、仮想き裂先端 a が板裏面に達して後、仮想き裂成長に長さの不連続が生じないように参照き裂長さ $\tilde{a}$ が以下のように導入されている。

$$\tilde{a} = \begin{cases} a & \left(a < t \text{ の場合}\right) \\ b - \left(b_p - t\right) & \left(a \geq t \text{ の場合}\right) \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで　b_p ：表面き裂が裏面に達した瞬間の表面におけるき裂半長

(1.1)式のように取り扱うことで、評価する実き裂ならびに仮想き裂の大きさは連続するので、寿命計算に煩雑さがなくなり都合が良い。

構造毎にき裂進展形式が異なるので、一般的な定式化は煩雑となるので、本章では図 1.1 のように、単独仮想表面き裂が裏面に到達して、板厚貫通き裂となり,その後表裏面のき裂長差が小さくなるまでを想定したき裂結合力モデルについて説明する。

1.2　き裂発生時の特異さを考慮した等価分布応力（*EDS*）について

実構造におけるき裂成長に伴なう 1.1 のき裂着目点の K 値と全く等しく変化する他の系におけるき裂は、実構造とほぼ同じ力学的環境下にあると考えられる。すなわち、外力ならびに残留応力が働く実構造の局部応力集中場に存在する表面き裂の最深部および板厚貫通後の板表面でのそれぞれのき裂成長に伴う K 値変化を、無限板中の直線き裂でそれぞれ再現できれば、実構造で a なる深さの表面き裂のき裂最深部の前方に生じるき裂最深部近傍の応力分布が、a なる半き裂長を有する無限板中の直線き裂のき裂先端近傍の応力分布と等しくなる。そしてき裂成長に伴って実構造中の表面き裂と無限板中の直線き裂でそれらが等しく変化する。き裂貫通後に関しても同様となる。したがって、弾性力学的には両者はほぼ同じ力学的環境下にあると考えられる。そこで、この無限板中の直線き裂線上に再現される応力を等価分布応力（*EDS* : Equivalent Distributed Stress）と呼ぶ。当然この *EDS* は仮想的な応力分布である。

さらに実構造で対象としているき裂面に降伏点相当のき裂結合力を働かせた場合の、上記き裂の着目点における K 値変化より得られる *EDS* を考える。Dugdale モデルと同様、上記無限板中のき裂前

方に生じる塑性域を仮想的にき裂と考え、そのき裂上下面間にはこの *EDS* を上限とするき裂結合力が働くとすれば、実構造の局部応力集中場に存在する表面き裂のき裂結合力モデルを間接的に表現できることになる。

命題のき裂を設定すれば、そのき裂のアスペクト比を通る疲労によるアスペクト変化曲線が与えられる（第３編６章参照）。このき裂成長の各段階において、表面き裂についてはその最深部そして板厚貫通後は板表面のき裂先端位置に対して、外力が作用する場合、残留応力が作用する場合ならびにき裂結合力相当の応力が面圧として働く場合についての K 値をそれぞれ独立して与える。疲労き裂は発生直後、せん断き裂として成長するが、最初の結晶粒界を越えると K_{II} および K_{III} モードは０となるように伝播し、K_{I} モードだけが生じるようになる。そして、き裂は主応力に垂直な方向に伝播していく。そこで、き裂長さは、ガース長を採り直線と理想化し、その K 値変化を無限板中の直線き裂に再現することを考える。したがって、き裂成長に伴う各段階の上記 3 者の K 値が、せん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点からそれぞれ独立して与えられていることを前提に議論する。

そこで、き裂長さに関しては 1.1 節での参照き裂長さ $\tilde{a}$ を用い、その変化に伴う応力特異性を表現した *EDS* を求める。上記 3 者の内の一つについての $\left[\tilde{a}_n, K_n\right]$ 関係から、その *EDS* を求めることを考える。無限板中の 2 次元問題において、き裂中央を原点にとり、左右対称な応力が作用する場合の K 値は

$$K_n = \frac{2}{\sqrt{\pi \tilde{a}_n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} \frac{f_i\left(x\right)}{\sqrt{1-\left(x/\tilde{a}_n\right)^2}} dx \tag{1.2}$$

ここで、K_n ：x_n 点における K 値

$\tilde{a}_n$ ：き裂参照長さ（$\tilde{a}_n = x_n$）

$f_i\left(x\right)$ ：区間 $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ に働いている *EDS*

き裂発生直前においてはき裂長さは 0 であるので K 値は定義できない[⊗]。しかし K 値は不定であるので $x_0 = 0$ における *EDS* は∞となり、(1.2)式は絶対収束しなければならない。このことを考慮して切欠底に接する結晶領域 $\left[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\right]$ （き裂先端に位置する結晶粒内）間に作用する *EDS* は、広義積分の収束性ならびに最も簡単な関数ということから、κ / x^p （ただし、κ, p ：定数、$0 < p < 1$）と与える。また $\left[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\right]$ を除く区間には区分 3 次方程式で表されるスプライン関数で近似する。すなわち、K_1 をせん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点の K 値とすると、き裂が $\tilde{a}_n$ まで進展した場合の K 値 K_n は、

$$K_n = \frac{2}{\sqrt{\pi \tilde{a}_n}} \left\{ \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1} \frac{\kappa}{x^p \sqrt{1-\left(x/\tilde{a}_n\right)^2}} dx + \sum_{i=2}^{n} \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} \frac{f_i\left(x\right)}{\sqrt{1-\left(x/\tilde{a}_n\right)^2}} dx \right\} \tag{1.3}$$

ここで、　$\tilde{a}_1 = \tilde{x}_1$ （せん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点のき裂深さ）。

ただし、$\tilde{x}_i$ は計算の都合上導入されたパラメタであり、初期の表面き裂状態では $\tilde{x}_i = x_i$ であるが、

[⊗]無限板中の貫通き裂の中央で応力を働かせないように *EDS* を定義できるが、その場合 COD の最大は付録４A に示すように、応力を働かせた端部から少し中に入った箇所となり、端部の COD が最大となるき裂を表現できなくなる。

板厚貫通後 (1.1)式となるように、参照き裂長さに対応している。ここで $f_i\left(x\right)$ を

$$f_i\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\kappa}{x^p} \quad (0<p<1) & \left(i=1\right)\\ \alpha_i x^3+\beta_i x^2+\gamma_i x+\delta_i & \left(i=2,n\right)\end{cases} \tag{1.4}$$

ただし、$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ はスプライン補間の係数

のように近似する。*EDS* は実構造の応力集中場に存在するき裂に関し、その成長に伴う *K* 値変化を、無限板中の直線板厚貫通き裂に再現する分布応力であり、き裂の中央に関して左右対称な分布応力となる。したがって、き裂中央では左右対称条件から COD の勾配は 0 となっている。しかし κ/x^p の項を導入することにより、マウス部で COD の勾配は 0 とならず、より実際に近い COD 分布を与え得ることが期待される。

$x=\tilde{x}_1$ で κ/x^p と $f_2\left(x\right)(=\alpha_2x^3+\beta_2x^2+\gamma_2x+\delta_2$ との接続が滑らかになるのが本来であるが、(1.3)式右辺中括弧内の第１項の解析積分ができないこと、ならびにこの第１区間の *EDS* は少しき裂が成長すれば *K* 値ならびに COD に与える影響は少なくなるので、ここでは連続性だけを持たせるようにする☀。したがって、

$$\frac{\kappa}{\tilde{x}_1^p}=\alpha_2\tilde{x}_1^3+\beta_2\tilde{x}_1^2+\gamma_2\tilde{x}_1+\delta_2 \tag{1.5}$$

仮想き裂の参照長さ $\tilde{a}$ を仮定し、実構造に対する参照き裂長さと *K* 値群 $\left(\tilde{a}_i,K_i\right)$ をもとに、$x_{i-1}<\tilde{a}\le x_i$ なる i を n とする。そして、$\left(\tilde{a}_i,K_i\right)$ 群から内挿にて、$\tilde{a}$ に対する *K* 値を求めて、それを K_n とし、改めて $\tilde{a}_n=\tilde{a}$ と置く。したがって(1.3)式は、

$$\begin{aligned}K_n=\frac{2}{\sqrt{\pi\tilde{a}_n}}\Bigg[\!\!\Bigg[&\frac{\kappa\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{x_k^P\sqrt{1-\left(x_k/\tilde{a}_n\right)^2}}\\&+\sum_{i=2}^{n}\Bigg[\alpha_i\left\{\frac{\left(\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_i^2\right)^{3/2}}{3}-\frac{\left(\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_{i-1}^2\right)^{3/2}}{3}-\tilde{a}_n^2\sqrt{\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_i^2}+\tilde{a}_n^2\sqrt{\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right\}\\&+\beta_i\left\{-\frac{\tilde{x}_i\sqrt{\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_i^2}}{2}+\frac{\tilde{x}_{i-1}\sqrt{\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_{i-1}^2}}{2}+\frac{\tilde{a}_n^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}_n}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}_n}\right)\right\}\\&+\gamma_i\left(-\sqrt{\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_i^2}+\sqrt{\tilde{a}_n^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right)+\delta_i\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}_n}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}_n}\right)\Bigg]\Bigg]\!\!\Bigg]\end{aligned} \tag{1.6}$$

☀ *p* に最適値があると考えられる。しかし最適値から多少離れた値でも *EDS* に大きな振動がなければ、妥当な COD が得られるものと期待される。

ここで、(1.3)式右辺中括弧内第 1 項は解析積分が出来ないので、３分点のガウス・ルジャンドル積分を用いて(1.6)式右辺第 1 項のように近似している。その分点は

$$x_k = \frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_0}{2}+\frac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_0}{2}X_k\text{、}\quad X_1=-0.7745967\text{、}X_2=0\text{、}X_3=0.7745967 \tag{1.7}$$

w_k は重みで、

$$w_1=5/9\text{、}w_2=8/9\text{、}w_3=5/9 \tag{1.8}$$

となる。

未知定数は、κ と $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i\ (i=2,n)$ の計 $(4n-3)$ 個となる。これに対し得られる方程式は、

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{源関数の連続性の条件} & f_i(\tilde{x}_i)=f_{i+1}(\tilde{x}_i) & (i=2,n-1)\\
\text{勾配の連続性の条件} & f_i'(\tilde{x}_i)=f_{i+1}'(\tilde{x}_i) & (i=2,n-1)\\
\text{２階微分の連続性} & f_i''(\tilde{x}_i)=f_{i+1}''(\tilde{x}_i) & (i=2,n-1)\\
\text{各点の } K \text{値} & f_i(\tilde{x}_i)=K_i & (i=1,n)\\
\tilde{x}_1 \text{での連続性（(1.5)式）} & &
\end{array}\right\}$$

と合計 $(4n-5)$ 個が得られ、式が 2 つ不足する。

通常のスプライン関数でも式が 2 つ不足し、両端での 2 次微分が、0 になるという自然境界条件を課し、不足分を補っている。しかし、本問題では自然境界条件が適切か否か明らかでない。また、$x=0$ では源関数が発散しているので、この点における条件は課せられない。これらの不足分の方程式として以下の方程式が考えられる。

[1]　x_n における 2 次導関数

①x_n における 2 次導関数を x_{n-1}、x_{n-2} の 2 次導関数の線形補間値とする

②x_n における 2 次導関数を 0 とする（自然境界条件）

[2]　x_n における 1 次導関数

①x_n における 1 次導関数を x_{n-1}、x_{n-2} の 1 次導関数の線形補間値とする

②x_n における 1 次導関数を x_{n-1}、x_{n-2} の 1 次導関数の線形補間値の θ 倍とする（θ：定数）

これら[1]、[2]の各小括弧群からの 1 つを選択すれば、未知定数の数と過不足のない方程式が得られるので、未知定数が定まることになる。

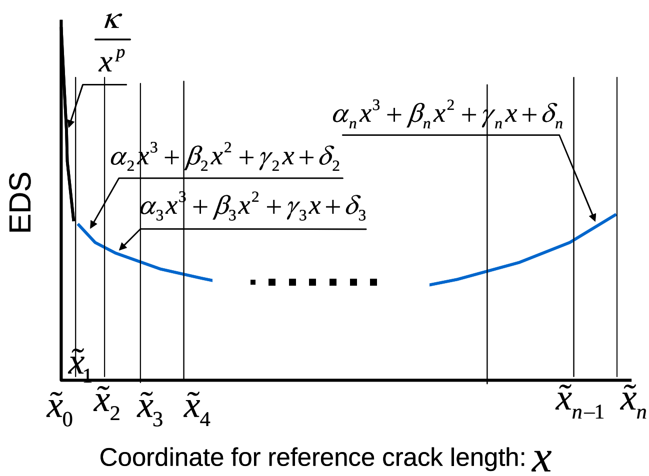


図 1.2 き裂発生部近傍では広義積分の存在し、他はスプライン関数で近似した *EDS*

図 1.2 に得られる *EDS* を模式的に示す。外力、内力ならびにき裂結合力のそれぞれに

ついての $a\sim K$ 関係から、a を与えるとそれぞれについて *EDS* が独立して得られることになる。なお、ここで与える K 値はき裂が開口した状態で得られるもので、き裂閉口のことを考慮しないものである。

[1]－①、[2]－①を採用した場合の定式化を以下に示す。[1]－①を具体的に表示すると、$f_i''(x)=6\alpha_i x+2\beta_i$ であるから、

$$6\tilde{x}_n\alpha_n+2\beta_n-\frac{6(\tilde{x}_{n-2}-\tilde{x}_n)\tilde{x}_{n-1}}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\alpha_{n-1}-\frac{2(\tilde{x}_{n-2}-\tilde{x}_n)}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\beta_{n-1}-\frac{6(\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-1})\tilde{x}_{n-2}}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}-\frac{2(\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-1})}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\beta_{n-2}=0 \qquad (1.10)$$

また、勾配 $f_i'(x)$ は、$f_i'(x)=3\alpha_i x^2+2\beta_i x+\gamma_i$ であるから、[2]－①は、

$$\frac{3\tilde{x}_{n-2}^2(\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2})}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\alpha_{n-2}+\frac{2\tilde{x}_{n-2}(\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2})}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\beta_{n-2}+\frac{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\gamma_{n-2}+\frac{3\tilde{x}_{n-1}^2(\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-2})}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\alpha_{n-1}+\frac{2\tilde{x}_{n-1}(\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-2})}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\beta_{n-1}+\frac{\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-2}}{\tilde{x}_{n-1}-\tilde{x}_{n-2}}\gamma_{n-1}-3\tilde{x}_n^2\alpha_n-2\tilde{x}_n\beta_n-\gamma_n=0 \qquad (1.11)$$

となる。また、(1.9)式の第 1 式より、

$$\tilde{x}_i^3\alpha_i+\tilde{x}_i^2\beta_i+\tilde{x}_i\gamma_i+\delta_i-\tilde{x}_i^3\alpha_{i+1}-\tilde{x}_i^2\beta_{i+1}-\tilde{x}_i\gamma_{i+1}-\delta_{i+1}=0 \qquad (i=2,n-1) \qquad (1.12)$$

(1.9)式の第 2 式より、

$$3\tilde{x}_i^2\alpha_i+2\tilde{x}_i\beta_i+\gamma_i-3\tilde{x}_i^2\alpha_{i+1}-2\tilde{x}_i\beta_{i+1}-\gamma_{i+1}=0 \qquad (i=2,n-1) \qquad (1.13)$$

(1.9)式の第 3 式より、

$$6\tilde{x}_i\alpha_i+2\beta_i-6\tilde{x}_i\alpha_{i+1}-2\beta_{i+1}=0 \qquad (i=2,n-1) \qquad (1.14)$$

したがって、(1.12)～(1.14)式（$3n-6$ 個の方程式）、(1.6)式（n 個の方程式）、(1.5)式（1 個の方程式）ならびに（1.10)式と(1.11)式で、$(4n-3)$ 個の連立一次方程式が得られ、$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$（$i=2,n$）ならびに κ の解を得ることが出来る。

上記は $\tilde{x}_n\le t$（t：板厚）の場合であるが、$\tilde{x}_n>t$ の場合には、$x=t$ でスムーズな連続性は保証されない。しかし、表面き裂が板裏面に貫通し、き裂の方向が幅方向に変化する場合でも、参照き裂長さの成長曲線に目立った屈曲点が生じないことから、K 値の連続性は $x=t$ でも成立していると仮定できると期待される。さらに、板厚貫通直後の板厚貫通き裂への遷移域での寿命は全寿命に比して短いので、この領域の K 値が厳密に得られなくてもスムーズに変化するように与えれば、寿命計算に大きな誤差は生じないので、特別な配慮は不必要と考えられる。

それぞれの $a\sim K$ 関係から得られる未知定数は、外力に関しては (P)、内力に関しては (R)、降伏点相当のき裂結合力に関しては (Y) を上添で表示することとする。

以上から分かるように、仮想き裂先端 $\tilde{a}$ が与えられると、*EDS* の未知定数が具体的に与えられることになる。

1.3 *EDS* 上のき裂結合力モデル

Dugdale モデルなどこれまで提案されてきたき裂結合力モデルは、平板の遠方で一様応力が働く場に板厚貫通き裂が存在する 2 次元問題に対してのみである。しかし、附録 4B に示すように、一様応力場でなくても、任意の分布応力が作用する場に存在する 2 次元き裂問題においては、任意分布のき裂結合力が働く場合にも仮想き裂先端で応力の連続性が成立し、き裂結合力モデルが成立する。すなわち、任意分布応力下でき裂前方に生じる塑性域をき裂と仮想し、実き裂と仮想き裂部に、上記任意分布の作用応力が内圧として働く場合の仮想き裂先端の K 値と、仮想き裂部にき裂結合力が負の内圧として働く場合の K 値を加えたものが 0 という条件下では、き裂結合力による応力分布と仮想き裂先端前方での弾性域の応力分布に不連続が生じないで、仮想き裂先端部で応力が連続することが証明できる。したがって、*EDS* 上でも以下のようにき裂結合力モデルを構築出来る。ここでは図 1.1 に示したように、表面き裂の裏面に部材の配置がなく、裏面貫通後は板幅方向に板厚貫通き裂として成長する問題を念頭におき、き裂は裏面まで達していない状態で、塑性域が裏面に達していない状態と、塑性域が裏面到達後にき裂幅方向にまで拡大している状態を想定して、き裂結合力モデルを説明する。

仮想き裂の大きさ $\tilde{a}$ を与えると $(\tilde{a}_i, K_i)$ から、*EDS* が 1.2 節より求められる。ここで、K 値として外力のみが作用した場合の K 値から得られる *EDS* を $f_i^{(P)}$ とし、各区分における係数を $\kappa^{(P)}$ と $\alpha_i^{(P)}, \beta_i^{(P)}, \gamma_i^{(P)}, \delta_i^{(P)}$ $(i=2,n)$ のように上添字 (P) で表す。また、残留応力のみが働いている場合の *EDS* を $f_i^{(R)}$ とし、その係数を $\kappa^{(R)}$ と $\alpha_i^{(R)}, \beta_i^{(R)}, \gamma_i^{(R)}, \delta_i^{(R)}$ $(i=2,n)$ とする。さらに実構造内のき裂に、単位降伏点相当のき裂結合力が内圧として作用した場合に得られる *EDS* を $\hat{f}_i^{(Y)}$ とし、その係数を $\hat{\kappa}^{(Y)}$ と $\hat{\alpha}_i^{(Y)}, \hat{\beta}_i^{(Y)}, \hat{\gamma}_i^{(Y)}, \hat{\delta}_i^{(Y)}$ $(i=2,n)$ とする。したがって、引張側降伏点を σ_{Yt} とすると、き裂面には $\sigma_{Yt}\hat{f}_i^{(Y)}\left(=f_i^{(Y)}\right)$ が働き、$f_i^{(Y)}$ の係数はそれぞれ、$\kappa^{(Y)}=\sigma_{Yt}\hat{\kappa}^{(Y)}$、$\alpha_i^{(Y)}=\sigma_{Yt}\hat{\alpha}_i^{(Y)}$、$\beta_i^{(Y)}=\sigma_{Yt}\hat{\beta}_i^{(Y)}$、$\delta_i^{(Y)}=\sigma_{Yt}\hat{\delta}_i^{(Y)}$ となる。この *EDS* 下では図 1.3 の関係が成立する。ここで $\tilde{c}$ は実き裂の参照き裂長さである。

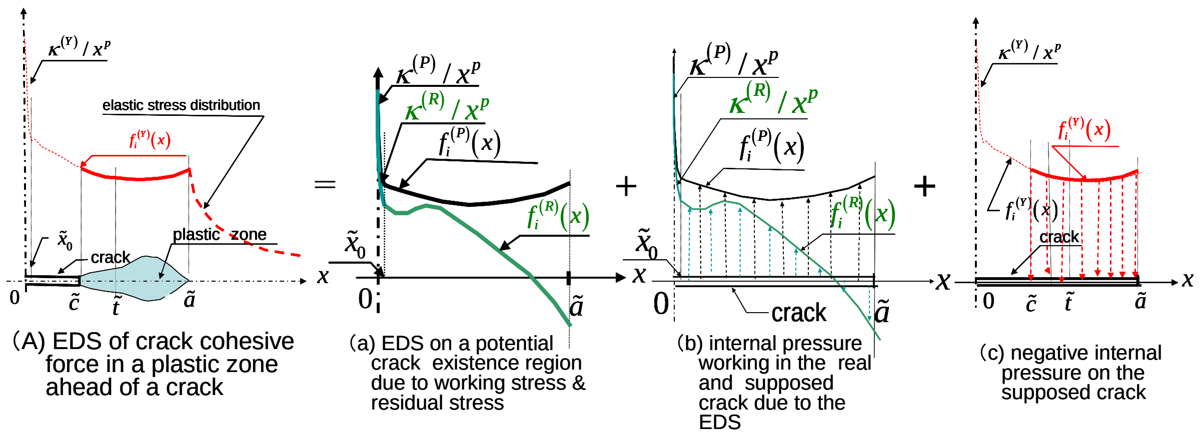


図 1.3 *EDS* 座標軸上でのき裂結合力モデル（実き裂先端が平面ひずみ条件領域に存在し、塑性域が板裏面に達し、仮想き裂がその方向を変えて存在する状態の場合）

なお上記単位降伏点相当のき裂結合力に対するi要素に働く*EDS*($\hat{f}_i^{(Y)}$)を与えるための($\tilde{a}_i, \hat{K}_i^{(Y)}$)は、外力のみが作用した場合のき裂（き裂の大きさと形状）に対して、そのき裂面に単位降伏点相当のき裂結合力が一様に作用した場合の K 値とすれば良い。き裂が平面ひずみ状態下にある場合と平面応力下にある場合にはき裂結合力は 3 軸拘束係数の違いにより異なるし、繰返し負荷を受ける場合は静的降伏点と繰返し負荷下の降伏点が異なったりする。したがって、引張側静的降伏点が単位応力1として、平面ひずみ状態にある場合はその3軸拘束係数 λ_ε に単位応力を乗じた応力 $1\cdot\lambda_\varepsilon$ 、平面応力状態にある場合はその 3 軸拘束係数 λ_σ に単位応力を乗じた応力 $1\cdot\lambda_\sigma$ が一様な圧力としてき裂面に作用する場合の K 値（ $\hat{K}_i^{(Y)}$ ）と $\tilde{a}_i$ の関係から単位降伏応力が作用する場合のき裂結合力による *EDS* を求めれば良い⊗。

$\hat{K}_i^{(Y)}$ の具体例としては当初表面き裂として発生し、それが成長して板厚貫通き裂となる図 1.1 に示すようなものが代表的なものである。この場合、き裂深さが板厚の８割に到達するまでの半楕円表面き裂の最深部についての K 値は、1.82)～(1.85)式で、 $\sigma_t = 1\cdot\lambda_\varepsilon$ 、 $\sigma_b = 0$ 、 $a = \tilde{a}$ とすることで得られる。また、図 1.1 に示す板厚貫通後の板表面(J 点)に単位応力が作用する場合の K 値は、板厚内における平均き裂半長を $\overline{b}$ 、き裂前縁の長さ（図 1.1 の IJ の弧長）を $\widehat{S}$ とすると、

$$\hat{K}_{\mathrm{E}} = \frac{t\lambda_\sigma}{\widehat{S}}\sqrt{\pi\overline{b}} \tag{1.15}$$

ここで　λ_σ ：貫通き裂に対する塑性拘束係数（通常 1.04：図 1.21 参照)

と Neale による結果 [11)] から与えられる。き裂深さが板厚の８割になるまで（ $a/t \le 0.8$ ）しか、表面き裂の K 値は求められていない。しかし、この後から板厚貫通するまでのき裂伝播寿命は短いと考えられるのと、K 値は滑らかに変化するので、$a/t = 0.8$ のときの $\hat{K}$ と板厚貫通時の $\hat{K}_E$ 間は適当に滑らかに結ぶように $\hat{K}_i^{(Y)}$ 値を与えて 1.2 節にしたがって $\hat{\kappa}^{(Y)}$ ならびに $\hat{\alpha}_i^{(Y)}, \hat{\beta}_i^{(Y)}, \hat{\gamma}_i^{(Y)}, \hat{\delta}_i^{(Y)}$ （ $i = 2, n$ ）を決定すれば、ほぼ正しいき裂結合力に対する *EDS* が与えられると期待できる。

仮想き裂の先端では応力特異性が生じないという条件より、以下の関係が成立しなければならない。なお、ここではき裂が発生していない状態も含めて記述している。

$$\frac{2}{\sqrt{\pi\tilde{a}}}\left[\left\{\kappa^{(P)} + \kappa^{(R)}\right\}\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1}\frac{1}{x^p\sqrt{1-\left(x/\tilde{a}\right)^2}}dx + \sum_{i=2}^{n}\int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i}\frac{f_i^{(P)}\left(x\right)+f_i^{(R)}\left(x\right)}{\sqrt{1-\left(x/\tilde{a}\right)^2}}dx\right.$$

⊗ き裂結合力に対する K 値を、降伏点レベルの応力がき裂面に一様に働くとして与えることは厳密性に欠ける。当然各段階のき裂について、K 値が最大となる点を結ぶ線上でのき裂結合力は降伏点レベルになっている。しかしその線上から離れた位置では、降伏点レベルより小さくなることを、き裂幅方向に急峻な応力勾配がある場合には考慮する必要性があるかも知れない。しかし、き裂結合力に関しては後述の図 3.8 から分かるように、多少結合力が変化しても、実き裂内ならびに実き裂先端近傍の（仮想）COD は殆ど変化しないので、き裂面に一様な降伏点レベルの内圧が作用するとして求めた K 値から *EDS* を求めることとしている。

$$-\sigma_Y\left\{D\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1}\frac{\hat{\kappa}^{(Y)}}{x^p\sqrt{1-\left(x/\tilde{a}\right)^2}}dx+\sum_{i=\bar{m}}^{n}\int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i}\frac{\hat{f}_i^{(Y)}\left(x\right)}{\sqrt{1-\left(x/\tilde{a}\right)^2}}dx\right\}\Bigg]=0 \qquad (1.16)$$

ただし、き裂が発生していない状態では $D=1$ 、$\bar{m}=2$ となる。そしてき裂が存在する状態では $D=0$ とすると同時に、$x_{i-1}\le\tilde{c}<x_i$ となる i を $\bar{m}$ とし、$\tilde{x}_{\bar{m}-1}=\tilde{c}$ とする。

また、$\tilde{x}_0=0$ 、$\tilde{x}_1-\tilde{x}_0=d_0$ （結晶粒径）

σ_Y ：降伏点

そこで、

$$\Theta^{(P)}\left(\tilde{a}\right)=\frac{\kappa^{(P)}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{x_k^p\sqrt{1-\left(x_k/\tilde{a}\right)^2}}$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\left[\alpha_i^{(p)}\left\{\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2\right)^{3/2}}{3}-\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2\right)^{3/2}}{3}-\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right\}\right.$$
$$+\beta_i^{(p)}\left\{-\frac{\tilde{x}_i\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}}{2}+\frac{\tilde{x}_{i-1}\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right\}$$
$$\left.+\gamma_i^{(P)}\left(-\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right)+\delta_i^{(p)}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right] \qquad (1.17)$$

$$\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)=\frac{\kappa^{(R)}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{x_k^p\sqrt{1-\left(x_k/\tilde{a}\right)^2}}$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\left[\alpha_i^{(R)}\left\{\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2\right)^{3/2}}{3}-\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2\right)^{3/2}}{3}-\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right\}\right.$$
$$+\beta_i^{(R)}\left\{-\frac{\tilde{x}_i\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}}{2}+\frac{\tilde{x}_{i-1}\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right\}$$
$$\left.+\gamma_i^{(R)}\left(-\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right)+\delta_i^{(R)}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right] \qquad (1.18)$$

$$\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)=\frac{\hat{\kappa}^{(Y)}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)D}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{x_k^p\sqrt{1-\left(x_k/\tilde{a}\right)^2}}$$

$$+\sum_{i=\bar{m}}^{n}\left[\hat{\alpha}_i^{(Y)}\left\{\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2\right)^{3/2}}{3}-\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2\right)^{3/2}}{3}-\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right\}\right.$$

$$+\hat{\beta}_i^{(Y)}\left\{-\frac{\tilde{x}_i\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}}{2}+\frac{\tilde{x}_{i-1}\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right\}$$

$$\left.+\hat{\gamma}_i^{(Y)}\left(-\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right)+\hat{\delta}_i^{(Y)}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right] \tag{1.19}$$

上式右辺第 1 項のガウスルジャンドル積分の分点は

$$x_k=\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_0}{2}+\frac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_0}{2}X_k\text{、}\quad X_1=-0.7745967\text{、}\ X_2=0\text{、}\ X_3=0.7745967$$

w_k は重みで、

$$w_1=5/9\text{、}\ w_2=8/9\text{、}\ w_3=5/9$$

ここで $\tilde{c}\neq 0$ のときは $\tilde{x}_{\bar{m}-1}=\tilde{c},\ \ D=0$ となり、$\tilde{c}=0$ のときは $\bar{m}=2,\ D=1$ となる。

と置くと、 (1.16)式は

$$\Theta^{(P)}\left(\tilde{a}\right)+\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)-\sigma_Y\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)=0 \tag{1.20}$$

(1.16)式により、実き裂の参照長さ $\tilde{c}$ （ただし $\tilde{x}_{m-1}=\tilde{c}$、ここでは $\tilde{x}_{m-1}=0$）を与えれば、与えた *EDS* 下における仮想き裂の参照長さ $\tilde{a}$ が求められる。

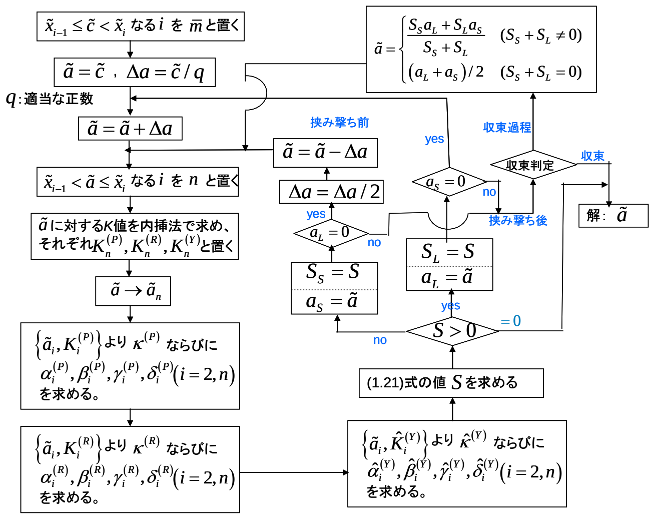


図 1.4　(1.20)式の収束計算の流れ

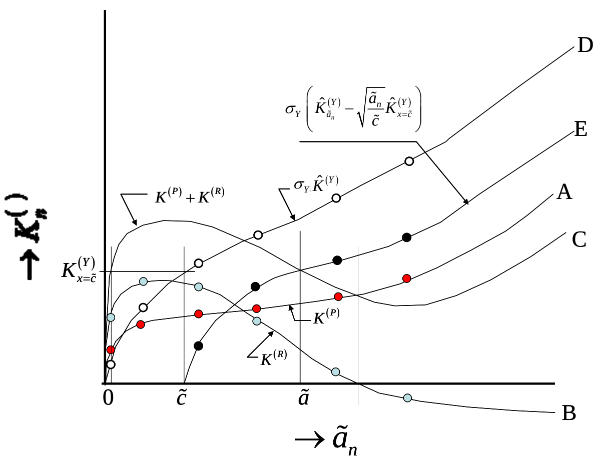


図 1.5 仮想き裂先端位置の決定

ここで、

$$S=\Theta^{(P)}\left(\tilde{a}\right)+\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)-\sigma_Y\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right) \tag{1.21}$$

と置く。(1.20)式は図 1.4 に示す流れの収束計算で解くことが出来、解 $\tilde{a}$ が得られる。このとき同時に *EDS* の係数が求められる。すなわち、具体的には、$\tilde{c}$ より大きな $\tilde{a}$ を仮定して、外力、内力ならびにき裂結合力によるそれぞれの *EDS* を 2.2 で得られる連立一次方程式からまず求める。これにより、*EDS* の係数が求められるので、(1.20)式左辺の値 S （(1.21)式）が求められる。$\tilde{c}$ を固定し（ここでは $\tilde{c}=0$）、$\tilde{a}$ を大きくしていくと、S は正から負となる方向に変化する。したがって、挟み撃ち法により $\tilde{a}$ が求められる。

(1.20)式の解 $\tilde{a}$ は図 1.5 に示すように作図により求めることも出来る。すなわち、横軸に参照き裂長さ $\tilde{a}_n$ をとり、縦軸に K 値 K_n をとる。そして、外力による $\left(\tilde{a}_n,K_n^{(P)}\right)$ 点をプロットし（赤丸）、それを通る曲線 0A を描く。次に内力による $\left(\tilde{a}_n,K_n^{(R)}\right)$ 点をプロットし(水色丸)、それを通る曲線 0B を描く。そして、$\left(\tilde{a}_n,K_n^{(P)}+K_n^{(R)}\right)$ を通る曲線 0C を描く。次にき裂内面に降伏点レベルのき裂結合力が作用する場合の $\tilde{a}\sim K$ 関係、すなわち $\left(\tilde{a}_i,\sigma_Y\hat{K}_i^{(Y)}\right)$ をプロットし（白丸）、これを通る曲線 0D を描く。そして実き裂に対する参照き裂長さ $\tilde{c}$ に相当する $\sigma_Y\hat{K}^{(Y)}$ を内挿により求め、それを $\sigma_Y\hat{K}_{x=\tilde{c}}^{(Y)}$ とする。そして、$\tilde{c}$ より大きな $\tilde{a}_n$ に対する $\sigma_Y\hat{K}_{\tilde{a}_n}^{(Y)}$ を求め、

$$\left[\tilde{a}_n,\sigma_Y\left\{\hat{K}_{\tilde{a}_n}^{(Y)}-\sqrt{\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{c}}}\hat{K}_{x=\tilde{c}}^{(Y)}\right\}\right]$$

を図にプロット（黒丸）し、それを通る曲線 $\tilde{c}$E を描く。この曲線と曲線 0C が交わる点の横軸が(1.20)式の解 $\tilde{a}$ となる。

無限板中の x 軸上にある直線き裂（長さ $2\tilde{a}$ ）の中央を原点とし、き裂線上 $|x|$ の位置に双荷重 P が作用した場合の b の位置におけるき裂開口変位 $V\left(b\right)$ は [12]、

$$V\left(b\right)=\frac{8P}{\pi E'}\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\qquad\begin{pmatrix}|x|\le b\\ b<|x|\end{pmatrix} \tag{1.22}$$

したがって、*EDS* 軸上におけるき裂開口変位 $V\left(b\right)$ は図 1.3 と(1.22)式より、

$$V\left(b\right)=\frac{8}{\pi E'}\left[\!\left[\left\{\kappa^{(P)}+\kappa^{(R)}\right\}\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1}\frac{1}{x^p}\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}}dx\right.\right.$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i}\left\{f_i^{(p)}\left(x\right)+f_i^{(R)}\left(x\right)\right\}\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}}dx$$

$$-\sigma_Y\left\{D\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1}\frac{\hat{\kappa}^{(Y)}}{x^p}\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}}dx+\sum_{i=\bar{m}}^{n}\int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i}\hat{f}_i^{(Y)}(x)\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}}dx\right\}\Bigg]\Bigg] \tag{1.23}$$

ところで、

$$\left.\begin{aligned}
&\int\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{\tilde{a}^2-x^2}{\tilde{a}^2-b^2}}\,d\,x \quad = g_0(x,b,\tilde{a})\\
&\qquad=\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sin^{-1}\frac{x}{|\tilde{a}|}+\frac{x-b}{2}\ln\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\right|}\\
&\qquad\quad+\frac{b}{2}\ln\frac{\tilde{a}^2+bx+\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\left|\tilde{a}^2+bx-\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\right|}\\
&\int x\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{\tilde{a}^2-x^2}{\tilde{a}^2-b^2}}\,d\,x \quad = g_1(x,b,\tilde{a})\\
&\qquad=\frac{x^2-b^2}{4}\ln\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\right|}-\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\\
&\int x^2\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{\tilde{a}^2-x^2}{\tilde{a}^2-b^2}}\,d\,x \quad = g_2(x,b,\tilde{a})\\
&\qquad=-\frac{x}{6}\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}+\frac{x^3-b^3}{6}\ln\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\right|}\\
&\qquad\quad+\frac{\tilde{a}^4+\tilde{a}^2b^2-2b^4}{6\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}}\sin^{-1}\frac{x}{|\tilde{a}|}+\frac{b^3}{6}\ln\frac{\tilde{a}^2+bx+\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\left|\tilde{a}^2+bx-\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\right|}\\
&\int x^3\begin{Bmatrix}\tanh^{-1}\\ \coth^{-1}\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{\tilde{a}^2-x^2}{\tilde{a}^2-b^2}}\,d\,x \quad = g_3(x,b,\tilde{a})\\
&\qquad=\frac{x^4-b^4}{8}\ln\frac{\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}}{\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}\right|}-\frac{x^2+2\tilde{a}^2+3b^2}{12}\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}\sqrt{\tilde{a}^2-x^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

となるので、

$$G_j(x_{i-1},x_i,b,\tilde{a})=\frac{8}{\pi E'}\left\{g_j(x_i,b,\tilde{a})-g_j(x_{i-1},b,\tilde{a})\right\} \qquad (j=0,3) \tag{1.25}$$

とおくと、(1.23)式は、

$$V(b)=\frac{4(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0)(\kappa^{(P)}+\kappa^{(R)})}{\pi E'}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{2x_k^p}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right|\right\}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left[\left\{\alpha_i^{(P)}+\alpha_i^{(R)}\right\}G_3(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\left\{\beta_i^{(P)}+\beta_i^{(R)}\right\}G_2(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right.$$

$$\left.+\left\{\gamma_i^{(P)}+\gamma_i^{(R)}\right\}G_1(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\left\{\delta_i^{(P)}+\delta_i^{(R)}\right\}G_0(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right]$$

$$-\sigma_Y D\frac{4(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0)\hat{\kappa}^{(Y)}}{\pi E'}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{2x_k^p}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right|\right\}$$

$$-\sigma_Y\sum_{i=\bar{m}}^{n}\left[\hat{\alpha}_i^{(Y)}G_3(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\hat{\beta}_i^{(Y)}G_2(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right.$$

$$\left.\hat{\gamma}_i^{(Y)}G_1(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\hat{\delta}_i^{(Y)}G_0(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right] \tag{1.26}$$

ここで、$\tilde{x}_{i-1}\le\tilde{c}<\tilde{x}_i$ となる i を $\bar{m}$ とおくと、$\tilde{x}_{\bar{m}-1}=\tilde{c}$

$\bar{m}=1$の場合　$D=1$

$\bar{m}\neq1$の場合　$D=0$

また $\tilde{x}_{i-1}\le\tilde{a}<\tilde{x}_i$ となる i を n とし、$\tilde{x}_n=\tilde{a}$ とする。

そしてガウス積分（3 点法）の分点および重みは　(1.27)

$$x_k=\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_0}{2}+\frac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_0}{2}X_k,\ X_1=-0.7745967,\ X_2=0,\ X_3=0.7745967$$

$w_1=5/9$、$w_2=8/9$、$w_3=5/9$

となる。

ここで、

$$\Omega^{(P)}(b,\tilde{a})=\frac{4(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0)\kappa^{(P)}}{\pi E'}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{2x_k^p}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right|\right\}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left\{\alpha_i^{(p)}G_3(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\beta_i^{(p)}G_2(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\gamma_i^{(p)}G_1(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right.$$

$$\left.+\delta_i^{(p)}G_0(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right\} \tag{1.28}$$

$$\Omega^{(R)}(b,\tilde{a})=\frac{4(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0)\kappa^{(R)}}{\pi E'}\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{2x_k^P}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right|\right\}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left\{\alpha_i^{(R)}G_3(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\beta_i^{(R)}G_2(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})+\gamma_i^{(R)}G_1(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right.$$

$$\left.+\delta_i^{(R)}G_0(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a})\right\} \tag{1.29}$$

$$\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,x_S,x_L,\tilde{a}\right)=\frac{4\left(x_L-x_S\right)\hat{\kappa}^{(Y)}}{\pi E'}D\sum_{k=1}^{3}\frac{w_k}{2x_k^P}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right)\right.$$

$$\left.-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_k^2}\right|\right\}$$

$$+\sum_{i=\bar{m}}^{n}\left[\hat{\alpha}_i^{(Y)}G_3\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\hat{\beta}_i^{(Y)}G_2\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\right.$$

$$\left.\hat{\gamma}_i^{(Y)}G_1\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\hat{\delta}_i^{(Y)}G_0\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\right] \tag{1.30}$$

とおくと、(1.26)式は

$$V\left(b\right)=\Omega^{(P)}\left(b,\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)-\sigma_Y\,\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,\tilde{c},\tilde{a},\tilde{a}\right) \tag{1.31}$$

き裂が最初の結晶粒界に達した時点からのき裂成長に伴う、外力、内力ならびにき裂結合力の各々の *K* 値が与えられていれば図 1.4 の流れにより仮想き裂先端位置 $\tilde{a}$ が収束計算で求められ、各 *EDS* の係数が求められる。したがって、(1.23)式（あるいは(1.31)式）により b 点の COD が求められる。

すなわち、き裂成長に伴う外力による *K* 値変化、内力による *K* 値変化および、き裂面全体にき裂結合力が働いている場合のK値変化が求められていれば、表面き裂であっても *EDS* に変換してき裂結合力モデルが作成でき、最深部の CTOD やマウス部の COD が推定できることになる。

2.　脆性破壊強度評価

構造的応力集中のため、局部的に引張塑性域となっている箇所に小さな表面き裂が存在する問題を考えると、き裂進展に伴う表面き裂形状の変化曲線上にあるき裂について、外力による *EDS*、残留応力による *EDS* ならびにき裂結合力による *EDS* を介してき裂結合力モデルが 1 章のように作成でき、仮想き裂先端からマウス部間の COD を(1.20)式で求めることができる。すなわち、き裂成長に伴う自然なき裂形状変化を仮定することで、構造物中のき裂に関して、*EDS* を介して Dugdale モデルと同様のき裂結合力モデルが成立する。したがって、き裂結合力モデルによって与えられる実き裂先端位置の COD が CTOD であるという本来の定義を構造物中のき裂問題に対しても適用できる。

一方、破壊靭性試験で広く用いられている三点曲げ COD 試験片や CT 試験片におけるき裂結合力モデルも確立されていない。そこで、本章では本来の COD 仮説に基ずく上記試験片の CTOD を求めるためのき裂結合力モデルを説明する。同じ定義の CTOD で脆性破壊強度が論じ得るか否かは今後の実験的研究に待たざるを得ないが、違った物理量を比較して脆性破壊強度を論じている現時点の規格等の不合理を解消できる可能性を有している。

2.1 破壊靱性試験

以下に破壊靱性試験で良く用いられている 3 点曲げ COD 試験片と CT 試験片についてのき裂結合力モデルの定式化とその計算結果を示す。

2.1.1 三点曲げ COD 試験片に対するき裂結合力モデル

図 1.10 に示した帯板端部き裂の任意のき裂面に集中荷重を受ける場合の K 値は(1.53)式で与えられる。再記すると、

$$K=\frac{2P}{\sqrt{\pi a}}\frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \tag{2.1}$$

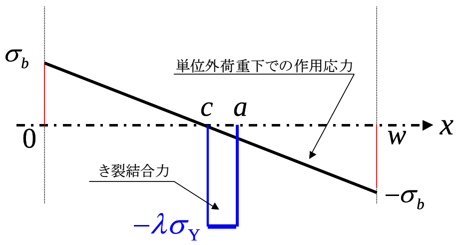


図 2.1　端部き裂付き帯板に曲げが作用する場合のき裂結合力モデルに作用する応力

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&G(\chi,\alpha)=g_1(\alpha)+\chi g_2(\alpha)+\chi^2 g_3(\alpha)+\chi^3 g_4(\alpha)\\
&g_1(\alpha)= 1.300-1.309\alpha+12.13\alpha^2-24.96\alpha^3+30.65\alpha^4-15.07\alpha^5\\
&g_2(\alpha)=-136.4+71.42\alpha-9.105\alpha^2+82.82\alpha^3-116.1\alpha^4+82.49\alpha^5+136.3(1-\alpha)^{1/2}\\
&g_3(\alpha)=165.3-90.90\alpha+24.17\alpha^2-153.9\alpha^3+209.1\alpha^4-130.1\alpha^5-165.5(1-\alpha)^{1/2}\\
&g_4(\alpha)=-60.31+34.27\alpha-16.11\alpha^2+76.90\alpha^3-99.07\alpha^4+57.15\alpha^5+60.38(1-\alpha)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

と χ の関係は図 1.11 中実線で示されている。

3 点曲げ COD 試験では、純曲げ応力が作用するから、$P=\left(-2\sigma_b x/w+\sigma_b\right)pdx$ が x 位置の微小部分に作用する。そして、実き裂前方の塑性域にはき裂結合力が作用する（図 2.1 参照）。ここで p は外荷重である。仮想き裂先端位置 $x=a$ において K 値は 0 となるから、

$$K=\frac{2}{\sqrt{\pi a}}\left\{p\int_0^a\frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)\left(-\frac{2\sigma_b}{w}x+\sigma_b\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx-\lambda\sigma_Y\int_c^a\frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx\right\}=0 \tag{2.3}$$

ただし　λ ：塑性拘束係数
σ_b ：単位荷重（ $p=1$ ）が作用した場合の曲げ応力
w ：試験片高さ
c ：実き裂長

そして、全面降伏時には仮想き裂先端はリガメントの中心にあるので、$a=(c+w)/2$ 以上にはならず、この位置になってからは、荷重の大きさにつれて見掛上降伏点 σ_Y が上昇することになる。具体的には、$\left[c,(c+w)/2\right]$ 間に a を設定すれば、

$$p=\lambda\sigma_Y\int_c^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \Bigg/ \int_0^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)\left(-\frac{2\sigma_b}{w}x+\sigma_b\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \tag{2.4}$$

として荷重が自動的に決まる。そして、$a=(c+w)/2$ となった後は、a の位置は保持され、降伏点が見掛上、

$$\lambda\sigma_Y=p\int_0^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)\left(-\frac{2\sigma_b}{w}x+\sigma_b\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \Bigg/ \int_c^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \tag{2.5}$$

と、外荷重 p が大きくなるにつれて、上昇する。

Paris の相反定理（(1.47)式参照）より、x_i の位置に集中荷重 P_i が作用した場合の x の位置でのき裂開口変位 $V(x)$ は、

$$V(x)=\frac{8P_i}{\pi E'}\int_x^a \frac{G\left(\frac{x_i}{a},\frac{a}{w}\right)G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{a\left(1-\frac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}da \tag{2.6}$$

ただし、

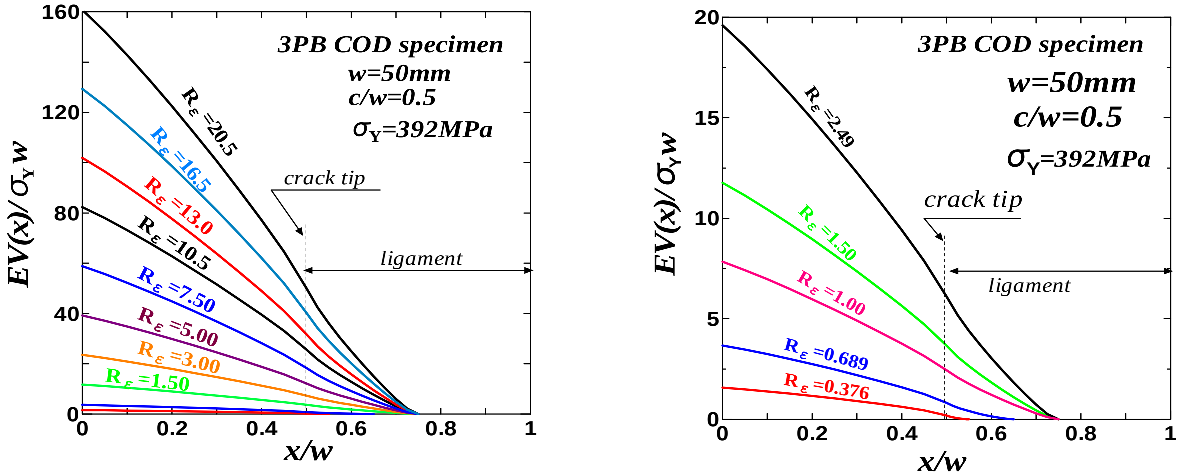
$$E'=\begin{cases} E & \text{（平面応力状態）} \\ E/\left(1-\nu^2\right) & \text{（平面ひずみ状態）} \end{cases} \tag{2.7}$$

で与えられる。したがって、図 2.1 のように、曲げ応力下でき裂結合力が作用した場合のき裂開口変位は、

$$V(x)=\frac{8}{\pi E'}\left[p\int_0^a\left(-\frac{2\sigma_b}{w}x_i+\sigma_b\right)dx_i\int_x^a \frac{G\left(\frac{x_i}{a},\frac{a}{w}\right)G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{a\left(1-\frac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}da\right.$$
$$\left.-\lambda\sigma_Y\int_c^a dx_i\int_x^a \frac{G\left(\frac{x_i}{a},\frac{a}{w}\right)G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{a\left(1-\frac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}da\right] \tag{2.8}$$

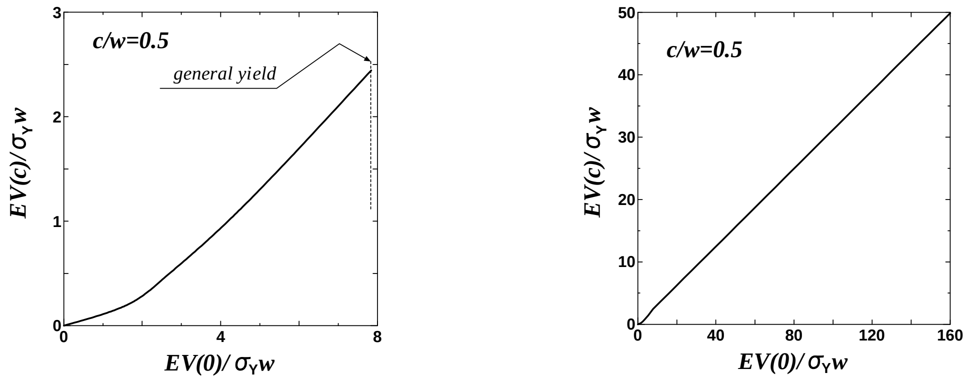
で表される。上記には 2 重積分が含まれているので、プログラム化が難しいという声も聞かれるので、

付録 4D に上記をフォートランでプログラム化した例を示す。



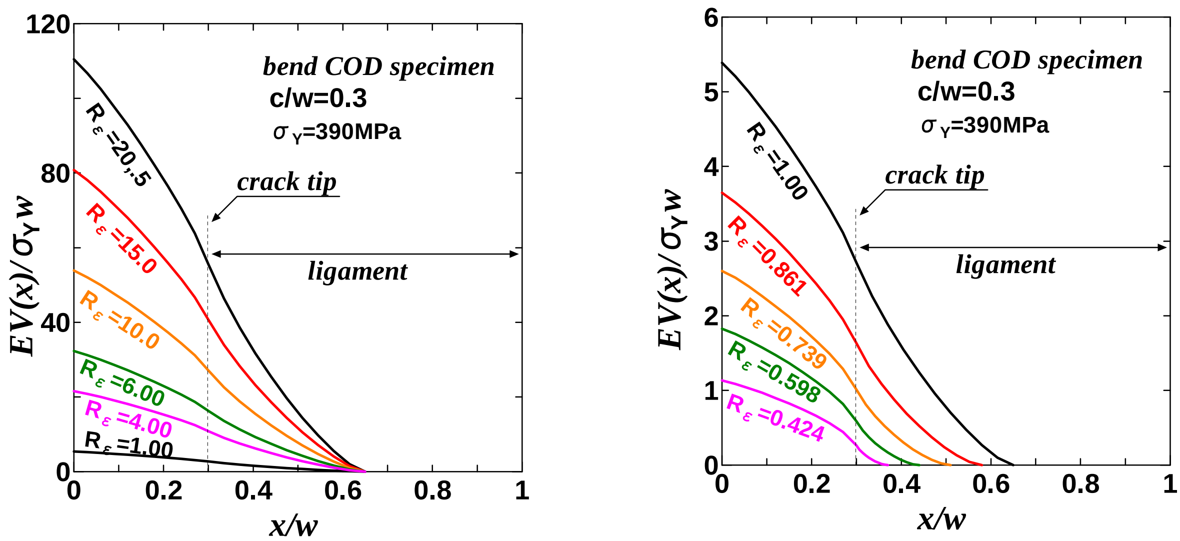
a)　全体図　　　　　　　　　　　　b)　低変位領域

図 2.2　3 点曲げ COD 試験体のき裂結合力モデルによる COD 計算結果



a)　全面降伏前　　　　　　　　　　　　b)　全領域

図 2.3　mouth COD と CTOD の関係（c/w=0.5）



a)　全面降伏前　　　　　　　　　　　　b)　全領域

図 2.4　3 点曲げ COD 試験体のき裂結合力モデルによる COD 計算結果（c/w=0.3）

図 2.2 は付録 4D のプログラムを適用し、板厚 25mm の標準 COD 試験片（き裂長 25mm、試験片高さ 50mm）に対する COD を計算した結果である。a)図には全体図が、b)図には低変位レベルの COD 計算結果が示されている。

ここで、R_ε は(2,4)式の p を全面降伏時のそれで除したもので、$R_\varepsilon = 1$ の時がリガメントが全て塑性域となった瞬間を表している。p は弾性状態においては外荷重を表しているが、全面降伏後は変位の指標と考えれば良い。純曲げ荷重下では、全面降伏後は中立軸がリガメント中央に固定され、仮想き裂先端が保持されることによりこの位置で固有変位が 0 となることから、き裂結合力モデルの COD が計算できることになる。この COD のプロファイルを見ると、Ingham が提案した回転中心の考え方[13]から得られる CTOD より若干高めのそれが与えられているように見れる。そしてマウス部近傍の COD を直線外挿して得られる実き裂先端位置（図の横軸 0.5 の位置）の COD よりも、き裂結合力モデルで得る CTOD はき裂結合力の影響で小さくなっている。

図 2.3 は図 2.2 から mouth COD と CTOD の関係を求めた結果であり、低荷重領域を除いて両者はほぼ線形関係にあることが分かる。現行規格においては、mouth COD から CTOD の換算時に荷重の関数となっているので、図 2.3 中に規格によるものを記載することが出来ないが、現行規格[14,15]による CTOD よりも大きな CTOD を与えている。

図 2.4 はき裂が試験片幅の 0.3 倍の場合について COD プロファイルを計算した結果である。図 3.2 と同様の結果が得られている。

破壊靭性試験では、疲労予き裂を導入した試験片を用いるので試験片毎にき裂長さが異なる。それに応じて図 2.3 と同様にして、クリップゲージ取付位置での COD と CTOD の関係を作成し、破壊発生時のクリップゲージ変位より限界 CTOD 値（破壊靭性値）を求めれば良い。溶接継手では、溶接部近傍は場所により硬さが異なるが、クリップゲージ変位から CTOD への換算に関しては母材の降伏点を使用することが慣行になっている。

2.1.2　CT 試験片に対するき裂結合力モデル

1.5 節(d)に示したように CT 試験片の x の位置におけるき裂面に集中荷重が作用した場合の K 値も、(2.1)式と同形式で表すことができる。ただし、$G(\chi,\alpha)$ は(1.55)式で与える。再記すれば、

$$\left.\begin{aligned}
&G(\chi,\alpha) = g_1(\alpha) + \chi g_2(\alpha) + \chi^2 g_3(\alpha) + \chi^3 g_4(\alpha)\\
&\quad g_1(\alpha) = 0.9510 + 5.430\alpha - 18.99\alpha^2 + 43.90\alpha^3 - 45.29\alpha^4 + 17.79\alpha^5\\
&\quad g_2(\alpha) = -0.3115 + 5.346\alpha - 40.67\alpha^2 + 88.48\alpha^3 - 90.43\alpha^4 + 34.59\alpha^5\\
&\quad g_3(\alpha) = 1.041 - 26.78\alpha + 128.5\alpha^2 - 279.2\alpha^3 + 279.2\alpha^4 - 106.9\alpha^5\\
&\quad g_4(\alpha) = -0.6702 + 14.37\alpha - 67.71\alpha^2 + 145.0\alpha^3 - 141.9\alpha^4 + 53.68\alpha^5
\end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

上式の $G(\chi,\alpha)$ と χ のの関係は図 1.13 に示されている。

CT 試験片では、曲げ荷重に加えて引張荷重も働く。リガメントに働く曲げ応力 σ_b と公称引張応力 σ_m は、

$$\left.\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{M}{z} = \frac{(w+c)P}{3(w-c)^2 t} \\ \sigma_m &= \frac{P}{(w-c)t}\end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

ただし、

M ：リガメントに働く曲げ応力

z ：断面 2 次モーメント

t ：板厚

P ：ピン部に働く荷重

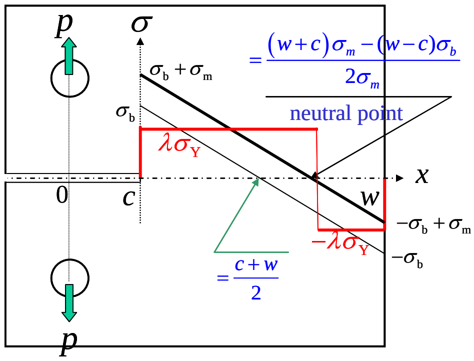


図 2.5　全面降伏時の CT 試験片のリガメント部に働く応力分布

図 2.5 には、CT 試験片に作用する公称応力分布を太実線で示し、公称曲げ応力分布を細実線で示している。また赤実線はリガメント部で全面降伏した瞬間の応力状態を表している。曲げ COD 試験片と異なり、引張応力も働くので中立軸はリガメント中央よりき裂先端前方の端部側に位置することになる。

仮想き裂先端では応力が無限大にならないことから、

$$K=\frac{2}{\sqrt{\pi a}}\left\{p\int_0^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)\left(-\frac{2\sigma_{b0}}{w}x+\sigma_{b0}+\sigma_{m0}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx\right.$$

$$\left.-\lambda\sigma_Y\int_c^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx\right\}=0 \quad (2.11)$$

ただし、σ_{b0},σ_{m0} は(3.5)式で $c=0$ としたときの曲げ応力と公称引張応力

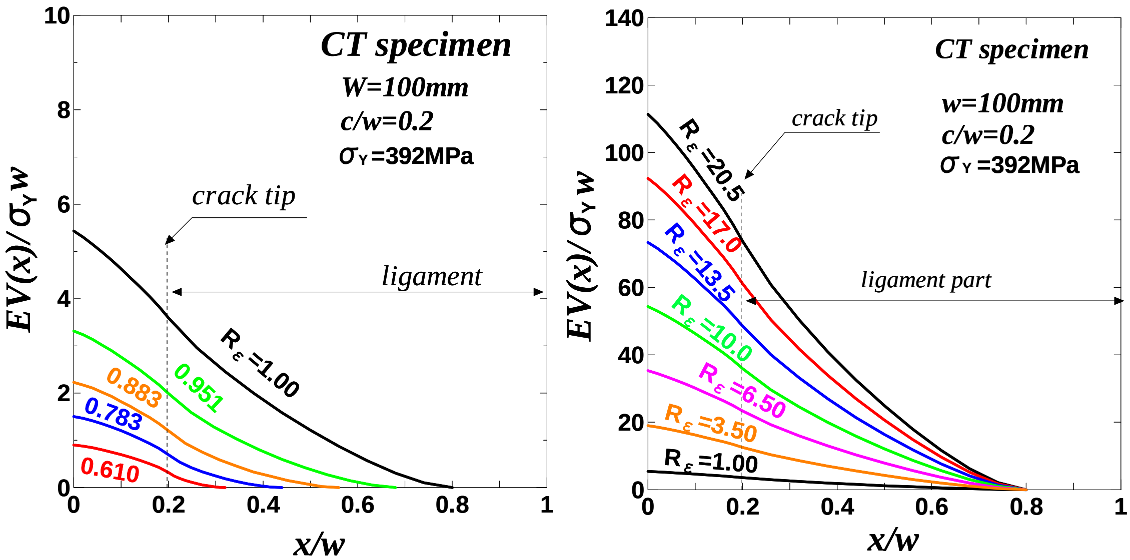
したがって、

$$p=\lambda\sigma_Y\int_c^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \Bigg/ \int_0^a \frac{G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)\left(-\frac{2\sigma_{b0}}{w}x+\sigma_{b0}+\sigma_{m0}\right)}{\left(1-\frac{a}{w}\right)^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx \quad (2.12)$$

そして、き裂開口変位は

$$
\begin{aligned}
V(x)=\frac{8}{\pi E'}\Biggl[\, & p\int_0^a\left(-\frac{2\sigma_{b0}}{w}x_i+\sigma_{b0}+\sigma_{m0}\right)dx_i\int_x^a\frac{G\left(\frac{x_i}{a},\frac{a}{w}\right)G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{a\left(1-\frac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}\,da \\
& -\lambda\sigma_Y\int_c^a dx_i\int_x^a\frac{G\left(\frac{x_i}{a},\frac{a}{w}\right)G\left(\frac{x}{a},\frac{a}{w}\right)}{a\left(1-\frac{a}{w}\right)^3\sqrt{\left\{1-\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}}}\,da\Biggr] \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

で表される。



a)　全面降伏前　　　　b)　全面降伏後

図 2.6　CT 試験体のき裂結合力モデルによる COD 計算結果（c/w=0.2）

図 2.6 には(2.13)式を用いて、CT 試験片の COD プロファイルを計算した例を示す。この場合もこれまでの CTOD 換算が小さく与えている傾向にあることを示している。

上記の結果より、曲げ COD 試験片と CT 試験片に関するき裂結合力モデルにより CTOD を定義すれば、現行規格の CTOD よりも大きな CTOD が得られ、構造要素中のき裂材の強度を妥当に評価できる可能性が期待できる。クリップゲージ変位から CTOD への変換は 3 点曲げ試験片と同様に行えば良い。

附録 4C に示したように、無限板中で任意の応力分布が作用する場で、き裂先端に生じる塑性域をき裂と仮想し、仮想き裂上下面間に働くき裂結合力が任意分布となっていても、仮想き裂先端での K 値が 0 であれば、仮想き裂先端で応力の連属性が保証されることから、任意応力分布に対してき裂結

合力モデルが成立するので、3 点曲げ試験片ならびに CT 試験片に対しても、上記のき裂結合力モデルが成立すると期待される。今後、純数学的に本節のモデルが成立することが証明される必要があろう。

なお、付録 4D を参考にすれば、(2.13)式の 2 重積分は容易に作成できる。

2.2 構造要素のき裂結合力モデルと弾塑性 FEM モデルの対比

高応力集中場に存在する表面き裂に対して、き裂成長に伴う外力、残留応力ならびにき裂結合力がそれぞれ単独に働く場合の最深部の K 値を求めておけば、図 1.4 に示す流れで仮想き裂先端位置 $\tilde{a}$ と最深部の K 値を再現する *EDS* が得られ、(1.26)式（したがって(1.31)式）から表面き裂最深部を含む板断面上の COD が求められる。そして、実き裂先端位置における COD が CTOD となる。このように、本モデルでは CTOD だけでなく、実き裂部のプロファイルも得られ、マウス COD など計測容易な箇所の COD が得られるので、安全率などの設定が論理的に行える。

また、対象とする表面き裂の大きさに成長する経路は無数にある。すなわち経路によりき裂成長に伴うき裂最深部の K 値変化が異なり等価分布応力が変化するので、COD も微妙に変化することになる。き裂前方に塑性域が形成され、それが COD に大きな影響を与えるので、1 章はまさに塑性問題を取り扱っている。塑性問題では弾性問題と異なり、経路依存性が存在するのは当然のことである。しかし、対象とする表面き裂が高応力集中場から発生し、そのアスペクト比が自然な形で変化する場合のき裂最深部の K 値を再現する等価分布応力が与えられる場合には、得られる COD はどの経路をたどったとしてもあまり大きな違いは生じないことが期待される。種々の問題について、弾塑性 FEM 解析を行い、本節の妥当性を検証していくことが今後必要である。

上記の検討により、具体的に遷移域がどの領域となるのかや、その塑性拘束係数の大きさが設定できると考えられる。

なお、弾塑性 FEM 解析での経路依存性は収束計算の順序に関わる問題である。すなわち表面き裂の場合には、き裂最深部から表面に向かって順次収束させるか、き裂前縁に沿って K 値の高いところから順に収束させるのかといった経路依存が存在する。

3. 疲労寿命評価

3.1 初期せん断き裂状態における寿命評価

3.1.1 最初の結晶粒内を成長する間のき裂成長曲線の推定（き裂発生寿命）

処女材が繰返し負荷を受けると、固執辷り帯⊗が形成され、それに沿って、せん断き裂が発生・伝播する。固執辷り帯が形成されたり、き裂が発生・伝播するためには、塑性仕事が繰返してなされな

⊗ 試験片表面に生じた辷り線は、薄く切削して研磨すると消えるが、前回と同様の負荷をかけると同じ箇所にまた辷り線が観察される。このことから固執辷り帯と呼ばれている。

ければならない。古典的塑性学 [16]によれば降伏点レベルの一定振幅荷重（最大荷重時に引張降伏が始まり、最小荷重時に圧縮降伏が開始し出す振幅荷重）を繰返し与えると、第 1 サイクル目の最大荷重時に引張塑性域、最小荷重時に圧縮塑性域が生じても、第 2 サイクル目以降は除荷弾性域での挙動となり、塑性仕事はなされない。しかし、実際には疲労限以下の弾性応力振幅下であっても、一定振幅負荷を繰返し作用させると、ある繰返し数に達すると、塑性ひずみが突然出現しその増分は繰返しとともに大きくなる [17]。そして、ある大きさの塑性ひずみ増分に達すると、1 サイクルでの塑性ひずみ増分はほぼ一定になる。そこでは繰返し荷重振幅が大きくなる程、塑性ひずみが出現しだす時点は早くなり、上記のほぼ一定となる塑性ひずみ増分も大きくなる [17]（第 3 編 4.3 節参照）ことが判明している。

巨視的に弾性状態が保持されている一定荷重振幅下で上記現象が生じていることから、2 サイクル目以降も塑性ひずみは形成されるが、初期段階では 1 サイクルで生じる塑性ひずみ増分は非常に小さく、通常のゲージでは捉えられないだけのことであろう。

上記のように、一定荷重振幅下においてあるサイクルから塑性ひずみ振幅が増加しだす現象は、見掛上繰返し負荷に応じて、圧縮降伏点から引張降伏点に至る応力範囲が除々に減少することに対応する。古典的塑性学での降伏面（これを非古典塑性学では正規降伏面と呼んでいる）より内側にも降伏面に相当する負荷面が存在するという下負荷面理論が橋口により提唱され [18,19]、被害関数を導入した下負荷面理論によって、上記繰返し負荷に伴う塑性ひずみ振幅変化のシミュレートに成功している [20]が、丸棒での解析でも 1case につき 1 週間程度の CPU が必要（最近のパソコンを使って）で、この現象までも忠実に再現して疲労き裂発生・成長曲線を推定することは現時点では実用的でない。

4.4 節に示されているように下負荷面理論による新弾塑性モデルの構成関係を組込んだ FEM で切欠材に引張側完全片振りの一定振幅荷重を与えた場合に、繰返しが進行しても最大荷重時での塑性ひずみ領域はほんの少ししか発展せず殆ど一定であるが、最小荷重時には繰返しとともに圧縮側塑性ひずみは大きく成長し、その領域も拡大している。すなわち、切欠材にある大きさ以上の一定振幅繰返し荷重が作用すると、最大荷重で引張塑性域、最小荷重で圧縮塑性域が現われるが、その大きい方の塑性域は極僅かしか発達しないが、小さい方の塑性域はサイクル数とともに大きく発達することになる。したがって、両者が重なる繰返し塑性域はサイクル数とともに大きく発達するが、大きい方の塑性域（仮想き裂に対応している）は極僅かしか発達しない。この塑性域の発達現象は当然き裂成長寿命に影響を与える。しかし、上記で説明したようにこの現象をシミュレートするには膨大な時間を要する。

そこで安全側という観点から、せん断き裂が最初の結晶粒界に到達するまでは、いきなり繰返し降伏点にまで低下した状態での塑性域が形成され、形成された繰返し塑性域寸法に応じて疲労き裂が成長する。そして、せん断き裂が最初の結晶粒界を越えてき裂開口モードが出現しだしてからは、せん

断き裂状態で形成された繰返し塑性域先端位置あるいは仮想き裂先端位置が保持されるように引張あるいは圧縮降伏点はそれぞれの静的降伏点に向かって回復し、繰返し塑性域先端位置あるいは仮想き裂先端位置が成長し出すのは、各々が静的降伏点にまで完全に回復してからであるというアルゴリズムが提案されている。

すなわち一定荷重振幅下で疲労き裂が入る状態では、1 サイクル毎に繰返し塑性域（1 サイクルにおいて最大荷重時の引張と最小荷重時の圧縮の塑性域が重なる領域は、繰返し塑性域先端が切欠底から離れる方向に）は成長するが、いきなり繰返し降伏点で規定される塑性域が 1 サイクル目から生じ、最初の結晶粒内を進む間は、過去の履歴の影響を受けずに、荷重振幅と繰返し降伏点で規定される繰返し塑性域が形成されると仮定して、繰返し塑性域寸法 $\tilde{\omega}$ を大きく見積もり、安全側の寿命が推定されるように設定されている。ただし、繰返し応力振幅が降伏点の 8 割程度となると、塑性ひずみ増分が大きくなるため、非常に早く繰返し降伏点にまで低下していることと、下負荷面理論を組み込んだ構成関係を有する片側切欠付帯板の非線形 FEM による応力解析結果 [21]（4.4 節参照）や、これまでに行われた疲労実験に対する旧 FLARP を適用した解析結果 [22]から、上記取扱いによる寿命が大幅に短くなることはないことが期待される。

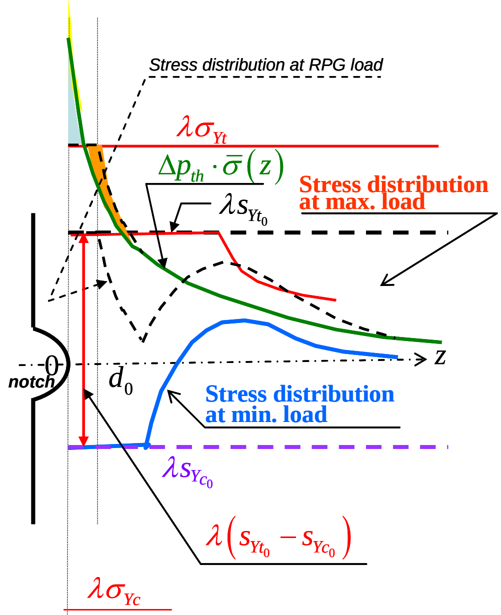


図 3.1 最大・最小荷重時の切欠線に沿う作用応力分布ならびに引張降伏（RPG）する瞬間の状況（点線は RPG 荷重時の応力分布）

本節では切欠底などの高応力集中場における疲労き裂発生・成長問題を対象にする。図 3.1 は切欠材に繰返し負荷が作用する場合について、き裂が入る前の最大荷重時ならびに最小荷重時の切欠線上の応力分布と、最小荷重時から負荷されて切欠底に接する結晶粒（粒径 d_0（機械切欠の場合は結晶粒径の 1/2[⊕]））が降伏する瞬間の応力増分分布を示している（緑色実線：弾完全塑性体と仮定）。

均質材で切欠底から 1 結晶粒進展したせん断き裂前方に形成される繰返し塑性域寸法 $\tilde{\omega}_S$ は（5.1 節参照）、

$$\tilde{\omega}_S=\frac{1.55\pi}{8}\left\{\frac{U_S\cdot\Delta K_S}{\lambda\left(\varsigma_{t_0}\sigma_{Yt}-\varsigma_{c_0}\sigma_{Yc}\right)}\right\}^2$$

⊕ 機械加工では結晶粒内も切断される。結晶は球体の形状をしているので、切欠底から最初の結晶粒界までの距離は平均的には結晶粒径の 1/2 になる。

$$=\frac{1.55\pi}{8}\left\{\frac{U_S\cdot\Delta K_S}{\lambda\left(s_{Yt_0}-s_{Yc_0}\right)}\right\}^2=\frac{1.55\pi}{8}\left\{\frac{U_S\cdot\Delta K_S}{\lambda\bar{\varsigma}_0\left(\sigma_{Yt}-\sigma_{Yc}\right)}\right\}^2 \tag{3.1}$$

ただし、

ΔK_S：き裂が最初の結晶粒界に達した時点のき裂最深部の応力拡大係数範囲（半楕円表面き裂）

U_S：最初の結晶粒内を進展するき裂に対する有効荷重比

λ：塑性拘束係数

σ_{Yt}：引張側静的降伏点

σ_{Yc}：圧縮側静的降伏点（符号はマイナス）

$\bar{\varsigma}_0$：繰返し負荷時の弾性応力範囲の収斂値と静的弾性応力範囲の比

ς_t：引張側繰返し降伏点減少係数（繰返し引張側降伏点と静的引張側降伏点の比＝s_{Yt}/σ_{Yt}、この収斂値はς_{t_0}）

ς_c：圧縮側繰返し降伏点減少係数収斂値（繰返し圧縮側降伏点と静的圧縮側降伏点の比＝s_{Yc}/σ_{Yc}。この収斂値はς_{c_0}）

s_{Yt}：繰返し荷重下での引張側降伏点(この収斂値をs_{Yt_0}とする)

s_{Yc}：繰返し荷重下での圧縮側降伏点(この収斂値をs_{Yc_0}とする)

ここで、

$$\bar{\varsigma}_0=\frac{s_{Yt_0}-s_{Yc_0}}{\sigma_{Yt}-\sigma_{Yc}} \tag{3.2}$$

は、0.55とすることで、疲労き裂発生寿命が妥当に与えられていた（3編参照）。$\bar{\varsigma}_0$は材料定数であり、丸棒試験片に引張・圧縮の繰返し負荷を与えて、ヒステリシスループを計測することで得られる。

疲労被害が蓄積する1サイクルでは、最小荷重時には少なくとも切欠底に接する結晶粒内は圧縮降伏しており、最大荷重時にもこの結晶粒界を超えて引張塑性域が形成されている。せん断き裂が最初の結晶粒界を越えるまでは、引張荷重をき裂面で分担するので、最小荷重から引張塑性域が形成される瞬間の荷重までの荷重増分Δp_{th}は、単位外力による切欠底近傍での作用応力を、

$$\bar{\sigma}(z)=\bar{\alpha}z^3+\bar{\beta}z^2+\bar{\gamma}z+\bar{\delta} \tag{3.3}$$

ただし　z：切欠底を原点とする座標（図3.1参照）

とすると、仮想き裂が引張降伏して形成されている場合は、図3.1を参照して、

$$\int_0^{d_0}\left[\Delta p_{th}\bar{\sigma}(z)-\lambda\bar{\varsigma}_0\left(\sigma_{Yt}-\sigma_{Yc}\right)\right]dz=0 \tag{3.4}$$

(3.3)式と(3.4)式より、

$$\Delta p_{th}=\frac{12\bar{\varsigma}_0\left(\sigma_{Yt}-\sigma_{Yc}\right)}{3\bar{\alpha}d_0^3+4\bar{\beta}d_0^2+6\bar{\gamma}d_0+12\bar{\delta}}\lambda \tag{3.5}$$

なお(3.4)式では、d_0は小さいため$\left[0,d_0\right]$間の作用応力は(3.3)式のように1つだけの3次方程式で表現

できるとして定式化されている。

そこで、次のサイクルにおける最大荷重 $p_{\max}$ が $p_{\max} < p_{\min} + \Delta p_{th}$（ただし $p_{\min}$ ：現時点の最小荷重）となる場合や、最小荷重 $p_{\min}$ が $p_{\min} > p_{\max} - \Delta p_{th}$ となる場合には、このサイクルは疲労き裂成長に寄与しないので、図 3.2 に示す取扱いにより、常に進展をもたらす荷重対による荷重履歴に置換える。置換えた最小荷重と最大荷重の対（実効荷重対と呼ぶ）を $\left[p_{\min k}, p_{\max k}\right]$（$k$ 番目の実効荷重対サイクル）とする（図 3.3 参照）と、この荷重対によるき裂が最初の結晶粒界に達した時点のき裂最深部の応力拡大係数範囲 ΔK_{S_k} は、

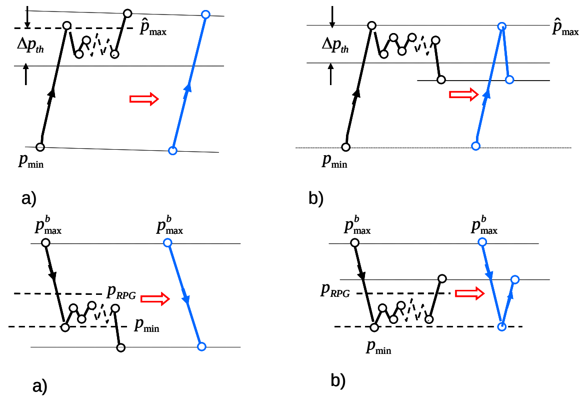


図 3.2 常に新き裂破面を形成させる荷重サイクルへの変換

$$\Delta K_{S_k} = \left(p_{\max_k} - p_{\min_k}\right) g\left(d_0\right) = \Delta p_k g\left(d_0\right) \tag{3.6}$$

ただし　$g\left(d_0\right)$ ：切欠底に存在する結晶の粒界までの距離を半径とする表面き裂に単位荷重が作用した場合のき裂最深部における応力拡大係数

Δp_k ： k 番目の実効荷重振幅

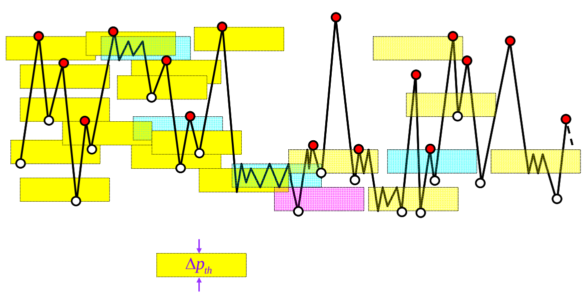


図 3.3 き裂進展に寄与する荷重対（実効荷重対）の抽出（白丸と赤丸（着目する白丸出現後最も近く現れる赤丸）との荷重対）

この k 番目の荷重対で生じる $\tilde{\omega}_S$ を $\tilde{\omega}_{S_k}$ とする。また、き裂が最初の結晶粒内を進展している間はせん断き裂であり、負荷サイクル中き裂は閉じたままである。したがって、引張応力もき裂面で伝達され、き裂による応力の再配分が生じないと仮定できる。この場合、RPG 荷重（負荷過程で引張塑性域が成長しだす瞬間の荷重）は、 $p_{RPG} = p_{\min} + \Delta p_{th}$ となる。すなわち有効荷重比は、

$$U_{S_k} = \frac{p_{\max_k} - p_{RPG_k}}{\Delta p_k} = 1 - \frac{\Delta p_{th}}{\Delta p_k} \tag{3.7}$$

ただし、

p_{RPG_k} ： k 番目の実効荷重対に対する RPG 荷重

したがって、 k 番目の実効荷重対による繰返し塑性域寸法は、(3.1)式, (3.5)式ならびに(3.7)式より、

$$\tilde{\omega}_{S_k} = \frac{1.55\pi}{8}\left\{\frac{\left(\Delta p_k - \Delta p_{th}\right) g\left(d_0\right)}{\lambda\bar{\varsigma}_0\left(\sigma_{Yt} - \sigma_{Yc}\right)}\right\}^2 \tag{3.8}$$

この繰返し塑性域は結晶粒径 d_0 を半径とする半円形の表面き裂底に形成されるので、繰返し塑性域先端位置が求まり、RPG 規準による等価応力拡大係数範囲は

$$\left(\Delta K_{RPG}\right)_{eq_k} = \lambda \bar{\varsigma}_0 \left(\sigma_{Yt} - \sigma_{Yc}\right) \sqrt{\frac{8}{1.55\pi}\left(d_0 + \tilde{\omega}_{S_k} - c_{k-1}\right)} \tag{3.9}$$

ただし、c_{k-1} ：現時点におけるき裂長さ（$0 \le c_{k-1} < d_0$）

となる。したがって、k 番目の荷重対によるき裂成長量 Δc_k は、

$$\Delta c_k = C\left\{\left(\Delta K_{RPG}\right)_{eq_k}\right\}^m \cdot \Delta N_k \tag{3.10}$$

ただし、C, m ：RPG 規準によるき裂伝播則の定数

ΔN_k ：k 番目の実効荷重対のサイクル数（ランダム荷重では１）

となり、

$$c_k = c_{k-1} + \Delta c_k \tag{3.11}$$

ただし、$c_0 = 0$

から、k 番目の実効荷重対が作用した後に c_k までき裂が伝播することになる。

すなわち、(3.6)式～(3.11)式を繰り返すことで、最初の結晶粒内でのせん断き裂のき裂成長曲線を求めることができる。この取扱いを $c_k \ge d_0$ となるまで続けることで、き裂が最初の結晶粒界に達するまでのき裂成長曲線（き裂発生寿命と定義することも出来る）が得られる。

なお、(3.6)式の ΔK_{S_k} は、切欠底から最初の結晶粒界までの距離を半径とする半円表面き裂に k 番目の実効荷重対が作用する場合のき裂最深部の応力拡大係数範囲である。き裂は非常に浅いため、き裂面における作用応力振幅分布は深さ方向には線形でかつ幅方向には一様とみなすことができるので、それより見掛けの引張応力振幅 $\Delta\sigma_t$ と曲げ応力振幅 $\Delta\sigma_b$ を求め（き裂が深くなってからの K 値近似法である図 1.28 の近似法とは異なることに注意）、(1.81)式の σ_t と σ_b に代入することで求められる。また、降伏点はせん断き裂が最初の結晶粒界に達するまでは、繰返し荷重下の降伏点のまま保持されると仮定した取扱いがなされている。

3.1.2　き裂開口モード出現直前の固有変位分布を与える有効荷重対

切欠底からせん断き裂が発生して、最初の結晶粒界に達するまでは、き裂自身による応力再配分が生じないため（き裂は開口しないので)、繰返し塑性域寸法は荷重振幅に対応する応力変化の分布のみでほぼ近似できる。そして 5 章に示したように前歴の影響を無視することが出来、3.1.1 の取扱いでき裂成長曲線を、定量的に妥当に評価できている。

すなわち、3.1.1 項に示したように、長いき裂における ΔK_{RPG} と繰返し塑性域寸法 $\tilde{\omega}$ の関係がせん断き裂状態でも成立し、せん断き裂は常にき裂が閉口したままであるため実き裂部も引張荷重を分担

するとした取扱いで最初の結晶粒内での疲労き裂成長曲線がこれまで妥当に推定されてきた（第３編参照）。さらに結晶粒内では、転位の運動を遮る障害物が通常ないため、最初の結晶粒界にき裂が達する時点では半円形表面き裂になっていると仮定されている⊗。上記より、繰返し塑性域先端位置が求められる。この時点での 3.1.1 項で用いる応力は 3 次元物体に働いている想定き裂に対する垂直応力である（等価分布応力（*EDS*）ではないことに注意）。

せん断き裂が最初の結晶粒界を超えてき裂開口モードが生じ始めると、き裂自身による応力再配分が生じるので、繰返し塑性域寸法を求めるには、き裂結合力モデルなどを用いる必要がある。き裂結合力モデルはき裂が存在しない切欠底などの応力集中場でも成立し、仮想き裂部の COD が得られる。この仮想 COD は活固有変位であることが判明している [23]。なお活固有変位に作用している応力が取り除かれると固有変位となる。

すなわち、き裂自身による応力再配分が生じないせん断き裂状態でのランダム荷重下における固有変位分布の生成・変化挙動について考える。大きな引張荷重 p_1 により塑性域が発達し、塑性域の先端が図 3.4 の A 点まで発達したとする。

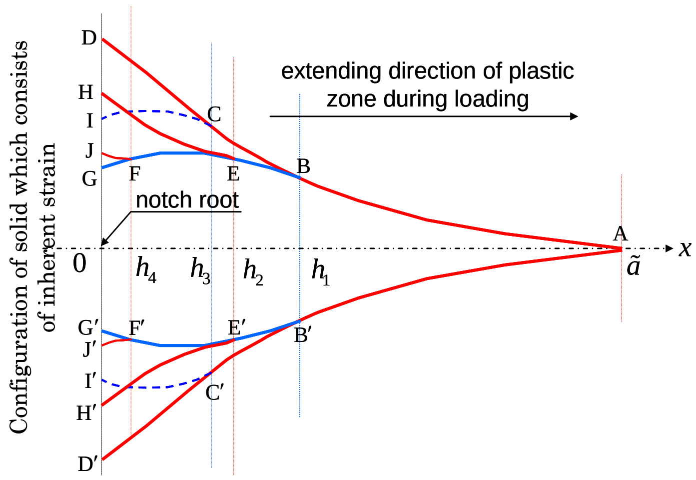


図 3.4 ランダム荷重下における固有変位の変化（模式図）

ここでは、せん断き裂が最初の結晶粒界に到達するまでは、最大荷重時もしくは最小荷重時に、塑性域が図 3.4 の A 点を超えることはない場合を考える。$x=0\ (\tilde{x}_0=0)$ が切欠底位置に対応している。この時生じる固有変位は図 3.4 では DBAB'D'となる。次に最小荷重（p_2）時圧縮塑性域が $[0,h_1]$ 間（ここで $h_1<\tilde{a}$）に生じたとすると、この間だけ固有変位が変化し、固有変位分布は GEBAB'E'G'となる。次の最大荷重（p_3）時 $[0,h_2]$ 間が引張降伏すると、固有変位分布は HEBAB'E'H'と変化する。他方、最小荷重 p_2 が作用した直後 p_3 より小さい最大荷重が作用し、$[0,h_4]$ 間が引張降伏した場合、固有変位は JFEBAB'E'F'J'となる。その後 p_3 なる最大荷重が作用し $[0,h_2]$ 間が降伏した場合に現れる固有変位分布は HEBAB'E'H'となり、p_2 による固有変位の履歴は消滅する。このことから分かるように 1 サイクル中き裂閉口が生じ、き裂部で引張応力を受持つせん断き裂の状態では、引張もしくは圧縮の塑性域が仮想き裂先端位置を越えて発達する場合には、固有変位には過去の荷重履歴の影響が完全に残ら

⊗ 多点から生じた疲労き裂が成長・合体を繰返す区間（例えば図 8.8 の①～②間）での仮想単独表面き裂のアスペクト比変化データの収集には、非常に緻密な実験が必要で、現時点ではデータ収集は不十分である。安全側評価という観点からは、この区間を除いた合体完了後のき裂深さ～アスペクト比関係をき裂深さ 0 まで外挿したき裂最深部の K 値でき裂発生寿命を評価する手法も成立する。この場合は、最初の結晶粒界に達した時の K 値は、偏平な表面き裂として取扱うことになり、き裂発生寿命が短寿命側に評価される。

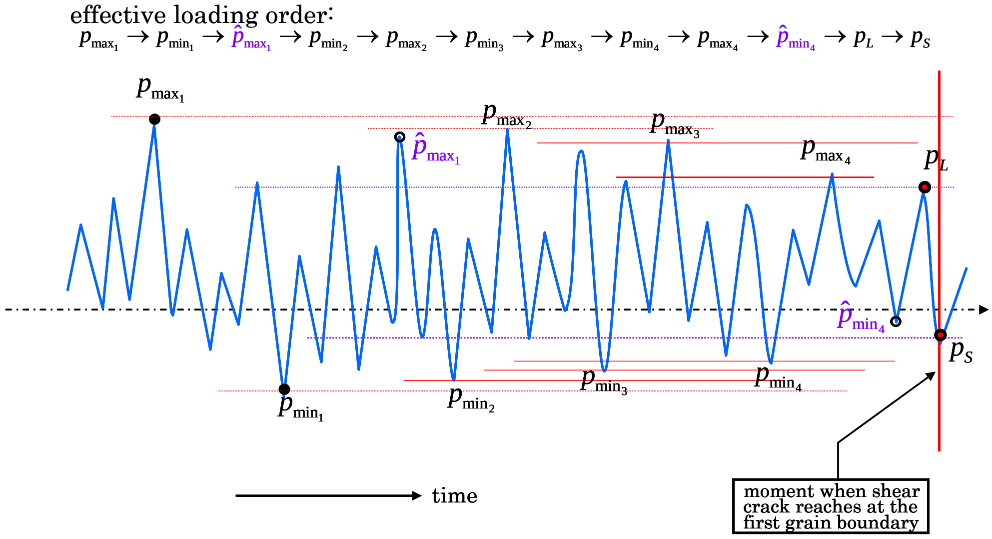


図 3.5 せん断き裂が最初の結晶粒界を越えた瞬間に生じている固有変位を求めるための荷重対の抽出

なくなる。

せん断き裂が最初の結晶粒界を超えた瞬間の最小荷重を p_S、そしてその直前の最大荷重を p_L とする。図 3.5 に示すように、$[p_L, p_S]$ の外に位置する荷重を抽出し、最大荷重のうちで最大のものを $p_{\max_1}$、最小荷重のうちで最小のものを $p_{\min_1}$ とする。$p_{\max_1}$ が現れてから p_L が生じるまでの間で最大の最大荷重を $p_{\max_2}$ というように、順次 $p_{\max_{i-1}}$ が現れてから p_L が生じるまでの間で最大の最大荷重を $p_{\max_i}$ とする。また $p_{\min_{i-1}}$ が現れてから p_S が生じるまでの間で最小の最小荷重を $p_{\min_i}$ とする。

上記のように荷重対を抽出しその順序で負荷された場合、最大荷重と最小荷重が交互に現れている区間では、仮想き裂先端を形成した荷重（$p_{\max_1}$ あるいは $p_{\min_1}$）を除いて、圧縮塑性域先端と引張塑性域先端は、常にマウス側にしか移動しないため、その前方に現れている固有変位は過去の履歴を残したままとなり、正解を与えることになる。しかし、上記にように抽出された最大荷重 A、B 間で、2 つの最小荷重 C,D が現われる場合（図 3.5 の例では A が $p_{\max_1}$、B が $p_{\max_2}$、C が $p_{\min_1}$、D が $p_{\min_2}$）、C と D 間で現われる最大荷重（図 3.5 の例では $\hat{p}_{\max_1}$）を追加するというような配慮をすれば常に後に現れる荷重による固有変位の変化に影響を受けないように出来る（以後このようにして抽出された荷重を”有効荷重”と呼ぶ）。

これらの荷重を抽出して、出現順序に並べ替えられた有効荷重を求める手順は以下のようになる。

(1) せん断き裂が最初の結晶粒界を超えた直後の最小荷重 p_S とその直前の最大荷重 p_L を選ぶ。

(2) p_L が現れるまでの期間で最大荷重のうち最大のものを $p_{\max_1}$ とする。

(3) $p_{\max_i}$（$i=1,\tilde{n}$、$p_{\max_{n+1}} = p_L$）が生じてから p_L が現れるまでの期間で最大荷重の最大のものを $p_{\max_{i+1}}$ とする（これを $i=1,\tilde{n}$ まで繰り返す）。

(4) p_S が現れるまでの期間で最小荷重のうち最小のものを $p_{\min_1}$ とする。

(5) $p_{\min_i}$（$i=1,\tilde{m}$、$p_{\min_{m+1}} = p_S$）が生じてから p_S が現れるまでの期間で最小荷重のうち最小の

ものを $p_{\min_{i+1}}$ とする（これを $i=1,\tilde{m}$ まで繰り返す)。

(6) 上記で抽出した最大荷重 $p_{\max_i}$ （$i=1,\tilde{n}$）と最小荷重 $p_{\min_i}$ （$i=1,\tilde{m}$）を一緒にして出現順序順に並べる。

(7) $p_{\min_i}$ と $p_{\min_{i+1}}$ の間に最大荷重 $p_{\max_j}$ が存在しなければ、この期間内の最大荷重を $p_{\max_i}$ とし、(3)で得た最大荷重群に組み込み、これより後に出現する最大荷重を $p_{\max_{i+1}}$ と順次繰り下げる。そして、$\tilde{n}\to\tilde{n}+1$ とする。

(8) $p_{\max_i}$ と $p_{\max_{i+1}}$ の間に最小荷重 $p_{\min_j}$ が存在しなければ、この期間内の最小荷重を $p_{\min_i}$ とし、(5)で得た最賞荷重群に組み込み、これより後に出現する最大荷重を $p_{\min_{i+1}}$ と順次繰り下げる。そして、$\tilde{m}\to\tilde{m}+1$ とする。

(9) 上記のようにして最大荷重と最大荷重が交互に出現するよう並べ替えられた荷重を改めて $p_{\max_i}$、 $p_{\min_i}$ とする。（全個数 $\tilde{n}+\tilde{m}$）

したがって、前項 3.1.1 によるき裂成長計算で c_k が結晶粒径 d_0 を超えるまでに出現したピーク荷重について、上記の並び替えを行い、この順序でピーク荷重時の COD を求め、弾性成分を除いた変位（固有変位 $L(x)$）が得られる。そしてこの $L(x)$ は、x の位置で塑性にならない限り保持されるとして、次の有効荷重における COD と固有変位を求めていけば、せん断き裂が最初の結晶粒界を越えた瞬間の最小荷重時の固有変位分布を求めることができる。

なお、図 3.4 の DBAB'D'に相当する荷重は $p_{\max_1}$ か $p_{\min_1}$ であるが、それを選別する必要がある。$p_{\max_1}>0$ で $p_{\min_1}\ge 0$ の場合、$p_{\max_1}$ がその荷重となる。その反対に $p_{\max_1}\le 0$ で $p_{\min_1}<0$ の場合は、$p_{\min_1}$ がその荷重となる。しかし、 $p_{\max_1}>0$ で $p_{\min_1}<0$ の場合には次項により、各々による $\tilde{a}$ を求め、両者の内、大きい方の荷重がその荷重となる。両者が同じ $\tilde{a}$ となれば、後に現われた荷重がその荷重となる。

また、以下では引張降伏により形成された仮想き裂を引張型仮想き裂、圧縮降伏によるものを圧縮型仮想き裂と呼ぶ。

3.1.3 き裂開口モードが出現する時点の固有変位分布

a) 仮想き裂内で最も大きな繰返し塑性域が生じた瞬間の COD

2 章では、準静的荷重下での問題を対象としていたが、ここでは繰返し負荷の問題を取扱うので、単位外力が作用する場合に対しての $\left(\tilde{a}_i,\hat{K}_i\right)$ 点群から求められる *EDS* の各係数（(1.3)式および(1.4)式参照）を、$\hat{\kappa}^{(uP)}$ ならびに $\hat{\alpha}_i^{(uP)},\hat{\beta}_i^{(uP)},\hat{\gamma}_i^{(uP)},\hat{\delta}_i^{(uP)}\ (i=2,n)$ とする。また無次元化したき裂結合力に対しての *EDS* の各係数（1.2 節参照）を、$\hat{\kappa}^{(Y)}$ ならびに $\hat{\alpha}_i^{(Y)},\hat{\beta}_i^{(Y)},\hat{\gamma}_i^{(Y)},\hat{\delta}_i^{(Y)}\quad(i=2,n)$ とする。したがって、引張側き裂結合力の *EDS*（$\phi^{(tY)}(x)$）は(1.3)式および(1.4)式を参照すると、

$$\phi^{(tY)}\left(x\right)=\varsigma_t\sigma_{Yt}\begin{Bmatrix}\hat{\kappa}^{(Y)}/x^p \\ \hat{\alpha}_i^{(Y)}x^3+\hat{\beta}_i^{(Y)}x^2+\hat{\gamma}_i^{(Y)}x+\hat{\delta}_i^{(Y)}\end{Bmatrix}\qquad \begin{matrix}(0=\tilde{x}_0<x\le\tilde{x}_1)\\(\tilde{x}_{i-1}\le x\le\tilde{x}_i)\end{matrix} \tag{3.12}$$

ここで、 p は定数で $0<p<1$

また、圧縮側き裂結合力の *EDS*（$\phi^{(cY)}\left(x\right)$）は

$$\phi^{(cY)}\left(x\right)=\varsigma_c\sigma_{Yc}\begin{Bmatrix}\hat{\kappa}^{(Y)}/x^p \\ \hat{\alpha}_i^{(Y)}x^3+\hat{\beta}_i^{(Y)}x^2+\hat{\gamma}_i^{(Y)}x+\hat{\delta}_i^{(Y)}\end{Bmatrix}\qquad \begin{matrix}(0=\tilde{x}_0<x\le\tilde{x}_1)\\(\tilde{x}_{i-1}\le x\le\tilde{x}_i)\end{matrix} \tag{3.13}$$

せん断き裂が最初の結晶粒界に到達した時点で、仮想き裂が引張塑性ひずみで形成されている場合と圧縮塑性ひずみで形成されている場合がある。そこでまず、せん断き裂が最初の結晶粒界に到達するまでに最も大きく成長した仮想き裂と、その領域内で最も大きく成長した繰返し塑性域が生じた直後に形成される固有変位分布を求めるためのアルゴリズムを、引張型仮想き裂が形成される場合と圧縮型仮想き裂の場合に分けて説明する。

① 引張型仮想き裂が生成された場合

$P_{\max_1}$ で仮想き裂が形成される場合を考える。$P_{\min_1}$ が $P_{\max_1}$ より前に現われる場合、$P_{\min_1}$ による塑性域は $P_{\max_1}$ による塑性域によって完全に消滅する。したがってこの場合は、3.1.2 で求められた $P_{\min_i}$ を $P_{\min_{i-1}}$ に置き換える。

切欠付処女材が繰返し負荷を受け、負荷とともに引張塑性域が十分成長し、$P_{\max_1}$ 時に $\tilde{a}_t$ まで引張塑性域が発達したとすると、(1.20)式より、

$$P_{\max_1}\hat{\Theta}^{(uP)}\left(\tilde{a}_t\right)+\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}_t\right)-\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a}_t,0\right)=0 \tag{3.14}$$

ここで ς_t ：繰返し負荷による引張側降伏点減少係数（収斂値を ς_{t_0} とする。き裂が最初の結晶粒界に達するまでは ς_t は ς_{t_0} となっていると仮定）。

が成立する。ただし、$\Theta^{(R)}$ は(1.18)式で表される。また(1.17)式および(1.19)式を参照して、$\hat{\Theta}^{(uP)}$ 、$\hat{\Pi}^{(Y)}$ はそれぞれ以下のようになる。

$$\hat{\Theta}^{(uP)}\left(\tilde{a}\right)=\frac{\hat{\kappa}^{(uP)}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{x_j^p\sqrt{1-\left(x_j/\tilde{a}\right)^2}}$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\left[\hat{\alpha}_i^{(p)}\left\{\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2\right)^{3/2}}{3}-\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2\right)^{3/2}}{3}-\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right\}\right.$$
$$+\hat{\beta}_i^{(p)}\left\{-\frac{\tilde{x}_i\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}}{2}+\frac{\tilde{x}_{i-1}\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right\}$$

$$+\hat{\gamma}_i^{(P)}\left(-\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right)+\hat{\delta}_i^{(p)}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\Bigg] \tag{3.15}$$

$$\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)=\frac{\hat{\kappa}^{(Y)}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)D}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{x_j^p\sqrt{1-\left(x_j/\tilde{a}\right)^2}}$$
$$+\sum_{i=\bar{m}}^{n}\Bigg[\hat{\alpha}_i^{(Y)}\left\{\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2\right)^{3/2}}{3}-\frac{\left(\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2\right)^{3/2}}{3}-\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\tilde{a}^2\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right\}$$
$$+\hat{\beta}_i^{(Y)}\left\{-\frac{\tilde{x}_i\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}}{2}+\frac{\tilde{x}_{i-1}\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\right\}$$
$$+\hat{\gamma}_i^{(Y)}\left(-\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_i^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{x}_{i-1}^2}\right)+\hat{\delta}_i^{(Y)}\left(\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{a}}-\sin^{-1}\frac{\tilde{x}_{i-1}}{\tilde{a}}\right)\Bigg] \tag{3.16}$$

ただし　D や重み w_j ならびに分点 x_j などは(1.27)式参照

ここで、(3.16)式から分かるように(3.14)式では $\tilde{c}=0$ としている。すなわち、せん断き裂のため、き裂面でも引張応力を分担すると仮定している。ς_{t_0} が既知ならば、(3.14)式は、図 1.4 と同様の流れにより解くことができる。しかし、繰返し負荷時の降伏点の低下は一様応力下（丸棒引張圧縮試験片）の繰返し試験で得られる $\bar{\varsigma}_0$ （(3.2)式参照）であり、ς_{t_0} （当然圧縮降伏点に関する ς_{c_0} も）は応力分布によって変化する。

(3.14)式が成立する場合に得られる各 *EDS* の各係数を用いると、(1.31)式を参照して COD（$V\left(b\right)$）が次式で与えられる（ただしここでは $\varsigma_t\to\varsigma_{t_0}$ ）。

$$V\left(b\right)=P_{\max_k}\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}_t\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}_t\right)-\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,0,\tilde{a}_t,\tilde{a}_t\right) \tag{3.17}$$

ここで、$\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)$, $\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)$, $\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,x_S,x_L,\tilde{a}\right)$ は、(1.28)〜(1.30)式を参照して

$$\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)=\frac{4\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)\hat{\kappa}^{(uP)}}{\pi E'}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{2x_j^p}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right|\right\}$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\left\{\hat{\alpha}_i^{(uP)}G_3\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\hat{\beta}_i^{(uP)}G_2\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\hat{\gamma}_i^{(uP)}G_1\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\right.$$
$$\left.+\hat{\delta}_i^{(uP)}G_0\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\right\} \tag{3.18}$$

$$\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)=\frac{4\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)\kappa^{(R)}}{\pi E'}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{2x_j^P}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right|\right\}$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left\{\alpha_i^{(R)}G_3\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\beta_i^{(R)}G_2\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\gamma_i^{(R)}G_1\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\delta_i^{(R)}G_0\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\right\} \tag{3.19}$$

$$\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,x_S,x_L,\tilde{a}\right)=\frac{4\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0\right)\hat{\kappa}^{(Y)}}{\pi E'}D\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{2x_j^P}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right)-\ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right|\right\}$$
$$+\sum_{i=\bar{m}}^{n}\left[\hat{\alpha}_i^{(Y)}G_3\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\hat{\beta}_i^{(Y)}G_2\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\hat{\gamma}_i^{(Y)}G_1\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)+\hat{\delta}_i^{(Y)}G_0\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)\right] \tag{3.20}$$

ただし　$G_j\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)$：(1.25)式

ここで、$\tilde{x}_{i-1}\le\tilde{c}<\tilde{x}_i$ となる i を $\bar{m}$ とおくと、$\tilde{x}_{\bar{m}-1}=\tilde{c}$

$\bar{m}=1$ の場合　$D=1$

$\bar{m}\ne1$ の場合　$D=0$

また $\tilde{x}_{i-1}\le\tilde{a}<\tilde{x}_i$ となる i を n とし、$\tilde{x}_n=\tilde{a}$ とする。

そしてガウス積分（3 点法）の分点および重みは

$$\left.\begin{array}{l} x_k=\dfrac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_0}{2}+\dfrac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_0}{2}X_k\,,\ X_1=-0.7745967\,,\ X_2=0\,,\ X_3=0.7745967 \\ w_1=5/9、\ w_2=8/9、\ w_3=5/9 \end{array}\right\} \tag{3.21}$$

となる。

ここでは、$\left[0,\tilde{a}_t\right]$ 間が引張降伏しているので、その直後の除荷過程において、$\left[0,\tilde{a}_t\right]$ 間で

$$L\left(x\right)=\frac{V\left(x\right)}{1+\phi^{(tY)}\left(x\right)/E'} \tag{3.22}$$

ここで、$\phi^{(tY)}\left(x\right)$：(3.12)式

また、ここでは $\varsigma_t\to\varsigma_{t_0}$

なる固有変位が湧き出ることになる。

せん断き裂状態（実き裂先端が最初の結晶粒界に達するまでの間）で最も繰返し塑性域が大きく成長するのは $P_{\min_1}$ 時で、この時点での固有変位は図 3.4 の GBAB'G'となる。

図 3.6 は、$P_{\max_1}$ で形成された固有変位を青点線、その後の $P_{\min_1}$ 時圧縮塑性域となって変化した固有変位を青実線、そして $P_{\min_1}$ 時作用する *EDS* 軸上の応力分布を模式的に黒実線で示している。そして、除荷弾性域の応力分布を 2 次式で補間した結果を赤実線で示している。すなわち、$P_{\min_1}$ 時には、(3.6)式の $P_{\max_k}$ に $P_{\max_1}$、$P_{\min_k}$ に $P_{\min_1}$ を代入して得られる ΔK_{S_k} を(3.1)式の ΔK_S に代入して得られる $\tilde{\omega}_S$ を $\tilde{\omega}$ とすると、$P_{\min_1}$ 時の圧縮塑性域先端位置 $x_m(=\hat{x}_1)$ は、

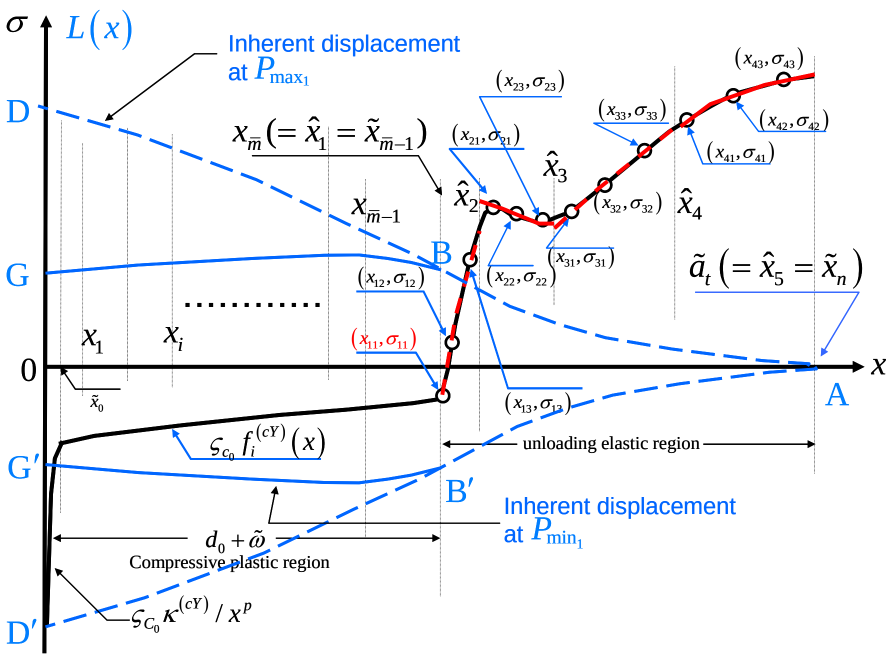


図 3.6 き裂開口現象が生じる前に形成される繰返し塑性域で最も発達した時点の最小荷重時の応力分布と固有変位

$$x_m\left(=\hat{x}_1\right)=d_0+\tilde{\omega} \tag{3.23}$$

ここで、$P_{\max 1}$ で $\tilde{a}_t$ が生じ、$P_{\min_1}$ で生じる x_m を $\hat{x}_C$、

$P_{\min_1}$ で $\tilde{a}_c$ が生じ、$P_{\max 1}$ で生じる x_m を $\hat{x}_T$ とする。

となっている。この時の $\hat{x}_1$ はせん断き裂状態で最も繰返し降伏域が大きくなった場合の繰返し降伏域先端の位置である。そして、ς_{c_0} は(3.2)式より

$$\varsigma_{c_0}=\frac{\varsigma_{t_0}\sigma_{Yt}-\left(\sigma_{Yt}-\sigma_{Yc}\right)\bar{\varsigma}_0}{\sigma_{Yc}} \tag{3.24}$$

$P_{\min_1}$ 時には、$\left[0,\hat{x}_1\right]$ 間は圧縮降伏域、$\left[\hat{x}_1,\tilde{a}_t\right]$ 間は除荷弾性域となることを考慮して、除荷弾性域を 4 分割し、各区分に働く作用応力を 2 次曲線で近似した場合、最小荷重時の COD は以下の式で表すことが出来る。

$$\begin{aligned}
V(b)=&P\hat{\Omega}^{(uP)}(b,\tilde{a})+\Omega^{(R)}(b,\tilde{a})-\varsigma_c\sigma_{Yc}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,0,\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\\
&-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right.\\
&\qquad+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\\
&\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ここでは$\varsigma_c=\varsigma_{c_0}$、$P=P_{\min_1}$、そして右辺第３式の$\hat{\Xi}^{(Y)}$（(3.20)式）に含まれる$D$は 1 となる。

ここで　$P_{\min_k}$：有効荷重対のk番目の最小荷重（直前の最大荷重の下添字と同じ番号、ここでは$k=1$）

$\hat{x}_i$：分割した除荷弾性域の境界座標（区間１～４）

σ_{ij}：区間iの内点x_{ij}の位置で作用する応力

$x_S=0$の場合は、$D=1$、$\bar{m}=2$とし,

$x_S\neq 0$の場合は、$D=0$とし、$\tilde{x}_{i-1}\le x_S<\tilde{x}_i$なる$i$を$\bar{m}$として$\tilde{x}_{\bar{m}-1}=x_S$とする。

また$\tilde{x}_{i-1}<x_L\le\tilde{x}_i$なる$i$を$n$として$\tilde{x}_n=x_L$とする。

w_jなどは(3.21)式参照

と表される。除荷弾性域$\left[\hat{x}_1,\tilde{a}\right]$間では、

$$V(b)=\left\{1+\frac{\sigma(b)}{E'}\right\}L(b) \tag{3.26}$$

ただし、$\sigma(b)$：位置bに働く作用応力

が成立する。$P_{\min_k}$を$P^*_{\min_k}$と置換え、(3.25)式と等値すると、

$$\begin{aligned}\left\{1+\frac{\sigma(b)}{E'}\right\}L(b)&=P^*_{\min_k}\hat{\Omega}^{(uP)}(b,\tilde{a})+\Omega^{(R)}(b,\tilde{a})-\varsigma_c\sigma_{Yc}\hat{\Xi}^{(Y)}(b,0,\hat{x}_1,\tilde{a})\\&-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{(x_{i2}-x_{i3})\sigma_{i1}+(x_{i3}-x_{i1})\sigma_{i2}+(x_{i1}-x_{i2})\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_2(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a})\right.\\&\qquad+\frac{(x_{i2}^2-x_{i3}^2)\sigma_{i1}+(x_{i3}^2-x_{i1}^2)\sigma_{i2}+(x_{i1}^2-x_{i2}^2)\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_1(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a})\\&\qquad\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}(x_{i2}-x_{i3})\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}(x_{i3}-x_{i1})\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}(x_{i1}-x_{i2})\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_0(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a})\right\}\end{aligned} \tag{3.27}$$

ただし、ここでは　$\tilde{a}=\tilde{a}_t$

$\left[\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1}\right]$間に 3 つの内点を設定し、その点の位置座標を$b(=x_{ij})$とし、その位置の作用応力$\sigma_{ij}$を未知数とすることで、(3.27)式より過不足ない連立一次方程式が得られる。ただしこの場合には、(3.22)式の関係が保証されない。したがって、$x_{11}=\hat{x}_1$（弾塑性境界）の応力を既知（$\sigma_{11}=\varsigma_c f_i^{(cY)}(\hat{x}_1)$）として$P^*_{\min_k}$を求める。そして$\tilde{a}_t$を変化させて得られる荷重を$P_{\min_1}$に収束させることで、正解の$\sigma_{ij}$を得ることができる。これらを(3.25)式に代入することで、$P_{\min_1}$時の COD 分布を求めることができる。解法については付録４D を参照されたい。

すなわち、繰返し負荷のため$P_{\max_1}$時の COD や応力分布は$P_{\min_1}$時に生じる圧縮塑性域寸法が影響し

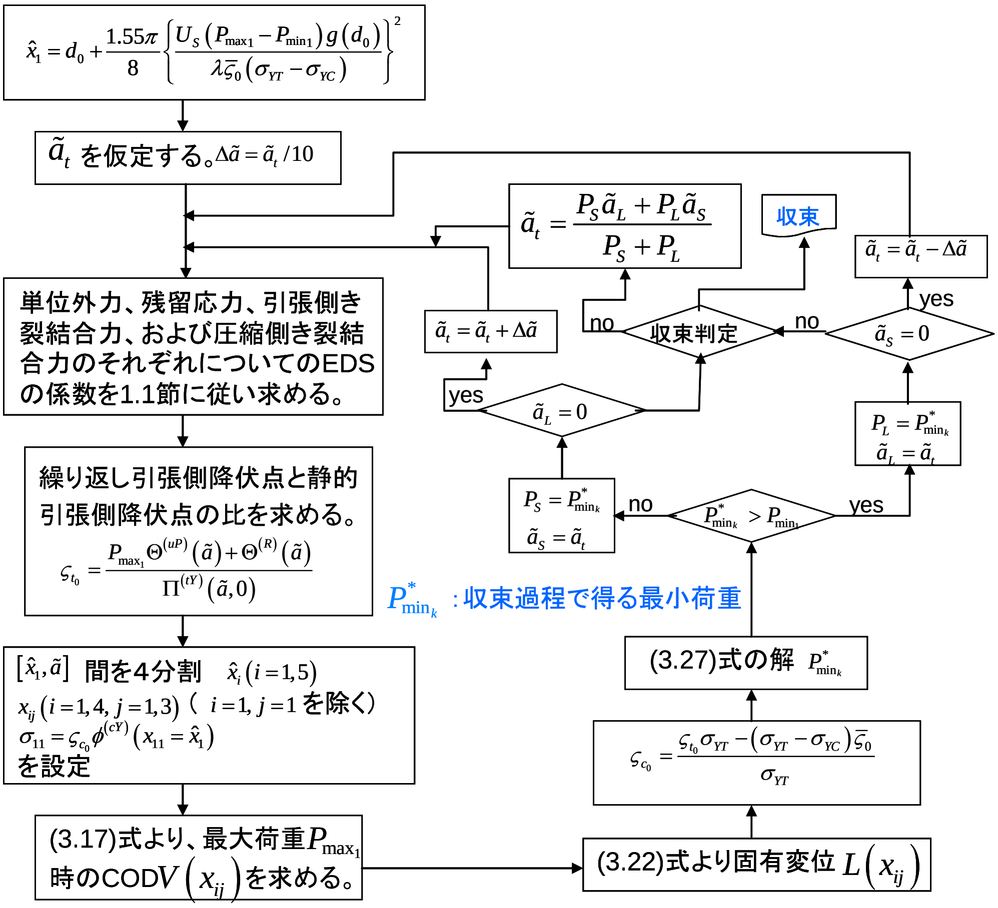


図 3.7　最初の結晶粒界に進展するまでの間に繰返し塑性域が最も進展した瞬間の最小荷重時における活固有変位（COD）などの状態を求めるための収束計算の流れ（正の固有変位で仮想き裂が形成された場合）

ており、これらの現象を考慮した収束計算が必要となる。図 3.7 はその収束計算の流れを示したもので、$P_{\max_1}$ と $P_{\min_1}$ の対で得られる繰返し塑性域先端位置と、繰返し負荷時の弾性応力範囲の収斂値と静的弾性応力範囲の比（$\bar{\varsigma}_0$）を与えることによって、最大荷重 $P_{\max_1}$ 時の仮想き裂先端位置 $\tilde{a}_t$ ならびに繰返し引張側降伏点収斂値と静的引張側降伏点の比（ς_{t_0}）と最小荷重 $P_{\min_1}$ 時の繰返し圧縮側降伏点収斂値と静的圧縮側降伏点の比（ς_{c_0}）ならびに COD が求められることになる。すなわち、最大荷重の大きさだけで繰返し負荷時の最大荷重時の仮想き裂先端位置 $\tilde{a}_t$ や COD などが規定されるのではなく、最小荷重時に形成される圧縮塑性域寸法などにより、規定されることになる。

ここで、(3.27)式で求めなければならないのは、繰返し荷重下の圧縮降伏点収斂値であるが、これを陽に求めることができない。しかし、圧縮塑性域寸法 $\hat{x}_1$（$=\hat{x}_C$）を固定し、最大荷重時に形成される引張塑性域寸法 $\tilde{a}_t$ に連動して変化した繰返し荷重下の引張側降伏点収斂値 $s_{Yt_0}\left(=\varsigma_{t_0}\sigma_{Yt}\right)$ から規定される繰返し荷重下の圧縮側降伏点 $s_{Yc_0}\left(=\varsigma_{c_0}\sigma_{Yc}\right)$ を与えることによる $P^*_{\min_k}$ の変化を計算し、これを $P_{\min_1}$ に収束させることで、正解を得る手法が採用できる。すなわち、$\tilde{a}_t$ を大きくすることは、ς_{t_0} を小さくすることになり、ς_{c_0} が小さくなる。そして ς_{c_0} が小さくなると $P^*_{\min_k}$ が小さくなる傾向にある。し

たがって、$\tilde{a}_t$ を変化させて、$P^*_{\min_k}$ が $P_{\min_1}$ を横切る箇所を求めればその時の結果が正解を与えることになる。図 3.7 はその観点から、挟み撃ち法による収束計算の流れを示している.

上記の収束計算の結果、$\varsigma_{t_0} > 1$ ならば繰返し硬化、$\varsigma_{t_0} < 1$ ならば繰返し軟化が生じていることになる*。しかし、$\varsigma_{t_0} > 1$ となり繰返し硬化が生じた場合、それまでで最も高い荷重が作用する最大 $P_{\max_1}$ 時には、弾塑性境界近傍は降伏点レベルの繰返し負荷を受けておらず、処女材と等しいので、一旦は静的降伏点に支配される引張塑性域、すなわち(3.14)式で $\varsigma_t = 1$ として得られる $\tilde{a}_t$ を塑性域先端とする引張塑性域が形成されることになる。ところで Dugdale モデルによると、き裂長さと作用応力が同じで、結合力すなわち引張降伏点が異なる場合、COD 分布は図 3.8 に示すようになる。すなわち、結合力が大きくなるほど塑性域は小さくなる。そして、塑性域の大きさが CTOD の数倍以上の場合には、実き裂先端付近においてもき裂結合力による差は COD に殆ど生じない。このことから、$\varsigma_{t_0} > 1$ の場合 $P_{\max_1}$ 時の仮想き裂先端は $\varsigma_t = 1$ として(3.14)式から得られる $\tilde{a}_t$ を用い、(3.17)式（ただし $\varsigma_t = 1$）として得られる $V(x)$ を(3.21)式に代入して得る $L(x)$ を用い、(3.27)式を解くことで ς_c（ここでは ς_{c_0}）が得られる。これらの解を(3.24)式に代入して $P_{\min_1}$ 時の COD ならびに固有変位を求めれば良い。ただし以後 ς_t は ς_{t_0} に保持されると仮定する。すなわち、引張塑性域が $\tilde{a}_t$ を越えて発達するときでも、硬化したままという取扱をしている（回復するアルゴリズムが見つからないため）。なお、*EDS* は $\varsigma_t = 1$ として(3.14)式を解くことによって得られたものが保持される。

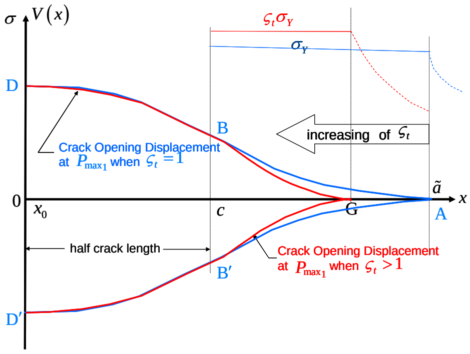


図 3.8 き裂長と作用応力が同じ場合のき裂開口変位に及ぼす Dugdale モデルにおけるき裂結合力の影響

せん断き裂状態では、繰返し荷重により急速に繰返し荷重下の降伏点にまで変化すると仮定した取扱いで妥当な疲労寿命評価が出来ている（３編参照）ので、上記で得られた $\tilde{a}_t$、ς_{t_0}、ς_{c_0} は、少なくともせん断き裂が最初の結晶粒界を越えるまでは保持されることになる。したがって各 *EDS* も保持されることになる。したがって、$P_{\max_1}$ 時の COD は(3.17)式、この時点で形成される固有変位は(3.22)式で与えられる。また $P_{\min_1}$ 時の COD は収束した状態で解かれた(3.27)式（ただし $\varsigma_c = \varsigma_{c_0}$）の解を(3.25)式に代入することによって得られる。そして圧縮降伏して固有変位が変化するのは $[0, \hat{x}_1]$ 間であり、(3.25)式で得られた $V(x)$ より、

$$L(x) = \frac{V(x)}{1 + \varsigma_c \phi_i^{(cY)} / E'} \tag{3.28}$$

---

* $\overline{\varsigma}_0$ が 0.55 というこれまでの結果では、ς_{T_0} が 1 以上になることはないが、$\overline{\varsigma}_0$ が大きくなると 1 以上になる。すなわち一種の繰返し硬化が生じることになる。この場合一度硬化した降伏点が静的降伏点にまで回復するのか、回復するとするとそれはどんな支配則に従うのかは未解明であり、今後の研究に待たねばならない。そこで $\varsigma_{t0} > 1$ となった場合、$P_{\max 1}$ 時の COD は静的降伏点によって生じる仮想き裂の影響を受けるが、その影響は少ないと仮定している。

ただし、ここでは $\varsigma_c = \varsigma_{c_0}$

と変化する。

②圧縮型仮想き裂が生成される場合

仮想き裂が圧縮塑性域で形成される場合、(3.14)式に対応して、

$$P_{\min_1}\hat{\Theta}^{(uP)}\left(\tilde{a}_c\right)+\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}_c\right)-\varsigma_c\sigma_{Yc}\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a}_c,0\right)=0 \tag{3.29}$$

ただし、ς_c ：繰返し負荷による圧縮側降伏点減少係数（収斂値を ς_{c_0} とする。ここでは ς_c は ς_{c_0} となっている)。

が成立する。①から明らかなように、$\tilde{a}_c$ を求めるためには、$P_{\min_1}$ の後に現われる $P_{\max_1}$ での仮想き裂内に生じる引張塑性域先端位置が $\hat{x}_1$ （$=\hat{x}_T$）((3.23)式参照）になるように、収束計算をしなければならない。しかし、通常 $\sigma_{Yt}<\left|\sigma_{Yc}\right|$ であり、さらに仮想き裂が圧縮塑性域で形成されている場合には、き裂開口が生じにくいので、疲労損傷リスクは小さいと考えられ、$\left|P_{\min_1}\right|\gg P_{\max_1}$ でない限り、安全側という観点から $\tilde{a}_c>\tilde{a}_t$ という状態は検討の必要はないと考えられる。通常 $\sigma_{Yt}<\left|\sigma_{Yc}\right|$ であることを考えると、$P_{\max_1}\geq\left|P_{\min_1}\right|$ の場合には検討するまでもなく、①の状態にあるとすれば良い。しかし、圧縮仮想き裂場における疲労損傷を検討する場合には以下の取扱をすれば良い。

(3.29)式が成立する状態では、$P_{\min_1}$ 時のき裂開口変位は(3.17)式を参照して、

$$V\left(b\right)=P_{\min_k}\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}_c\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}_c\right)-\varsigma_c\sigma_{Yc}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,0,\tilde{a}_c,\tilde{a}_c\right) \tag{3.30}$$

ただし、ここでは $k=1$

で与えられ、

$$L\left(x\right)=\frac{V\left(x\right)}{1+\phi^{(cY)}\left(x\right)/E'} \tag{3.31}$$

ここで、$\phi^{(tY)}\left(x\right)$ ：(3.13)式

また、ここでは $\varsigma_c\rightarrow\varsigma_{c_0}$

なる固有変位が $\left[0,\tilde{a}_c\right]$ 間に湧出する。そして、$P_{\max_1}$ 時には、

$$\begin{aligned}\left\{1+\frac{\sigma\left(b\right)}{E'}\right\}L\left(b\right)&=P\,\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)-\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,0,\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\\&\quad-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right.\\&\qquad+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\\&\qquad\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.32}$$

ただし、ここでは $k=1$ 、 $\tilde{a}=\tilde{a}_c$ 、 $\hat{x}_1=\hat{x}_T$ 、 $P=P_{\max 1}$

なる関係が成立する。そして、(3.32)式の解を、

$$
\begin{aligned}
V(b) &= P\hat{\Omega}^{(uP)}(b,\tilde{a})+\Omega^{(R)}(b,\tilde{a})-\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\Xi}^{(Y)}(b,0,\hat{x}_1,\tilde{a}) \\
&-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{(x_{i2}-x_{i3})\sigma_{i1}+(x_{i3}-x_{i1})\sigma_{i2}+(x_{i1}-x_{i2})\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_2(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a})\right. \\
&\quad+\frac{(x_{i2}^2-x_{i3}^2)\sigma_{i1}+(x_{i3}^2-x_{i1}^2)\sigma_{i2}+(x_{i1}^2-x_{i2}^2)\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_1(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}) \\
&\quad\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}(x_{i2}-x_{i3})\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}(x_{i3}-x_{i1})\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}(x_{i1}-x_{i2})\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_0(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a})\right\}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

に代入することで、$P_{\max 1}$ 時の COD を求めることができる。そこで、$\hat{x}_1$ が $\hat{x}_T$ になるように(3.30)～(3.32)式が成立するように図 3.7 と同様の流れで収束計算すれば、 $\tilde{a}_c$ を求めることができる。

図 3.9 にこの $P_{\max_1}$ 時点における固有変位分布を示す。なお、$\varsigma_{c_0}>1$ となった場合、①での $\varsigma_{t_0}>1$ の場合と同様の取扱いをする。すなわち、(3.30)式で $\varsigma_c=1$ として得られる $\tilde{a}_c$ ならびに各 *EDS* を用いて得る $V(x)$ が $P_{\min_1}$ で生じたと仮定する。そして(3.31)式から得る $L(x)$ を用いて、(3.32)式を解くことで ς_t （ここでは ς_{t_0} ）が求められる。

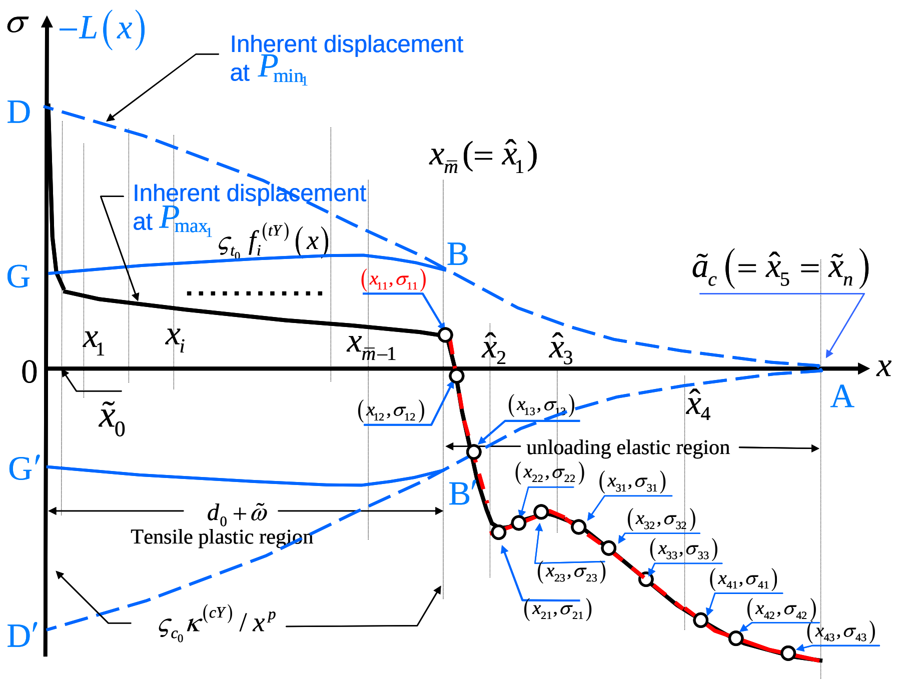


図 3.9 き裂開口現象が生じる前に形成される繰返し塑性域で最も発達した時点の最大荷重時の応力分布と固有変位

b）最初の有効荷重対出現後のき裂開口モードが現われるまでの COD 分布

上記の $\tilde{a}_t$ と $\tilde{a}_c$ の内大きい方の仮想き裂がせん断き裂が最初の結晶粒界に達した時に形成されていることになる。$\tilde{a}_t = \tilde{a}_c$ の場合には両者のうち遅く現われたものが残ることになる。通常の鋼材は $\sigma_{Yt} \leq \left|\sigma_{Yc}\right|$ である。この場合 $P_{\max_1} > \left|P_{\min_1}\right|$ ならば、②の計算をするまでもなく①の引張塑性ひずみによる仮想き裂が形成される。

上記①あるいは②で仮想き裂先端位置 $\tilde{a}$（①の場合は $\tilde{a}_t$、②の場合は $\tilde{a}_c$）と、繰返し塑性域の先端位置（①の場合には $\hat{x}_C$、②の場合には $\hat{x}_T$）、ならびに①の場合は $p_{\min_1}$、②の場合は $P_{\max_1}$ 直後の固有変位分布 $L(x)$ が求められる。以後①の場合は $P_{\max_2} \to P_{\min_2} \to P_{\max_3}$ ・・・・・・$\to P_{\min_n}$、②の場合は $P_{\min_2}$ $\to P_{\max_2} \to P_{\min_3}$ ・・・・・・$\to P_{\min_n}$ とそれぞれの時点のき裂開口変位、応力分布ならびに固有変位分布を求めていけば良い。この時最大荷重時については、(3.32)式において、$\hat{x}_1$ を変化させて、P を $P_{\max_k}$ に収束させ、そこで得られた未知数 σ_{ij} などを(3.33)式に代入して $P_{\max_k}$ 時の COD（$V(x)$）を求め、(3.31)式に代入して固有変位分布 $L(x)$ が求められる。一方最小荷重時については(3.27)式において、$\hat{x}_1$ を変化させて $P^*_{\min_k}$ を $P_{\min_k}$ に収束させ、得られた未知数を(3.25)式に代入して $P_{\min_k}$ 時 COD（$V(x)$）を求め、それを(3.28)式に代入して $L(x)$ が求められる。

このように次のピーク荷重直後の固有変位分布を求め、これをもとに次のピーク荷重直後の固有変位分布が得られる。このように交互に現われるピーク荷重直後についての固有変位分布をせん断き裂が最初の結晶粒界を越えた最小荷重まで順次求めることで、せん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点の COD や固有変位分布が得られる。

3.2　き裂開口モードが生じ始めてからの寿命評価

3.1 節によって、せん断き裂が最初の結晶粒界に達するまでの寿命ならびに、達した時点の最小荷重時における固有変位分布 $L(x)$ が得られる。この時点までは、$P_{\max_1}$ と $P_{\min_1}$ の有効荷重対が作用して形成された仮想き裂の大きさ（$\tilde{a}_t$ と $\tilde{a}_c$ のうちの大きい方）、ヒステリシスループを生じていた領域寸法（$\hat{x}_C$ あるいは $\hat{x}_T$）ならびに ς_{t_0}、ς_{c_0} は一定に保持されていることになる。さらには、仮想き裂先端付近の塑性ひずみの符号と各 *EDS* も保持されたままである。

せん断き裂が最初の結晶粒界を越えると、これまでとは方位が異なる結晶にき裂が突入するため、き裂自身による応力集中により高密度で生成されている転位の運動方向が切欠底に入った初期のき裂とは異なる方向に運動し、その結果としてき裂開口方向の力が大きくなり、き裂が開口するモードに繊維していく（第 3 編 5.1 節参照）。き裂開口モードが現れると、き裂が開口している箇所は荷重を分担しなくなるため、応力再配分が生じ出すようになる。

以下にき裂成長寿命計算の流れに従い、特性値を求めるための定式化について説明する。

3.2.1　RPG 荷重

RPG 荷重は負荷過程でき裂先端に位置する結晶が降伏点に達し、引張塑性域が結晶粒界を飛び越えて成長しだす瞬間の荷重として定義される。この時き裂は完全に開口している。RPG 荷重時には直前の最小荷重（$P_{\min}$）時に形成されている仮想き裂領域（$\tilde{a}$）を越えることがないので、$P_{\min}$ 時の各 *EDS* はそのまま保持されている。したがって、RPG 荷重時には、き裂開口区間$\left[0,\tilde{c}\right]$に働く作用応力は 0、き裂先端位置の 1 結晶粒間$\left[\tilde{c},\hat{x}_1\right]$間（ただし、$\hat{x}_1=\tilde{c}+d_0$。$d_0$：結晶粒径）には$\phi^{(tY)}\left(x\right)$なる引張側き裂結合力、そして$\left[\hat{x}_1,\tilde{a}\right]$間は除荷弾性域となる。したがって、除荷弾性域$\left[\hat{x}_1,\tilde{a}\right]$間を 4 分割し、そこで働く応力分布を 2 次方程式で補間すると、RPG 荷重時のき裂開口変位は以下のように表される（ただし、次式はき裂が開口し、引張塑性域が仮想き裂を越えない状態の COD を表している）。(3.33) 式より

$$
\begin{aligned}
V\left(b\right)=&P\cdot\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)-\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\hat{\Xi}}^{(Y)}\left(b,\tilde{c},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\\
&-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right.\\
&+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\\
&\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

ただし　P：荷重

で表現できる。RPG 荷重時には、$\hat{x}_1=\tilde{c}+d_0$ とおけば良い。この場合 P は RPG 荷重 P_{RPG} となる。(3.26) 式と等値して、

$$
\begin{aligned}
\left\{1+\frac{\sigma\left(b\right)}{E'}\right\}L\left(b\right)=&P\cdot\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)-\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\hat{\Xi}}^{(Y)}\left(b,\tilde{c},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\\
&-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right.\\
&+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\\
&\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

ここでは　$L\left(b\right)$：直前の最小荷重時に形成された固有変位分布

$\hat{x}_1=\tilde{c}+d_0$

$P=P_{RPG}$

$\left[\tilde{c}+d_0,\tilde{a}\right]$間の b 位置において(3.35)式が成立する。$b=x_{ij}$（$i=1,4,\ j=1,3$）の位置の作用応力 σ_{ij}（ただし $\sigma_{11}=\varsigma_t\phi\left(\tilde{c}+d_0\right)$ を除く）と P を未知数として(3.35)式を解けば RPG 荷重（P_{RPG}）が得られる。

図 3.10 に示すように次に現れる最大荷重、最小荷重が、現時点の最小荷重と RPG 荷重の間で変化する場合はこの区間を最初に離れる荷重により、荷重を置換える必要がある。b)のように最初に RPG 荷重より大きい最大荷重が現れる場合には、次のステップはこの最大荷重における COD を求めることになる。一方、a)のように最初に上記区間をぬけるのが最小荷重であれば、直前の実効荷重対の最大荷重（$p^b_{\max}$）の固有変位（現時点の最小荷重時の固有変位を用いても良い）から後述の(3.43)式を解き直して新しい最小荷重時の COD を求め直す必要がある。

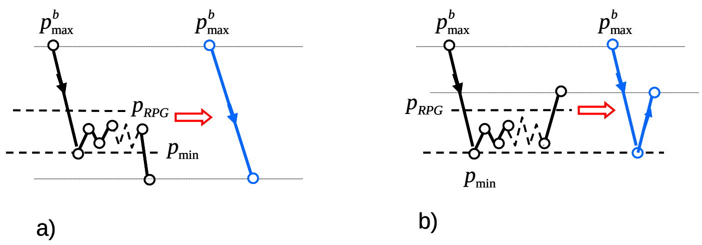


図 3.10　RPG 荷重を介しての有効荷重対の抽出

3.2.2 負荷過程における引張降伏点の回復と最大荷重時のき裂開口変位

次に現われる最大荷重 $P_{\max}$ が P_{RPG} より大きくなると、き裂先端で引張塑性域が拡大する。負荷過程において $\hat{x}_T$ が存在し、ς_t が 1 より小さい場合には、引張塑性域先端が $\hat{x}_T$ に達すると、引張塑性域の成長が停留し、引張降伏点の回復が生じることになる。そして ς_t が 1、すなわち引張側降伏点が静的のそれに回復後、$\hat{x}_T$ は消滅し、引張塑性域は再び拡大する。

$\hat{x}_T$ が存在する場合、(3.32)式において $\hat{x}_1$ を $\hat{x}_T$ と置き換え、$\left[\hat{x}_T,\tilde{a}\right]$ 間を 4 分割し、$b=x_{ij}$（$i=1,4$、$j=1,3$）の位置（ただし、x_{11} は除く。そして $x_{11}=\hat{x}_T$ とし、この位置の作用応力 $\sigma\left(\hat{x}_T\right)$ は $\phi^{(tY)}\left(\hat{x}_T\right)$ と既知とする）において(3.32)式が成立する P を P_{STs} とする。また上記に加えて(3.32)式での ς_t を 1 として、同様にして求めた P を P_{STe} とする。すなわち、

$\hat{x}_T$ が存在している場合、最大荷重 $P_{\max_k}$ が、

$P_{RPG}<P_{\max_k}\le P_{STs}$ の場合：引張側降伏点の回復は起こらず、ς_t は直前のサイクルにおけるそれを保持

$P_{STs}<P_{\max_k}\le P_{STe}$ の場合：引張側降伏点の回復過程*にあり、(3.32)式で $P=P_{\max_k}$ とおき、ς_t を未知として、新しい ς_t を求める。なお、新しい ς_t は直前のそれより大きくなるが $\varsigma_t\le 1$ となる。

荷重が P_{STe} になった時に $\hat{x}_T$ が消滅し、引張側降伏点は、静的条件下のそれまで回復し、$\varsigma_t=1$ となる。そして、引張塑性域先端が仮想き裂先端にまで達した時点の荷重 P_α は(3.14)式より、

* せん断き裂が最初の結晶粒界を越えてき裂開口型に移行した後も、引張降伏点が静的条件下の降伏点まで回復するまでは圧縮塑性域が $\hat{x}_T$ を越えないので、一定荷重振幅下ではき裂が成長しても繰返し塑性域は大きくならず、第 2 編図 3.17 のようにき裂が最初の結晶粒界を超えてからも上に凸のき裂成長曲線となっていると考察される。

$$P_{\alpha}=\frac{\varsigma_t\sigma_{Yt}\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)-\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)}{\hat{\Theta}^{(uP)}\left(\tilde{a}\right)} \tag{3.36}$$

ただし、ここでは$\varsigma_t=1$

したがって、

$P_{STe}<P_{\max_k}<P_{\alpha}$の場合：$\hat{x}_T$が消滅し、引張降伏点は静的条件下のそれまで荷重が$P_{STe}$時点で回復し、そして引張塑性域は最大荷重時にも仮想き裂内に留まる。

そして上記の場合、すなわち最大荷重が$P_{RPG}<P_{\max_k}<P_{\alpha}$となる場合は、(3.35)式が成立し、この解を(3.34)式に代入することにより、最大荷重$P_{\max_k}$時の COD（$V\left(x\right)$）が求められる。

$P_{\max_k}\geq P_{\alpha}$の場合、

(3.14)式より、

$$P_{\max_1}\hat{\Theta}^{(uP)}\left(\tilde{a}\right)+\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)-\varsigma_t\sigma_{Y_t}\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)=0 \tag{3.37}$$

ただし、ここでは$\varsigma_t=1$

を解き、*EDS*の各係数と、$\tilde{a}$を求める。そして、得られた*EDS*の各係数と、$\tilde{a}$を(3.17)式から得られる次式に代入することによって、最大荷重$P_{\max_k}$時の COD（$V\left(x\right)$）が求められる。

$$V\left(b\right)=P_{\max_k}\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)-\varsigma_t\sigma_{Y_t}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,\tilde{c},\tilde{a},\tilde{a}\right) \tag{3.38}$$

ただし、ここでは$\varsigma_t=1$

$\hat{x}_T$が存在しない場合、最大荷重$P_{\max_k}$が、

$P_{RPG}<P_{\max_k}\leq P_{\alpha}$（ただし、$P_{\alpha}$：(4.37)式）の場合：(3.35)式が成立し、この解を(3.34)式に代入することにより、最大荷重$P_{\max_k}$時の COD（$V\left(x\right)$）が求められる。

$P_{\max_k}>P_{\alpha}$の場合：このとき、$\varsigma_t\geq 1$であれば、塑性域が仮想き裂を越えて発達し、(3.37)式を解いて得られる *EDS* の各係数と、$\tilde{a}$を(3.38)式に代入することで最大荷重$P_{\max_k}$時の COD（$V\left(x\right)$）が求められる

$\varsigma_t<1$であれば、$P_{\max_k}$　が(3.36)式で$\varsigma_t=1$とおいて得られるP_{α}をP_{β}とする。そして

$P_{\alpha}\leq P_{\max_k}<P_{\beta}$ならば、引張塑性域先端は直前の仮想き裂先端位置$\tilde{\alpha}$に留まり、(3.36)式より

$$\varsigma_t=\frac{P_{\max_k}\hat{\Theta}^{(uP)}\left(\tilde{a}\right)+\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)}{\sigma_{Yt}\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)} \tag{3.39}$$

まで、引張側降伏点は回復する。そして、$P_{\max_k}$時の COD は(3.38)式で与えられる。

$P_{\max_k}\geq P_{\beta}$ならば、引張側降伏点は完全に回復し、$\varsigma_t=1$となる。塑性域が仮想き裂を越えて発達し、(3.37)式を解いて得られる *EDS* の各係数と、$\tilde{a}$を(3.38)式に代入することで最大荷重$P_{\max_k}$時の COD（$V\left(x\right)$）が求められる

そして、固有変位は(3.22)式によるものが保持されることになる。

3.2.3 RCPG 荷重

実効荷重対の場では、最大荷重時にはき裂は開口しており、き裂先端位置の結晶だけが圧縮降伏した時の荷重が RCPG 荷重となる。したがって、(3.25)式において、$\Xi^{(cY)}\left(b,0,\hat{x}_1,\tilde{a}\right) \to \Xi^{(cY)}\left(b,\tilde{c},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)$ とするとともに、$\hat{x}_1 = \tilde{c} + d_0$ での作用応力 $\sigma\left(\hat{x}_1\right) = \varsigma_c \phi\left(\hat{x}_1\right) = \sigma_{11}$ を既知とし、σ_{ij}（$i = j = 1$ を除く）と P を未知とした連立 1 次方程式を作成し、それを解く。得られた P が RCPG 荷重 P_{RCPG} となる。なお、$L\left(x\right)$ ならびに各 EDS は直前の最大荷重時におけるものと同一となる。

図 3.11 に示すように次に現れる最小荷重、最大荷重が、現時点の最大荷重と RCPG 荷重の間に挟まれた荷重区間内で変化する場合はこの区間を最初に離れる荷重により、荷重を置換える必要がある。b)のように最初に RCPG 荷重より小さい最小荷重が現れる場合には、次のステップはこの最小荷重における COD を求めることになる。一方、a)のように最初に上記区間を抜けるのが最大荷重であれば、直前の実効荷重対の最小荷重（$p_{\min}$）の固有変位（現時点の最小荷重時の固有変位を用いても良い）から(3.32)式の解を(3.33)式に代入して、新しい最大荷重時の COD を求め直す必要がある。

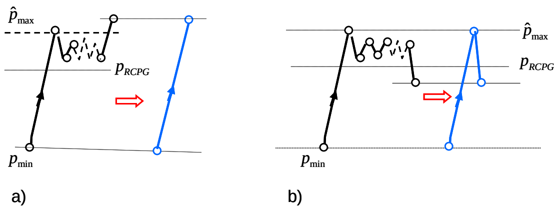


図 3.11 実効荷重対への置き換え

3.2.4 除荷過程における圧縮降伏点の回復と最小荷重時のき裂開口変位

除荷過程において荷重 P が P_{RCPG} より小さくなるにつれて、き裂先端で圧縮塑性域が拡大していく。そのため（負側に）変位が大きくなり、実き裂部に閉口域が形成されその領域では圧縮応力が働くようになる（圧縮荷重をき裂部で分担するようになる）。そのため圧縮塑性域の成長が鈍化、場合によっては停留する。さらに除荷していくと、ついには実き裂部も圧縮降伏し、その後仮想き裂を越えて圧縮塑性域が拡大する。

さらに、$\hat{x}_C$ が存在し圧縮塑性域先端がそこに達すると、除荷が進行しても圧縮塑性域の拡大は一旦停止し、圧縮側降伏点の回復が生じ ς_c が大きくなる。そして、ς_c が 1 となると $\hat{x}_C$ は消滅し、さらに除荷されるならば、再び圧縮降伏域の拡大が生じる。$\hat{x}_C$ が存在しない場では、ς_c が 1 よりも小さい場合、圧縮塑性域が $\tilde{a}$ に達すると、一旦圧縮塑性域の先端は $\tilde{a}$ に留まり ς_c が 1（圧縮降伏点が静的のそれまで回復）となってから、圧縮塑性域が拡大（仮想き裂が進展）することになる。

この間、実き裂部でのき裂閉口域が拡大し、仮想き裂が成長する程度にまで圧縮側に大きく負荷される（大きく除荷される）直前には、実き裂部の全領域が圧縮降伏すると考えられる。特に高応力集中場から低い箇所に向かって疲労き裂が進展していく場合には、き裂が閉口してからは圧縮塑性域のき裂前方への拡大は停留し、き裂閉口域が拡大し遂には実き裂部も圧縮降伏し、実き裂部全体が圧縮

降伏した後、圧縮塑性域は仮想き裂に向かって成長すると考えられる。

従って除荷過程の P_{RCPG} より小さな荷重 P 時に圧縮降伏域が $\tilde{a}$ を越えない場合のき裂開口変位は以下の(3.40)式のように表すことができる。ここで、切欠底に位置する結晶粒は、仮想き裂に比べて小さいので、この領域では一様な作用応力が働くと仮定し、圧縮側き裂結合力に対する *EDS* 分布が働くとしている。また、この領域以外の実き裂部内の要素には（*EDS* で）直線的な応力が作用すると仮定し、その要素内での開口、閉口ならびに圧縮塑性を表現出来るように配慮している。さらには、仮想き裂内の弾性応力領域は4分割し、そこでは2次式で近似される作用応力が働くと仮定している。

$$
\begin{aligned}
V(b) = {} & P\cdot\Omega^{(uP)}(b,\tilde{a}) + \Omega^{(R)}(b,\tilde{a}) - \varsigma_c \Xi^{(cY)}(b,\tilde{c},\hat{x}_1,\tilde{a}) - \tilde{\rho}_1\kappa\cdot\Gamma(b,\tilde{a}) - \tilde{\rho}_2\varsigma_c\kappa^{(cY)}\Gamma(b,\tilde{a}) \\
& - \sum_{i=2}^{\ell}\Big\{\rho_0(i)\Psi_i(\hat{x}_{i-1},\hat{x}_i,b,\tilde{a}) - \rho_1(i)\Psi_i(\hat{x}_{i-1},\hat{d}_{i1},b,\tilde{a}) - \rho_2(i)\Psi_i(\hat{d}_{i2},\hat{x}_i,b,\tilde{a}) \\
& \quad + \rho_3(i)\varsigma_c\Xi(b,\hat{x}_{i-1},\hat{x}_i,\tilde{a}) - \rho_4(i)\varsigma_c\Xi(b,\hat{x}_{i-1},\hat{d}_{i1},\tilde{a}) - \rho_5(i)\varsigma_c\Xi(b,\hat{d}_{i2},\hat{x}_i,\tilde{a})\Big\} \\
& - \sum_{i=1}^{4}\Bigg\{-\frac{(x_{i2}-x_{i3})\sigma_{i1} + (x_{i3}-x_{i1})\sigma_{i2} + (x_{i1}-x_{i2})\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_2(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}) \\
& \quad + \frac{(x_{i2}^2-x_{i3}^2)\sigma_{i1} + (x_{i3}^2-x_{i1}^2)\sigma_{i2} + (x_{i1}^2-x_{i2}^2)\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_1(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}) \\
& \quad + \frac{x_{i2}x_{i3}(x_{i2}-x_{i3})\sigma_{i1} + x_{i3}x_{i1}(x_{i3}-x_{i1})\sigma_{i2} + x_{i1}x_{i2}(x_{i1}-x_{i2})\sigma_{i3}}{(x_{i1}-x_{i2})(x_{i2}-x_{i3})(x_{i3}-x_{i1})}G_0(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a})\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

ここで　ℓ は実き裂部に配置する1次要素の要素数であり、Γ, Ψ_i は以下のように表せる。

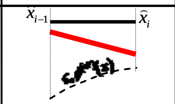
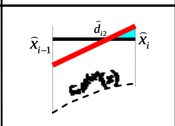
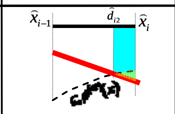
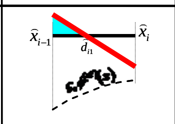
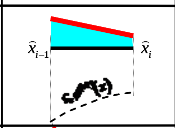
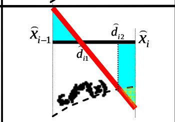
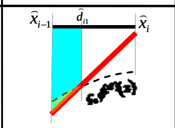
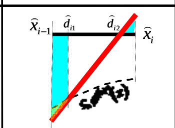
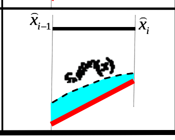
$$
\left.
\begin{aligned}
\Gamma(b,\tilde{a}) &= \frac{4(\tilde{x}_1-\tilde{x}_0)}{\pi E'}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{2x_j^P}\left\{\ln\left(\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}+\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right) - \ln\left|\sqrt{\tilde{a}^2-b^2}-\sqrt{\tilde{a}^2-x_j^2}\right|\right\} \\
\Psi_i(x_S,x_L,b,\tilde{a}) &= \frac{\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}{\underset{\sim}{x}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i2}}G_1(x_S,x_L,b,\tilde{a}) + \frac{\underset{\sim}{x}_{i1}\underset{\sim}{\sigma}_{i2}-\underset{\sim}{x}_{i2}\underset{\sim}{\sigma}_{i1}}{\underset{\sim}{x}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i2}}G_0(x_S,x_L,b,\tilde{a})
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.41}
$$

ここで　重みや分点などは(1.27)式参照また、切欠底に接する結晶での作用応力によるき裂開口変位は(3.40)式右辺の第4項、第5項で表している。すなわち、切欠底に接する結晶粒範囲で

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{一様圧縮応力が作用する場合：} & \tilde{\rho}_1 = 1\text{、}\tilde{\rho}_2 = 0\text{、}0 < \kappa < \varsigma_c\kappa^{(cY)} \\
 & (\kappa\sigma_{CY}/\varsigma_c\kappa^{(cY)})\text{ なる弾性応力が働く。} \\
\text{き裂開口する場合} & \text{：}\tilde{\rho}_1 = 1\text{、}\tilde{\rho}_2 = 0\text{、}\kappa = 0 \\
\text{圧縮降伏する場合} & \text{：}\tilde{\rho}_1 = 0\text{、}\tilde{\rho}_2 = 1
\end{array}
\right\}
\tag{3.42}
$$

となる。また、他の実き裂部では、（*EDS* 座標上で）直線で近似される応力が働くと仮定すると、この（$\ell-1$）個の要素で実現される応力状態は表4.1に示すように9つのcaseに分類され、各々のパラメタを使用することで、き裂開閉口ならびに圧縮降伏状態が判別できることになる。

表 3.1　実き裂に配置された要素に働く応力の状態（要素 1 は除く）

状態No..		状態	判定式	$\rho_0(i)$	$\rho_1(i)$	$\rho_2(i)$	$\rho_3(i)$	$\rho_4(i)$	$\rho_5(i)$
①		・き裂閉口	$0>q_i(\hat{x}_{i-1})>\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_{i-1})$ $0>q_i(\hat{x}_i)>\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_i)$	1	0	0	0	0	0
②		・き裂先端側開口 ・マウス側閉口 （弾性状態）	$0>q_i(\hat{x}_{i-1})>\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_{i-1})$ $q_i(\hat{x}_i)>0$ $\hat{d}_{i1}=\dfrac{\underset{\sim}{x}_{i2}\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i1}\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}{\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}$	1	0	1	0	0	0
③		・き裂閉口（マウス側、弾性） ・き裂先端側圧縮降伏	$0>q_i(\hat{x}_{i-1})>\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_{i-1})$ $q_i(\hat{x}_i)<\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_i)$ $\hat{d}_{i2}=x^{*1}$	1	0	0	0	0	1
④		・マウス側開口。 ・き裂先端側き裂閉口（弾性）	$q_i(\hat{x}_{i-1})>0$ $0>q_i(\hat{x}_i)>\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_i)$ $\hat{d}_{i1}=\dfrac{\underset{\sim}{x}_{i2}\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i1}\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}{\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}$	1	1	0	0	0	0
⑤		・き裂開口	$q_i(\hat{x}_{i-1})>0$ $q_i(\hat{x}_i)>0$	1	0	0	0	0	0
⑥		・マウス側開口。 ・き裂先端側圧縮降伏。	$q_i(\hat{x}_{i-1})>0$ $q_i(\hat{x}_i)<\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_i)$ $\hat{d}_{i1}=\dfrac{\underset{\sim}{x}_{i2}\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i1}\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}{\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}$ $\hat{d}_{i2}=x^{*1}$	1	1	1	0	0	0
⑦		・き裂閉口 ・き裂先端側：弾性 ・マウス側圧縮降伏	$q_i(\hat{x}_{i-1})<\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_{i-1})$ $0>q_i(\hat{x}_i)>\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_i)$ $\hat{d}_{i1}=x^{*1}$	0	1	0	0	1	0
⑧		・き裂先端側開口。 ・マウス側圧縮降伏	$q_i(\hat{x}_{i-1})<\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_{i-1})$ $q_i(\hat{x}_i)>0$ $\hat{d}_{i1}=x^{*1}$ $\hat{d}_{i2}=\dfrac{\underset{\sim}{x}_{i2}\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i1}\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}{\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}$	1	1	1	0	1	0
⑨		・全体圧縮降伏	$q_i(\hat{x}_{i-1})<\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_{i-1})$ $q_i(\hat{x}_i)<\varsigma_C\phi^{(cY)}(\hat{x}_i)$	0	0	0	1	0	0

＊ $q_j(x)$ は、実き裂部での作用応力を直線近似したもので以下のようになる。

$$q_j(x)=\frac{1}{\underset{\sim}{x}_{j1}-\underset{\sim}{x}_{j2}}\left\{\left(\underset{\sim}{\sigma}_{j1}-\underset{\sim}{\sigma}_{j2}\right)x+\left(\underset{\sim}{x}_{j1}\underset{\sim}{\sigma}_{j2}-\underset{\sim}{x}_{j2}\underset{\sim}{\sigma}_{j1}\right)\right\}$$

またき裂結合力の下限は、以下のようになる。

$$\varsigma_c\phi^{(cY)}(x)=\varsigma_c\left\{\alpha_j^{(Yc)}x^3+\beta_j^{(Yc)}x^2+\gamma_j^{(Yc)}x+\delta_j^{(Yc)}\right\}$$

$q_i(x)$ と $\varsigma_C\phi^{(cY)}(x)$ の交点の x座標 x^* は、以下の3次方程式の解となる。

$$\left[\varsigma_c\phi^{(Yc)}(x)-q(x)\right]\Big/\left(\varsigma_c\alpha_j^{(Yc)}\right)=x^3+\mu_1x^2+\mu_2x+\mu_3=0$$

ただし

$$\mu_1=\frac{\beta_j^{(Yc)}}{\alpha_j^{(Yc)}}$$

$$\mu_2=\frac{\gamma_j^{(Yc)}}{\alpha_j^{(Yc)}}-\frac{\underset{\sim}{\sigma}_{i1}-\underset{\sim}{\sigma}_{i2}}{\varsigma_C\alpha_j^{(Yc)}\left(\underset{\sim}{x}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i2}\right)}$$

$$\mu_3=\frac{\delta_j^{(Yc)}}{\alpha_j^{(Yc)}}-\frac{\underset{\sim}{x}_{i1}\underset{\sim}{\sigma}_{i2}-\underset{\sim}{x}_{i2}\underset{\sim}{\sigma}_{i1}}{\varsigma_C\alpha_j^{(Yc)}\left(\underset{\sim}{x}_{i1}-\underset{\sim}{x}_{i2}\right)}$$

ここで、

$$Q=\frac{3\mu_2-\mu_1^2}{9}\quad,\quad R=\frac{9\mu_1\mu_2-27\mu_3-2\mu_1^3}{54}$$

と置き、

$$S=\left\{R+\left(Q^3+R^2\right)^{1/2}\right\}^{1/3}\quad,\quad T=\left\{R-\left(Q^3+R^2\right)^{1/2}\right\}^{1/3}$$

とすると、

$$\left.\begin{aligned}
x^{*1}&=S+T-\frac{1}{3}\mu_1\\
x^{*2}&=-\frac{(S+T)}{2}-\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)\\
x^{*3}&=-\frac{(S+T)}{2}-\frac{1}{3}\mu_1-\frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)
\end{aligned}\right\}$$

上記の根のうち、実根で $\left[\hat{x}_{i-1},\hat{x}_i\right]$ 内の根が $\hat{d}_{i1}$ もしくは $\hat{d}_{i2}$ となる。

(3.40)式と(3.26)式を等値すると、

$$\left\{1+\frac{\sigma(b)}{E'}\right\}L(b)=P\cdot\Omega^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)-\varsigma_c\Xi^{(cY)}\left(b,\tilde{c},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)$$
$$-\tilde{\rho}_1\kappa\cdot\Gamma\left(b,\tilde{a}\right)-\tilde{\rho}_2\varsigma_c\kappa^{(cY)}\Gamma\left(b,\tilde{a}\right)$$
$$-\sum_{i=2}^{\ell}\Big\{\rho_0(i)\Psi_i\left(\hat{x}_{i-1},\hat{x}_i,b,\tilde{a}\right)-\rho_1(i)\Psi_i\left(\hat{x}_{i-1},\hat{d}_{i1},b,\tilde{a}\right)-\rho_2(i)\Psi_i\left(\hat{d}_{i2},\hat{x}_i,b,\tilde{a}\right)$$
$$+\rho_3(i)\varsigma_c\Xi\left(b,\hat{x}_{i-1},\hat{x}_i,\tilde{a}\right)-\rho_4(i)\varsigma_c\Xi\left(b,\hat{x}_{i-1},\hat{d}_{i1},\tilde{a}\right)-\rho_5(i)\varsigma_c\Xi\left(b,\hat{d}_{i2},\hat{x}_i,\tilde{a}\right)\Big\}$$
$$-\sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right.$$
$$+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)$$
$$\left.+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},b,\tilde{a}\right)\right\}$$

(3.43)

表 3.1 を用いて、(3.43)式を解くことが出来る(解法については付録 4E を参照されたい)。(3.43)式を解くにあたっては、$\hat{x}_1$ が大きくなるほど P が小さくなるが、$\hat{x}_C$ が存在する場合、圧縮塑性域の成長は $\hat{x}_C$ で一旦停留し、ς_c が大きくなることを考慮しなければならない。したがって、$\hat{x}_1=\hat{x}_C$ とした場合に得られる荷重 P （P_r）ならびに $\varsigma_c=1$、$\hat{x}_1=\hat{x}_C$ として得られる荷重の解 P （P_e）と、次に現われる最小荷重 $P_{\min}$ を比較して計算手順が決まる。すなわち

＜$\hat{x}_C$ が存在する場合＞

$P_{\min}\geq P_r$ の場合：(3.43)式で挟み内法で $P_{\min}$ 時の $\hat{x}_1$ を求める。この場合、実き裂内の状態に応じて、$\tilde{\rho}_j,\rho_j(i)$ ならびに $\hat{d}_{ij}$ の値を解くことになる（例えばガウス・ザイエル法で解くことが出来る）。得られた解を(3.40)式に代入することで、$P_{\min}$ 時の COD が求められる。

$P_r>P_{\min}\geq P_e$ の場合：$\hat{x}_1=\hat{x}_C$ ならびに $P_{\min}$ を既知として、ς_c（直前よりも大きくなっているが 1 より小さい）を未知数として(3.43)式を解く。得られた解を(3.40)式に代入することで、$P_{\min}$ 時の COD が求められる。ς_c は改たな値となる。

$P_{\min}<P_e$ の場合：$\hat{a}_C$ が消滅すると同時に圧縮降伏点が静的なそれまで完全に回復して $\varsigma_c=1$ となる。実き裂部が完全に閉口するとともに、実き裂部から直前の仮想き裂先端位置まで圧縮降伏する時点の荷重 $\hat{P}$ は、(3.29)式で $\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a}_c,0\right)\to\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)$ として、

$$\hat{P}=\frac{\varsigma_c\Pi^{(cY)}\left(\tilde{a},\tilde{c}\right)-\Theta^{(R)}\left(\tilde{a}\right)}{\Theta^{(uP)}\left(\tilde{a}\right)} \tag{3.44}$$

ただし、ここでは　$\varsigma_c=1$

となるので、

$\hat{P} \le P_{\min} < P_e$ の場合：(3.43)式で $\varsigma_c = 1$ として、$P = P_{\min}$ 時の $\hat{x}_1$ を求める。そしてその時の解を(3.40)式に代入することで、$P_{\min}$ 時の COD が求められる。

$P_{\min} < \hat{P}$ の場合：　$\hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a}_c, 0\right) \to \hat{\Pi}^{(Y)}\left(\tilde{a}, \tilde{c}\right)$ とした(3.29)を解いて、$\tilde{a}$ ならびに *EDS* を求める。仮想き裂はここで解かれた $\tilde{a}$ まで成長する。この解を(3.30)式（ただし $\hat{E}^{(Y)}\left(b, 0, \tilde{a}_c, \tilde{a}_c\right) \to \hat{E}^{(Y)}\left(b, \tilde{c}, \tilde{a}, \tilde{a}\right)$ と置き換える）で $P_{\min}$ の COD を求める

＜ $\hat{x}_C$ が存在しない場合＞

圧縮型仮想き裂場では圧縮降伏点の回復は圧縮塑性域が $\tilde{a}$ に達した時点でしか生じない。ただし $\varsigma_c > 1$ の場合には圧縮塑性域が $\tilde{a}$ に達しても降伏点は以前の値をそのまま保持する。

圧縮塑性域先端が $\tilde{a}$ に達するまでは、(3.43)式が成立する。また、圧縮塑性域先端が $\tilde{a}$ に達した瞬間では(3.44)式が成立する。(3.44)式を解いて得られる P_* ならびに $\left[0, \tilde{a}\right]$ 間が圧縮降伏する時点の(3.45)式で与えられる荷重 $\hat{P}$ と $P_{\min}$ の大小により、以下のように取扱う。

$P_{\min} \ge P_*$ の場合：(3.43)式において、$\hat{x}_1$ を $\left[\tilde{c}, \tilde{a}\right]$ の範囲で変動させ、P が $P_{\min}$ になるように表 3.1 と(3.42)式を用いて、収束計算をする。得られた解を(3.40)式に代入して $P_{\min}$ 時の COD を求める。

$P_* \ge P_{\min} > \hat{P}$ の場合：P_* 時に圧縮塑性域先端が $\tilde{a}$ に達する。この時点で ς_c が 1 より小さければ、その後の除荷とともに圧縮塑性域先端が $\tilde{a}$ に留まるが、き裂閉口域に働く圧縮応力が大きくなり、き裂閉口域も拡大し、同時に ς_c が 1 に向かって増加する。この場合 $\hat{x}_1 \to \tilde{a}$ とおいた(3.43)式を解けば $P_{\min}$ 時における、き裂閉口域の作用応力分布が得られる。

$P_{\min} \le \hat{P}$ の場合：(3.46)式を解くことにより、圧縮型仮想き裂先端位置 $\tilde{a}$ が得られる。この過程で $\tilde{a}$ に対応する *EDS* を使用することになり、図 2.1 と同様の収束計算が必要になる。

上記から明らかなように、最初大きな圧縮側負荷により圧縮塑性ひずみ形仮想き裂が形成されていても、き裂が進行する（この場合、き裂の進行は極めて遅くなると考えられるが）とともに、引張側の負荷で最大荷重時には実き裂部は開口し、その部分は引張荷重を分担しないので、応力再配分が生じ、き裂前方の引張塑性域は大きくなり易いが、圧縮塑性域はき裂閉口だけでなく実き裂部が圧縮降伏してからき裂前方に拡大することなるので、引張塑性域の成長よりは格段に遅くなるので、最終的には引張塑性ひずみ形仮想き裂に転化する傾向にある。

そして、最小荷重直後には圧縮塑性となった領域で(3.31)式による固有変位が残留する。

3.2.5　き裂成長について

１サイクルによる疲労き裂増分は､RPG 荷重から最大荷重にいたる荷重範囲に対応する応力拡大係

数 ΔK_{RPG} をパラメタとして、以下のように与えられている。

$$\Delta c = C\left(\Delta K_{RPG_b}\right)^m \cdot \Delta N \tag{3.45}$$

ただし、ΔK_{RPG_b} ：直前の有効荷重対による ΔK_{RPG}

ランダム荷重の場合は1サイクル毎に、最大荷重、最小荷重が異なるので、(3.45)式によるき裂増分を求め、$\tilde{c} \to \tilde{c} + \Delta c$ と置き変えることになる。き裂停留現象が起きない限り、最小荷重時には、新しく進展した領域（き裂先端部）は圧縮降伏していると考えられる。したがって 1 サイクル毎にき裂が進展する（$\Delta N = 1$）とした取扱いをする場合、き裂前方の固有変位片が実き裂に取り込まれる際の時期や大きさの変化を考慮する必要はないと考えられる。

すなわち、疲労き裂が除荷過程で進展するなら、き裂先端部が押しつぶされて進展すると考えられるので、進展部は圧縮降伏していると考えられる。一方引張過程で進展するなら、延性的にひきちぎられて進展するので、最大荷重近傍で進展するため大きな固有変位片として取り込まれるが最小荷重時には容易に圧縮降伏することになると考えられる。

したがって、1サイクル毎に疲労き裂を進展させる場合には進展する領域は圧縮降伏するので、き裂進展により圧縮降伏域がき裂前方で大きくならないので、進展計算上は最小荷重時に $\tilde{c} \to \tilde{c} + \Delta c$ とするだけで RPG 荷重（3.2.1 項）の計算に移ればよい。

しかし、一定荷重振幅やブロック荷重が作用した場合には、一度に数百～数千サイクル分進展させた方が計算時間の短縮が図れる。この場合には一度に進展させる領域が広くなるので、この領域に働く接触応力が荷重にある程度影響を与え、一旦実き裂に取り込まれたら圧縮降伏しにくくなり、実き裂部に形成される固有変位は大きくなりがちである。そのため 3 編に示したように塑性収縮係数が導入されてきた。このことから塑性収縮係数は一度に進めるき裂増分と関連していると考えられる。

3.3 疲労限設計が成立しない理由の考察

1900年初頭頃から疲労限設計（構造物には、一生を通じて疲労限を越える応力振幅が働かないようにすれば疲労損傷は起こらないと期待する設計）を適用した多くの構造物が建造された。しかし、有効に働かない事例にたびたび遭遇し、S-N 曲線の傾きの領域の時間強度と構造物に作用する応力振幅から求められる累積疲労被害度 D をある値（経験工学による値）以下にする設計法（これを**疲労損傷度設計**と呼んでいる）が採用されてきた。すなわち、図 3.12 に示すように S-N 曲線上に、評価したい構造物の部位に作用する応力振幅（S-N 曲線の縦軸の応力と同じ定義の振幅）の累積頻度分布を描き、その内の 1 つの応力振幅レベル

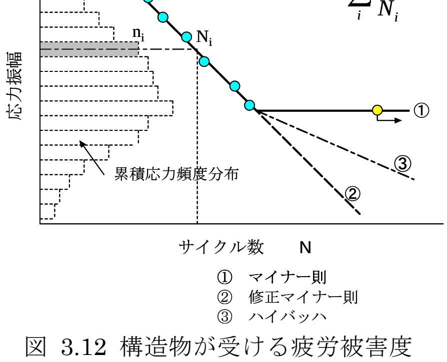


図 3.12 構造物が受ける疲労被害度の定義

n_i と S-N 曲線での破断までの回数 N_i との比をすべて加えた D をある値以下とする手法である。ここで S-N 曲線は、実構造に働く応力比と同じものに修正されることが一般的であるが、溶接まま構造物では溶接残留応力の影響を考慮したS-N線図を適用する場合、Dの計算には残留応力は考慮されない。

ここで、S-N 曲線として、①の疲労限を考慮する Miner 則（$D=1$でき裂が生じるという仮説をManer 則とよんでいる)、②疲労限を無視して有限寿命領域の直線を外挿する修正 Miner 則、そして③の疲労限以下の領域に対して上記の中間の傾きを有する Haibach の方法[24]のいづれかが、実設計で D の計算に用いられてきた。しかし、①での設計で、疲労損傷を生じた構造物が多く認められ、ランダム荷重下では疲労限が生じないとして②による設計がなされたが、これは厳しすぎるということから、最近では③の Haibach の方法で D が与えられたものを用いることが一般的である（他にもReppermond の方法[25]や、応力範囲打ち切り限界を考慮したものなどがある)。これらは、線形被害則の最も単純なものの Miner 則、すなわち$D=1$で損傷が生じるという仮説を応用したもので、③の手法での D のばらつきは 0.1~10 と寿命評価に約 100 倍の差があることになり、この手法は殆ど機能していないといって良い。

第２編で示したように 1960 年代初頭に油圧サーボ疲労試験機を用いて航空機モデルに変動荷重を作用させた大々的な疲労試験が行われた。荷重スペクトルを同じとした全くランダムな荷重下と、Gassner の８段階ブロック荷重下の疲労試験で、前者が短寿命となる結果を得たため、航空機と自動車分野は実機を使った耐久試験で疲労リスクを回避するようになったが、他の構造物などは経済的理由から上記 Dを経験工学をもとに、ある小さな値に決めた疲労損傷度設計が行われている。

損傷を経験すると、設計時には考えていなかった大きな振幅応力が作用したのではないかという結論で、構造詳細の変更や増厚による作用振幅応力を小さくするという対策が採られることがなされてきた。しかし、損傷事例の中にはどう考えても疲労限以上の応力振幅が作用していなかったというものがあり、ランダム荷重下では疲労限が消滅するからとの解釈がなされてきた。しかし、なぜランダム荷重下で疲労限が消滅するのかの物理的・現象的説明は未だなされていない。

さらには、第１編図 2.5～図 2.6 に示したように、Dは一定にならず、過大荷重は疲労寿命を縮めるように考えられるが、第３編図 3.27～図 3.29 やコメット機事故では、延ばす効果があると考えられる。両者の違いは、固有変位が一様に生成されるか、弾性体に囲まれた一部分に分布して生成されるかによるものだと考えられるが、このことは殆ど認識されていない。

すなわち、前者の場合、第３編４章で示したように、繰返しによる材料の軟化が生じることが、過大荷重で短寿命となるが、応力集中のために局所的に固有変位が形成される場合には、材料の軟化に加えて残留応力が作用するようになり、過大荷重が作用した後には大きな圧縮残留応力場を形成させ、かえって長寿命になるという全く反対の現象が生じることになる。疲労限設計が機能しなかった事故は枚挙にいとまがないほど生じていると考えられるが、それらの多くは外力を正確に推定することが

難しいこともあり、予想出来なかった大きな荷重が働いたためであるという理由ずけがなされている。しかし、疲労限以下の応力振幅だけしか働いていないはずであるが、疲労損傷を起こした事例もある。

明らかに疲労限設計が成立しなかった最近の事例として、ドイツの高速鉄道の脱線事故がある。図 3.13 は 1998 年 6 月 3 日に起こった 14 両編成のドイツ高速鉄道 ICE-1 が時速 200km/h にて，ミュンヘン～ハンブルク間を走行中，エシェデ駅の手前 550m にて脱線し，跨線橋の橋脚に激突して，101 名の死者と 105 名の負傷者をもたらす大惨事後の救援活動状況である。車輪は図 3.14(a)に示すようにゴム弾性車輪が使用されおり、事故後 (b) に示すように、タイヤがディスクからはがれていた。そして、はがれたタイヤ内面には図 3.15 に示すように疲労で生じる典型的な貝殻模様が残っていた。これに関し、ドイツのハノーバーの地方裁判所で裁判となり、鉄道関係の疲労の専門鑑定人として、平川氏（元住友金属中央研究所研究員、当時九州大学教授）が招聘され、4 年半にわたる係争の結果、｢事故の原因は，タイヤ内面から疲労き裂が発生して進展した結果である。しかし，きわめて低い確率で，何億分の一とか，そういう確率で起こる現象がたまたま起こった，きわめてまれな不幸な事故」という神のみぞ知る原因で生じたという判決となった [26)]。

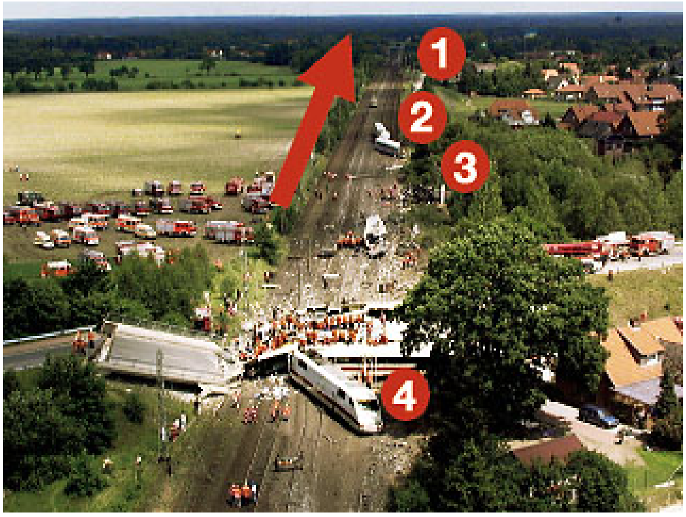


図 3.13 1998 年 6 月に起こった ICE-1 高速鉄道の脱線事故全景

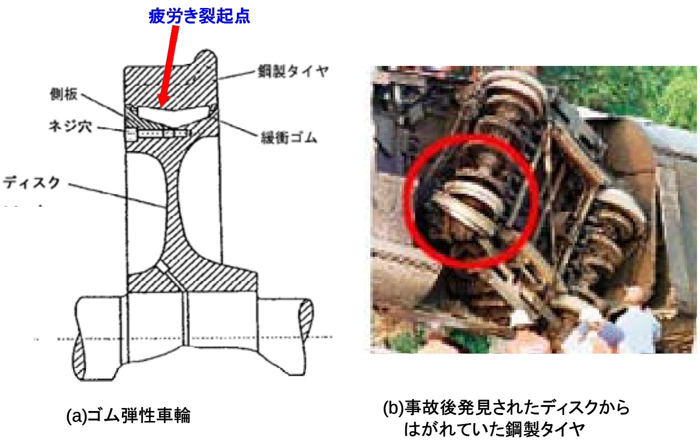


図 3.14 事故時使用されていたゴム弾性車輪の形状と、事故時に発見されたディスクからはずれていた鋼製タイヤ

図 3.16 は平川氏が ABAQUAS の汎用 FEM を用いて計算したタイヤ内面の円周方向応力である。き裂はタイヤ内面の弾性ゴムに接する場所で、本図で最も高い応力が生じている位置から、車輪外側に向かって伝播している。そして、ドイツから空輸された車輪タイヤから試験片を切り出した試験片を用いて、疲労耐久限度線図を図 3.17 のように求めている。さらに実物車輪の疲労試験により，き裂の発生を再現する試験を行っている。フレッティングの影響をみるために 2×10^7 回までの繰返し，最大荷重 280kN という，静的輪重の 3.5 倍という信じられないような荷重で疲労試験を行っている。さ

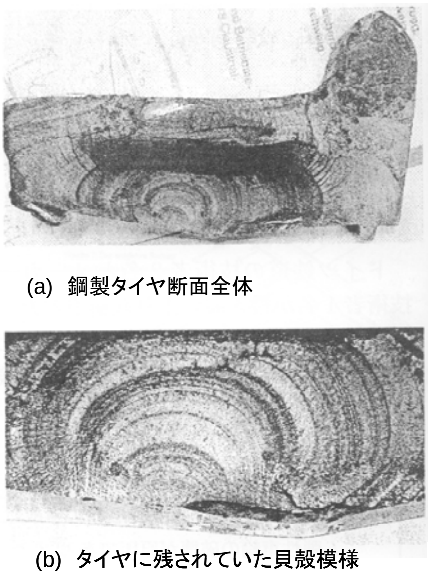


図 3.15　タイヤ内面に生じていた疲労破面

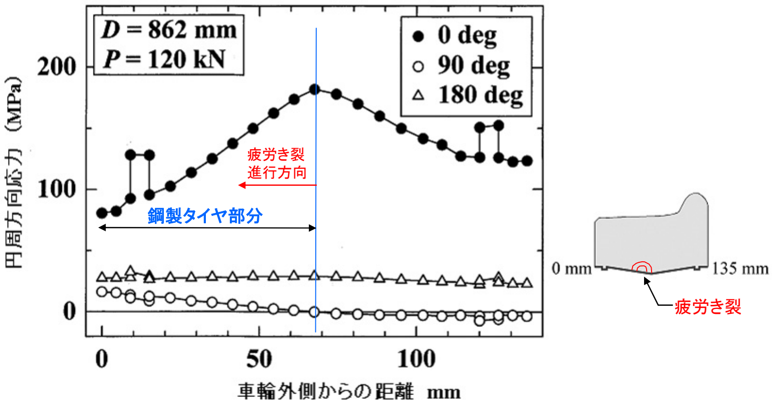


図 3.16　汎用 FEM プログラム ABAQUAS を用いて計算された円周方向応力（荷重は設計荷重で車輪の直径は事故時の 862mm で計算されている。角度 0 度は車輪の事故破面が真下にきた場合を示している）

らに静的輪重の 3.85 倍の輪重をかけた試験も実施し、前者では疲労き裂は入っていないが、後者は破壊し、疲労耐久限度線図が正しいと主張している。そして、静的輪重の 4 倍程度まで大きな荷重が作用しないと疲労破壊しないという結果を得て、極めて低い確率でおきた事故と断じている。

　しかし、疲労損傷に関しては、統計的なばらつきで説明できる程度にしか生じていないと云うには、あまりにもそこかしこで損傷が起こっている。当該ゴム弾性車輪の外径は製作時 920mm であるが、事故時には 862mm となっており、偏磨耗による乗り心地改善の目的から 4 回真円加工がなされている。輪重が一定の場合、一回転する場合の応力振幅（図 3.16 参照）は輪の外径に反比例することが分かっている。したがって、真円加工後、少し加工前よりも最大応力が大きくなっていたことになる。

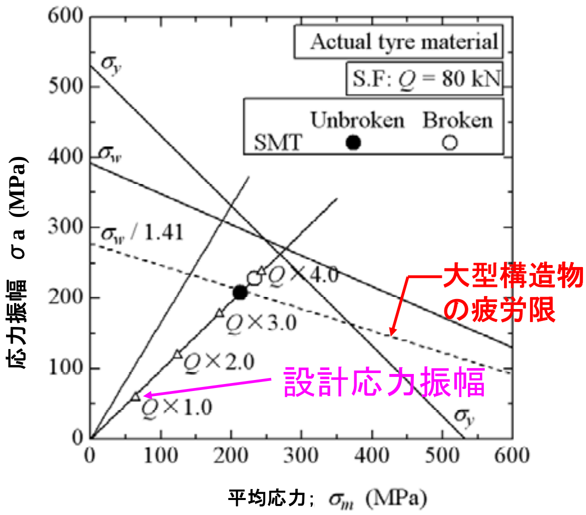


図 3.17　ドイツから取り寄せた実物のゴム弾性車輪に、設計荷重の 3.5~3.9 培の荷重を与えて疲労試験した平川による結果（図中には、小型試験片で得られた疲労耐久線図が示されている）

　ところで、図 3.18 は S-N 曲線上に、一定荷重振幅下で停留き裂が存在する範囲を示した模式図である。ここで疲労限より低い黄色で無理つぶした領域では、数 10μm から 1mm 以下の長さの微視的停留き裂が存在している [27]。したがって、疲労限以下の一定荷重振幅がき裂発生寿命以上繰返し作用すると、微視的なき裂が発生し、ある大きさ以上には成長せず、微視的停留き裂になると考えられる。第 3 編 4 章から考えられるように、繰返し負荷により、見掛け上の降伏点が静的降伏点から、ど

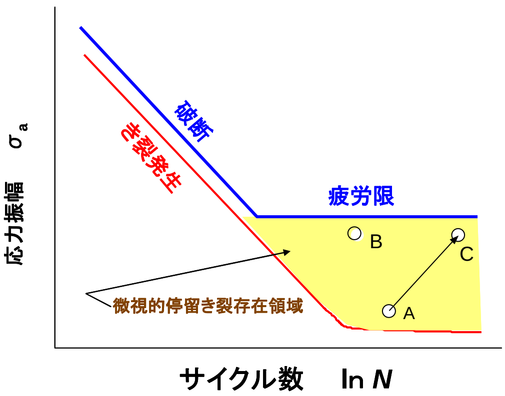


図 3.18 S-N 曲線と微視的停留き裂の存在領域

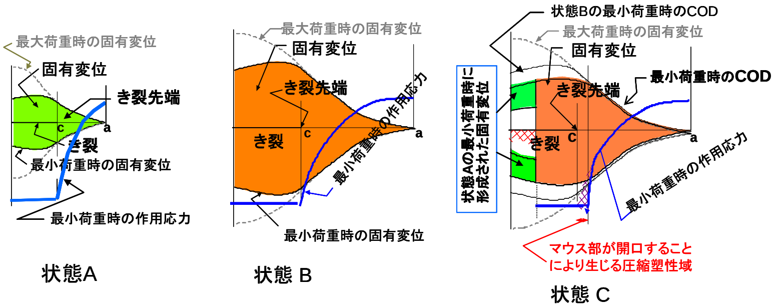


図 3.19 微視的停留き裂の状態（A、B）におけるき裂を取巻く固有変位と最小荷重時の応力分布と、A の状態から B のレベルの繰返し負荷を与えた状態 C のき裂を取巻く固有変位と最小荷重時の応力分布の模式図

んどん低下していき、ある大きさに収斂することになる。そしてせん断き裂が発生・成長する。3.1 節ならびに 3.2 節から考えられるように、き裂を取巻く部分には固有変位が形成される。応力集中場では、この固有変位の周りは弾性領域であり、これに拘束された状態で存在する。そして、き裂が停留するのは微視的には結晶粒界の硬いところに実き裂先端が位置し、最小荷重時にき裂前方に圧縮塑性域が形成されないようになった状態と考えられる。

ここで応力集中部から疲労き裂が応力の小さい方に向かって進行する疲労き裂を考える。微視的停留き裂となるのは模式的には図 3.19 の状態 A もしくは B のようになると表せる。ここで、停留き裂長さは結晶粒の大きさが最小で、3.2.2 項における負荷過程における引張側降伏点の回復現象を考慮すると、き裂が成長して、圧縮側繰返し降伏点が静的圧縮側降伏点に回復する時の大きさが最大になると考えられる。すなわち、一定荷重振幅下では圧縮側の繰返し下の降伏点にまで低下した状態での圧縮塑性域の先端に、最小荷重時には留まり、き裂が進展して圧縮塑性域が成長しようとするが、圧縮側降伏点が静的なそれに回復するまでは、き裂前方には圧縮塑性域は生じないことになる。

応力振幅が大きくなるほど、最小荷重時に形成される圧縮塑性域は大きくなる。疲労き裂が結晶粒界を超えるか否かは結晶粒界の強度にも依存するし、最初の結晶粒を実き裂が越えると除々にき裂開口モードが生じ圧縮塑性域が前方に移行するので、一概に応力振幅が大きいほど停留き裂長さが大きくなるとは云えないが、概して疲労限に近い状態ほど、微視的停留き裂は長くなるものと考えられる。

そこで、状態 A のように小さな一定荷重振幅が作用し ℓ_A だけき裂が成長した後、状態 B が生じた荷重振幅を作用させた状態 C の場合を考える。この場合、ℓ_A は極短いので、状態 B と同じ最大荷重が作用した場合の状態 C の COD は、状態 B の最大荷重時の COD とほぼ同じとなる。したがって、マウス部から ℓ_A 間を除いて、状態 B で生じた固有変位が最大荷重直後に形成される。当然マウス部から ℓ_A 間には、状態 A の応力振幅によって最小荷重時に形成された固有変位が形成されたままになっている。そして、除荷されて最小荷重になると、マウス部から ℓ_A 間では、状態 A と同じものしか固有変位

が形成されておらず、き裂開口モードも生じだしており、実き裂が ℓ_B まで進展した後の $\ell_B - \ell_A$ 間の固有変位が突っ張りあい、マウス部から ℓ_A 間は開口し、状態 A で働いていた圧縮応力が解放されることになる。そのため、場合によっては、き裂前方に圧縮塑性域が形成されることも生じ得る。

すなわち、応力集中場においては、疲労限以下の応力振幅しか作用しなかったとしても、小さい荷重振幅で少しき裂（微視的停留き裂あるいは、それよりより小さいき裂）が生じた後に、より大きな応力振幅が作用すると、き裂が停留しないこともある。

上記 ICE の脱線事故では、車輪を 4 回真円加工し、その都度輪径が小さくなり、輪径に反比例して作用応力振幅が大きくなっており、しかも図 3.16 に示すように応力分布がタイヤ内面から車輪外側に向かって小さくなっている。高々疲労限の 1/3 ぐらいの小さな荷重振幅しか作用していなかったのに ICE の鋼製タイヤが疲労破壊したのは、真円加工しても外輪に生じるき裂は切削されるが、タイヤ内面には停留き裂が生じており、これに真円加工でタイヤ外径が小さくなり、増加した応力振幅によって、停留き裂が再度進展し、停留き裂となり、再度進展というように、これを繰り返しついに 4 回目には進展してしまったためと考えられる。

すなわち、疲労限設計が行われていても、疲労限以下の振幅が作用して微視的き裂が生じた後、より大きな疲労限以下の振幅を有する負荷がかかると停留しないで、き裂が大きくなり、これが繰返されて、ついには破断することも起こり得ることになる。したがって、疲労限以下の振幅しか作用しないから、疲労破壊が生じないとは言い切れないことになる。この現象を起こさせないためには、疲労限以上の大きな振幅負荷を初期に作用させれば、以後の疲労限以下の小さな負荷ではマウス部が開口することがない（ただし、塑性変形部が選択腐食する環境ではこの効果は期待できないので、その対策が必要となるが）ので、疲労き裂は停留することになるものと想像される。

先に示した丸棒試験片に対する第 2 編図 2.5 の結果からは、過大荷重は寿命を短寿命とするということになり、これが疲労の専門家の頭のなかにあるので、上記のように真反対の結果が生じる現象を受け入れがたいと想像される。しかしき裂伝播に関しては、第 3 編図 3.29 のようにスパイク荷重が寿命を延ばすことは理解できるものと考えられる。疲労き裂の発生もき裂伝播の延長線上の出来事であるならば、上記の考察は納得できると考えるが、この現象を実験で確認することが必要である。すなわち細心の注意を払った長時間にわたる実験となるが、切欠材に疲労限以下の応力振幅を与え、き裂を発生させ、出来れば停留状態にした後、前よりも大きな疲労限以下の繰返しを与えて、上記のような結果が生じるのかの検証が必要であろう。

1997 年の定期点検で発見され､マスコミをにぎわした首都高速道路の橋脚の疲労き裂についても、上記と同じことが云える可能性がある。公団は 2000 年に、橋脚補修検討委員会を設置し、き裂の原因について、通行車両が橋脚に与える荷重、荷重が橋脚の鋼材に及ぼす影響などをコンピューターによる仮想実験やき裂の断面の顕微鏡観察で分析し調べいる。その結果、「想定を大きく上回る重さの車両

が繰り返し通行することで、橋脚の溶接部分が金属疲労を起こし、き裂が生じて進展した」と断定している。すなわち、首都高での法定重量の２５トンを上回る４０−５０トンのトラックが通行することで、橋脚に繰り返し大きな荷重が作用し、金属疲労が起きたと断定している。また鋼部材では、平成 14 年まで疲労を考慮した設計をしていないことが起因して、疲労き裂が生じたと判断している[28)]。

しかし、法定重量の２５トンによる応力振幅は、疲労限よりかなり小さいはずである。ICE と同じように、３倍以上の安全率を見込んでいると考えられる。すなわち疲労を考慮した設計をしていないことが安全率をかなり大きく設定していることを物語っている。したがって４０−５０トンのトラックによる応力振幅も疲労限以下であると考えるのが常識であろう。

過酷な使用状況による損傷は年々増加する一方で、高架橋約 240 キロメートル、約 1 万 2000 径間のうち、これまでに補修を必要とする構造的損傷が発見された径間は約 3500 径間（約 30%）であると報告されている[28)]が、疲労限を越えた応力振幅が作用しているのであろうか？ 疲労限を越えた応力振幅が日常茶飯事に作用しているならば、疲労き裂は加速度的に成長するものと考えられる。すなわち、疲労限以上の振幅とはなっていないが、社会の発展にともない年々荷重振幅が平均的に増加していったことが原因で疲労き裂が発見されるようになった可能性が否定できないであろう。これが真であれば、積極的に疲労限相当の振幅荷重（場合によっては、さらに大きな荷重を与えることも良い結果を与えるかの知れない。ただし、固有ひずみの集中する箇所で選択腐食が生じることがないことを確認しておく必要はあろう）を作用させることによって、長寿命化がはかれる可能性がある。き裂が大きく成長した後においても、大きな荷重により引張りの固有変位が形成されれば、伝播寿命は長くなるので、疲労限以上の荷重を作用させても延命化が図れると考えられる。たしかに、疲労寿命を延ばすには、作用応力を小さくすることが、最も効果があるが、荷重が時代ともに大きくなるのも、疲労に大きな悪影響を与えるものと考えられる。

すなわち、作用応力振幅が疲労限より小さいとしても、小さい応力振幅が作用し、停留き裂が生じた状態から、疲労限以下ではあるが以前よりも大きな応力振幅が作用すると、き裂は進展しだす。そして停留き裂になることもあるが、この状態が繰返されると大きなき裂にまで成長することが起こり得ることになる。したがって、疲労限設計を機能させるためには、初期段階で疲労限より少し大きな荷重振幅を与えておくことが必要と考えられる。なお、き裂が大きくなっていたとしても、引張側過大荷重を作用させれば、図 3.29 に示したように長寿命化させることが出来る。当然この過大荷重によって、大きな永久変形を生じさせないことはもちろんであるが、脆性破壊を引き起こさないなどの検討を必要とする。

これまで疲労限設計が成立しない事例にたびたび遭遇し、疲労限以上の応力振幅となる負荷が作用したためと解釈し、主として Haibach の方法を使用した疲労損傷度設計がなされてきた。しかし、実際は疲労限以上の応力振幅となる負荷は殆ど作用しておらず、停留き裂となるき裂が生じた後、疲労

限以下ではあるが、以前よりも応力振幅が大きい負荷が段階的に作用したために、疲労限設計が成立しなかった事例が多くあると推察される。したがって、停留き裂になるき裂が入る前に、疲労限レベルの応力振幅となる負荷を与えておくと、疲労限設計が機能すると考えるのが正しいと考えれるのではなかろうか？

4. 重ね合わせの原理を適用した *K* 値推定

3 章までに応力集中箇所から疲労き裂が発生して、大きなき裂になり、板厚貫通き裂になる寿命とその過程において、脆性破壊が生じるか否かの判定を定量的に行い得るアルゴリズムを説明した。そこでは、き裂成長に伴う外力による K 値、残留応力による K 値ならびにき裂面に単位応力が作用する場合の K 値が必要になる。これらは FEM などの離散的な手法によって求めることができるが、煩雑になりすぎる。そこで本章では、簡易的にこれらを与える手法を紹介する。

4.1 応力集中場に存在する表面き裂の *K* 値推定

溶接構造物における疲労き裂は構造的応力集中箇所の溶接止端部から発生することが多い。7 章に示したように、疲労き裂発生寿命を議論する場合には、せん断モードからき裂開口モードに移行しだす瞬間の表面き裂最深部における K 値を与える必要がある。

図 4.1 は溶接構造で生じる疲労損傷の典型箇所を示している。その初期段階としてブラケット端部の回し溶接止端部からせん断き裂が主板（板厚 t ）に入り、最初の結晶粒界に達した時点の表面き裂を模式的に示す。結晶粒径 d_0 は通常数十ミクロンであり、主板の板厚に比べて非常に小さい。そして最初の結晶粒界に達するまでは、き裂進展を阻止する連続した障害物がないので深さ方向と幅方向のき裂進展量は殆ど同じと考えられる。したがって、き裂深さ a と表面き裂の表面におけるき裂半長 b はほぼ等しいと考えられる。そして、第 3 編で説明したように、この段階からき裂開口モードが生じだすと仮定されている。

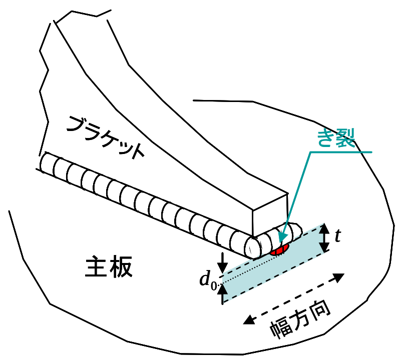


図 4.1　主板に配置されたブラケット端部の回し溶接止端部に発生した直後の表面き裂

この段階のき裂は $a \approx b \approx d_0$ であるため、作用応力は幅方向には一様であると取り扱える。しかし、回し溶接止端位置での主板板厚断面内のき裂垂直方向応力は止端部近傍では急峻な応力勾配となっている。重ね合せの原理からこの表面き裂のき裂面にこの作用応力と等しい内圧が作用した場合の K 値を与えれば良い。 d_0 は非常に小さいため、この間の作用応力はほぼ線形的に変化すると仮定できる。表面での作用応力と表面から d_0 離れた位置での作用応力を直線的に結んだ直線から見掛けの裏面応力

を求める。そして表面応力と見掛けの裏面応力の差の半分を曲げ応力 σ_b、そして表面応力と見掛けの裏面応力の平均値を引張応力 σ_m とし、(1.81)式～(1.84)式で $\phi=\pi/2$ とすれば、最深部の K 値を求めることが出来る。この場合(1.83)式では $H_1=1-0.23(d_0/t)$、$H_2=1-1.34(d_0/t)-0.03(d_0/t)^2$（ただし、$t$：板厚）、(1.84)式では、$H_1=1-0.42(d_0/t)$、$H_2=1-1.34(d_0/t)-0.03(d_0/t)^2$（ただし、(1.81)式～(1.84)式で $a\to d_0$）となり、さらに $d_0\ll t$ なので $H_1\approx H_2\approx 1$ となり、(1.82)式で $H\approx 1$、$F_t\approx F_b$ となるので、表面での応力が主板内で一様に作用した場合の、最深部の K 値とほぼ等しくなる。

しかし、回し溶接止端近傍の応力分布は下に凸の曲線となるため、これよりき裂が成長していく段階では、上記の取扱いは少し K 値を大き目に与えることになる。したがって、より正しい補正は図 4.2 に示す[⊕]ように、上記の一様引張と面外一様曲げが作用する表面き裂の K 値（図 4.2(a)）に、表面き裂最深部を含む断面上に働く応力が、この断面を有する平面のき裂内に内圧として働く問題による K 値を乗じ、この断面に引張と曲げが重畳して作用する K 値で除すという Maddox 流の修正[29)]が使用できる。

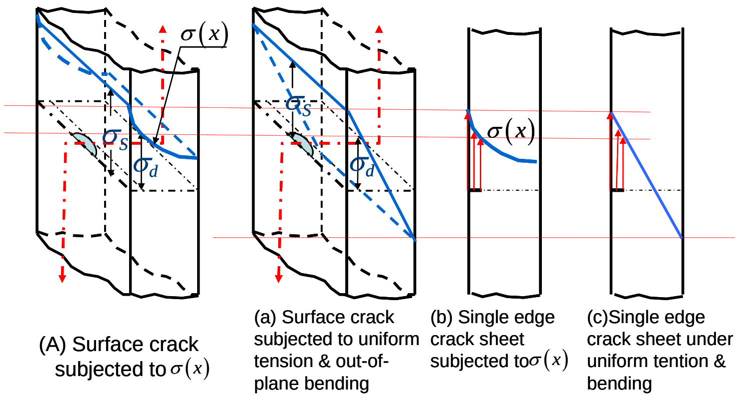


図 4.2 応力集中部に存在する表面き裂最深部の K 値近似（幅方向は一様応力）

なお、この段階におけるき裂結合力による K 値は平面ひずみ状態下における降伏応力（短軸下における降伏点 σ_Y と平面ひずみ状態の塑性拘束係数 λ_ε の積）と等しい圧力が一様にき裂面に働くとして求められる。

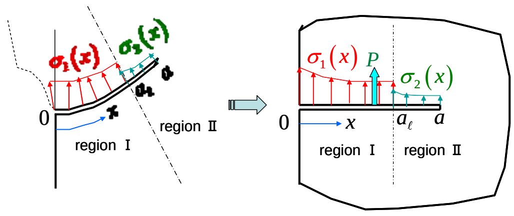
4.2 過去のき裂が現在のき裂の K 値に及ぼす影響

無欠陥応力集中箇所において疲労き裂が 0 の大きさから拡大していく過程をシミュレートするためには 4.1 に示した、最初の結晶粒界に到達した時点の半円状表面き裂の K 値に加えて、表面き裂進展に伴うアスペクト比変化を求めなければならない。アスペクト比変化については 6 章を参照されたい。さらに下記の近似法が構造物中のき裂の K 値推定に役立つ。

構造物中の疲労き裂成長挙動を推定するためには、同一形態だけでなく、形態が変化する場合についてもき裂成長に伴う K 値変化を求めなければならない。例えば、面材に表面き裂として入ったき裂が板厚を貫通後、裏面の防撓材に進展して板厚貫通き裂となったり、反対に防撓材を進展してきた板厚貫通き裂が直交交差部材に表面き裂として入るという場合などである。

⊕　第 2 編の図 1.28 では、最深部が表面の局部的応力集中部を越えて板厚方向に直線的な応力分布部まで到達した場合の K 値近似法であるが、ここでは局部応力場に最深部がある状態のため、記述のような近似をすることにしている。

いま、図 4.3a)に示すようにき裂が領域 I を進み、領域 II に入った場合のき裂を考える。構造要素にはき裂は一般的には湾曲して入る（き裂により構造要素の境界力が変わらなければ、疲労き裂は変動荷重で生じる主応力に垂直に進展する）。この場合、b)図に示すように、き裂長はガース長を採り、自由縁に垂直に直線的に入るとする。そして、実際のき裂に作用している（無き裂状態で働いていた）法線方向応力が直線き裂に作用すると理想化できる。



a) 実際のき裂　　b) き裂 a)の理想化

図 4.3　K 値の観点からみた場合の分布応力を代表させる集中荷重

すなわち、構造要素 I でのき裂進展経路に沿う、無き裂状態で働いていた法線方向応力分布を $\sigma_1(x)$（$0 \le x \le a_\ell$ に対して）、II でのそれを $\sigma_2(x)$（$a_\ell < x \le a$ に対して）とする。この場合の K 値は (1.52)式より

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{a_\ell} \frac{\sigma_1(x)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \left\{ 1.297 - 0.297 \left(\frac{x}{a} \right)^{1.25} \right\} dx + \int_{a_\ell}^{a} \sigma_2(x) f(a,x) dx \tag{4.1}$$

$$\text{ただし、}\quad f(a,x) = \frac{2}{\sqrt{\pi a}\sqrt{1-(x/a)^2}} \left\{ 1.297 - 0.297 \left(\frac{x}{a} \right)^{1.25} \right\} \tag{4.2}$$

ここで、$a \ge a_\ell$ の領域 II では応力が働いていないと仮想し、a_ℓ よりき裂が大きくなることによる領域 I の K 値に及ぼす影響を調べる。すなわち $a = a(a > a_\ell)$ の状態での領域 I による K 値は

$$K^{\mathrm{I}} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{a_\ell} \frac{\sigma_1(x)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \left\{ 1.297 - 0.297 \left(\frac{x}{a} \right)^{1.25} \right\} dx \tag{4.3}$$

そして、$a = a_\ell$ での K 値は

$$K_\ell = \frac{2}{\sqrt{\pi a_\ell}} \int_0^{a_\ell} \frac{\sigma_1(x)}{\sqrt{1-(x/a_\ell)^2}} \left\{ 1.297 - 0.297 \left(\frac{x}{a_\ell} \right)^{1.25} \right\} dx \tag{4.4}$$

構造要素の表面近傍にはガセットやブラケットなどの応力集中が存在するが、応力集中部から少し離れると構造要素には一様引張と面内曲げ応力という所謂公称応力だけが作用すると近似できる。そこで、領域 I には引張と曲げが働いていると仮想する。そこで、$\sigma_1(x) = C_0 + C_1 x$（ただし、$C_0, C_1$ は定数）と置く。ここで、

$$\gamma = \frac{C_1 a_\ell}{C_0}\text{、}\ \alpha = \frac{a_\ell}{a} \quad , \quad \beta = \frac{x}{a_\ell} \tag{4.5}$$

とおくと

$$\frac{K^{\mathrm{I}}}{K_\ell}=\frac{\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{(1+\gamma\beta)}{\sqrt{1-(\alpha\beta)^2}}\left\{1.297-0.297(\alpha\beta)^{1.25}\right\}d\beta}{\int_0^1\frac{(1+\gamma\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{1.297-0.297\beta^{1.25}\right\}d\beta} \tag{4.6}$$

そこで下記の $\Phi(\gamma,\alpha)$ が定義されている。

$$\Phi(\gamma,\alpha)=\sqrt{\alpha}K^{\mathrm{I}}/K_\ell=\frac{\int_0^1\frac{\alpha(1+\gamma\beta)}{\sqrt{1-(\alpha\beta)^2}}\left\{1.297-0.297(\alpha\beta)^{1.25}\right\}d\beta}{\int_0^1\frac{(1+\gamma\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{1.297-0.297\beta^{1.25}\right\}d\beta} \tag{4.7}$$

図 4.4 に、$\Phi(\gamma,\alpha)$ の計算結果を示している。当然のことながら、$\alpha\rightarrow 0$ すなわちき裂が大きく成長すると、領域 I による K 値への寄与分は 0 に近づくことになる。なお、(1,7)式で K^{I}/K_ℓ を $\sqrt{\alpha}$ 倍しているのは、両者のき裂長さを形式上揃えるためのものである。また、曲げ成分が大きくなる（γ が小さくなる）ほど、前方での K 値に及ぼす領域 I の応力による寄与分が消滅しにくくなることが分かる。すなわち、領域 I の a_ℓ 近傍の応力の K_ℓ 寄与分は曲げが大きくなるほど小さくなり、マウス部近傍[♣]に働いている応力による K_ℓ 寄与分が相対的に大きくなる。a_ℓ から離れた位置の応力の K_ℓ 寄与分が大きいので、き裂が a_ℓ より大きくなっても K 値は相対的に小さくならないことがその原因であろう。上記の $0\le x\le a_\ell$ 間に働らいている分布応力 $\sigma_1(x)$ を集中荷重 P（ただし、作用点を x_1 とする）で代表させると、(4.7)式に対応する比は以下のようになる。

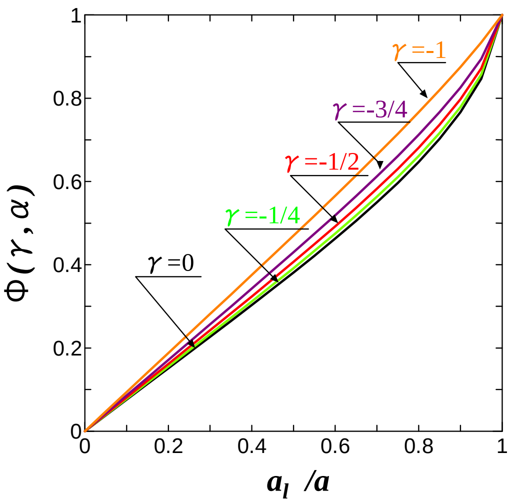
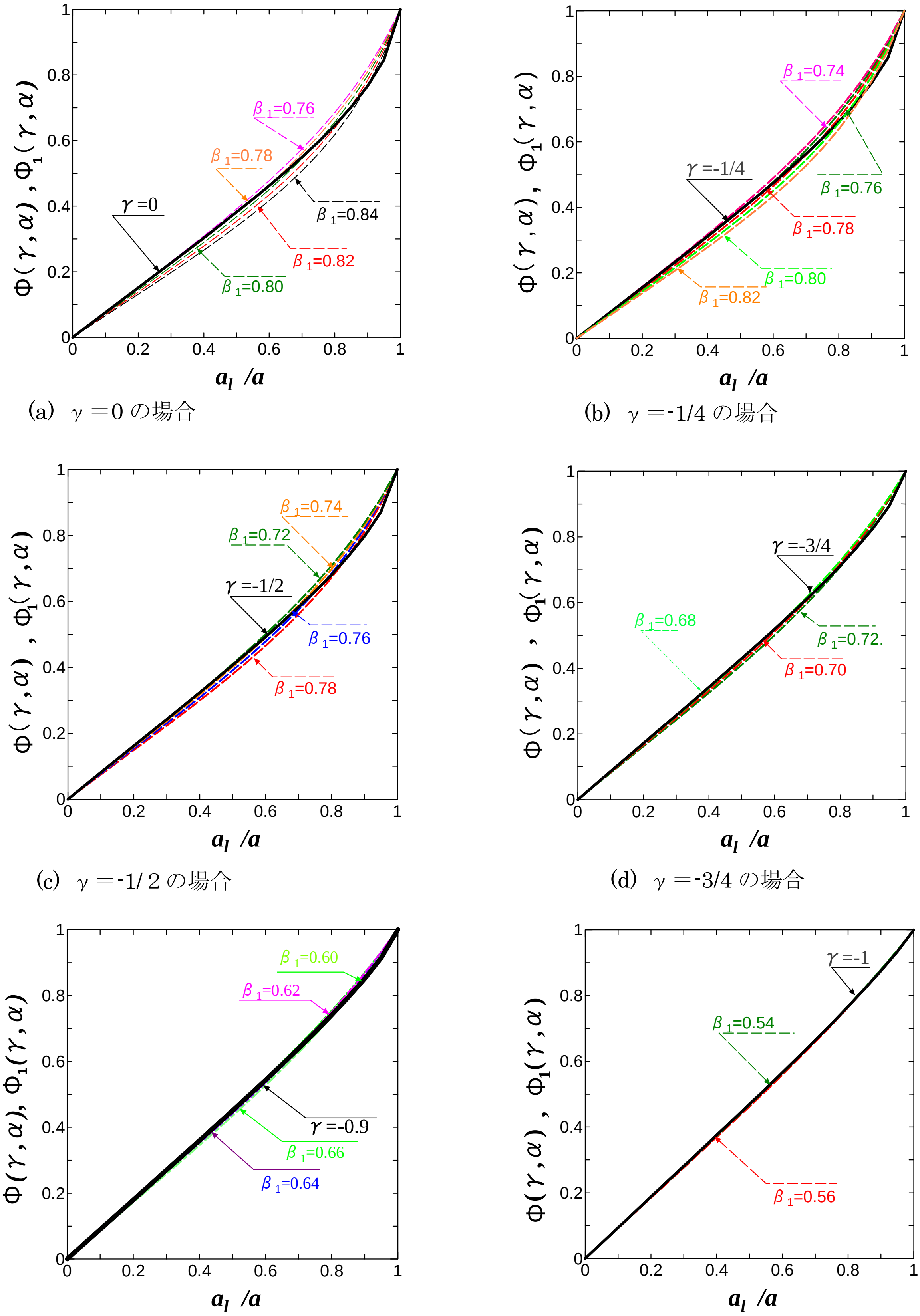


図 4.4 領域 I を超えたき裂の K 値に及ぼす領域 I の寄与分

$$\Phi_1(\gamma,\alpha)=\sqrt{\alpha}\frac{k^{\mathrm{I}}}{k_\ell}=\frac{\alpha\sqrt{1-\beta_1^2}\left\{1.297-0.297(\alpha\beta_1)^{1.25}\right\}}{\sqrt{1-\alpha^2\beta_1^2}\left(1.297-0.297\beta_1^{1.25}\right)} \tag{4.8}$$

♣ 片側貫通き裂付帯板や表面き裂の中央断面ではき裂の一方、すなわち先端側は閉じているが、他方は開口している。この他方の端部をマウス部と呼んでいる。また中央板厚貫通き裂ではき裂の両端は閉じているが、中央は開口しており、この中央をマウス部と呼ぶこともある。



(a)　γ＝0 の場合　　(b)　γ＝-1/4 の場合

(c)　γ＝-1/ 2 の場合　　(d)　γ＝-3/4 の場合

(e)　γ＝-0.9 の場合　　(f)　γ＝-1 の場合

図 4.5　部分的応力分布が前方のき裂の K 値に及ぼす影響

ここで、

$$\beta_1 = \frac{x_1}{a_\ell} \tag{4.9}$$

k^{I}、k_ℓ は、き裂長さがそれぞれ a と a_ℓ であって、x_1 の位置に集中荷重 P が作用する場合の K 値を表している。

そこで、適当な β_1 を(4. 8)式に代入し、ある γ に対する(4.7)式の $\Phi(\gamma,\alpha)$ とほぼ等しくなるような操作がなされている。その結果が図 4.5(a)～(f)である。例えば、$\gamma = 0$、すなわち領域 I に一様な応力のみが作用する場合には、$\beta_1 = 0.78 \sim 0.80$ の間に集中荷重を与えれば、領域 I より大きくなったき裂に対する領域 I の K 値寄与分を大きめ（安全側）に評価できることになる。しかし、a_ℓ より少しだけ長くなった時点の K 値寄与分は少し大き目になりすぎる。$a_\ell / a < 0.8$ の領域に着目すれば、β_1 を上記よりも大きく、すなわち仮想的に働かせる集中荷重の位置を a_ℓ 側に与えれば良い。図 4.6 には、異なる部材にき裂が突入した後の K 値の近似値を与えるという観点から図 4.5 を参照して、仮想的に集中荷重を働かせる位置と、領域 I に働く γ との関係を求めた結果が示されている。

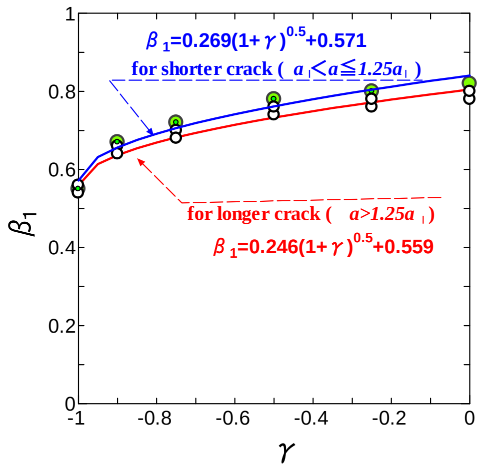


図 4.6　領域 II の K 値に及ぼす領域 I での作用応力を集中荷重で置換える位置

すなわち、$a_\ell < a \le 1.25 a_\ell$ の大きさのき裂に対しては、

$$\beta_1 = 0.269(1+\gamma)^{0.5} + 0.571 \tag{4.10}$$

$a \ge 1.25 a_\ell$ の大きさのき裂に対しては、

$$\beta_1 = 0.246(1+\gamma)^{0.5} + 0.559 \tag{4.11}$$

とすれば良い。

ここで γ は(4.5)式で定義される領域 I の応力勾配より決まる値で、a_ℓ に沿う直応力に対しての公称曲げ応力と平均応力の比の 1/2 に相当する。したがって領域 II に入ったき裂の K 値に対する領域 I の寄与分 $\tilde{K}$ は

$$\tilde{K} = \frac{2P_{a\ell}}{\sqrt{\pi a}\sqrt{1-(\beta_1\alpha)^2}}\left\{1.297 - 0.297(\beta_1\alpha)^{1.25}\right\} \tag{4.12}$$

ここで、

$$p_{a\ell} = \frac{\sqrt{\pi a_\ell}\sqrt{1-\beta_1^2}}{2\left(1.297 - 0.297\beta_1^{5/4}\right)K_\ell} \tag{4.13}$$

K_ℓ ： $a = a_\ell$ のときの K 値

図 4.7[30]にき裂前方の板厚が異なる部材が一様応力を受ける場合の K 値修正係数を示す。図中の β が 0 の場合が自由端、∞の場合が剛体壁がある場合に相当する。直交交差部材の場合は交差部材の幅（h'）は領域Ｉの板厚に比して十分大きく、$\beta=\infty$ に相当する（図 4.7 の一番下の点線）。これを多項式近似すると、

$$M_{\mathrm{A}}=-0.58\left(\frac{a}{a_\ell}\right)^2+0.14\left(\frac{a}{a_\ell}\right)+1 \tag{4.14}$$

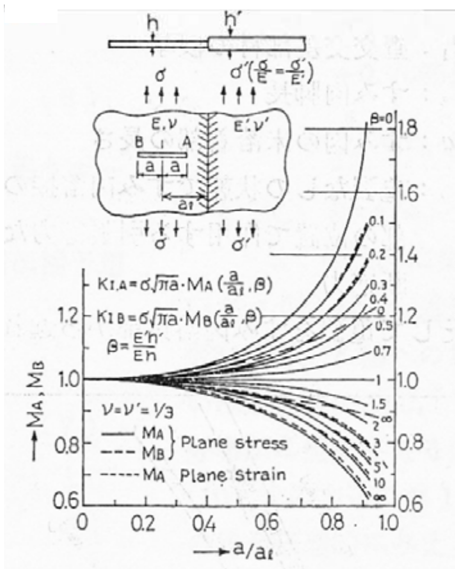


図 4.7 板厚差のある境界に近接するき裂

したがって、領域Ｉに存在するき裂の K 値は

$$K=\frac{2M_{\mathrm{A}}}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{a_\ell}\frac{\sigma_1(x)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\left\{1.279-0.297\left(\frac{x}{a}\right)^{1.25}\right\}dx \tag{4.15}$$

ただし、M_{A} ：(4.14)式

と近似的に表すことが出来る。

なお、き裂結合力による K 値は(4.1)～(4.4)式ならびに(4.15)式において $\sigma_1(x)=\lambda_\sigma\sigma_Y$ （λ_σ ：平面応力状態における塑性拘束係数）とすれば良い。

4. 3 直交交差部材に突入したき裂の K 値

前節での検討により、無き裂状態で領域Ｉに作用する応力が、領域Ⅱまで進展したき裂の K 値に及ぼす影響を、領域Ｉ内のある点に集中荷重を作用させることで近似的に表すことが出来ることが分か。この原理を利用することにより、例えば、ウェブを進んできたき裂が直交交差部材に表面き裂状に入るき裂や、ブラケットからフェイス部に表面き裂が入り裏面に達した後にウェブに入るき裂に対する K 値を近似的に与えることが出来る。本節ではこれらのき裂に対しての K 値の近似式を与える。

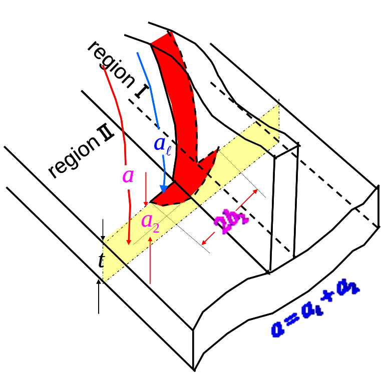


図 4.8　ウェブから面材に入るき裂

4.3.1 ウェブのき裂が直交交差部材に進入した直後のき裂

図 4.8 に示すように領域Ｉから直交交差部材Ⅱ材に表面き裂状に入ったき裂に対する K 値は、(1.99)式と(4.12)式より、

$$K=\frac{2p_{a\ell}}{\sqrt{\pi a}\sqrt{1-(\beta_1\alpha)^2}}\left\{1.297-0.297(\beta_1\alpha)^{5/4}\right\}+K_{ellip}\frac{K_R+K_L}{2K_M} \tag{4.16}$$

ただし、$p_{a\ell}$ ：(4.13)式

K_{ellip} ：一様引張＋面外一様曲げを受ける平板に存在する半楕円表面き裂最深部の K 値

$a = a_2 + a_\ell$

で与えられる。ただし、K_{elip} を構成する(1.81)～(1.84)式において、$a \to a_2$ と置換える。

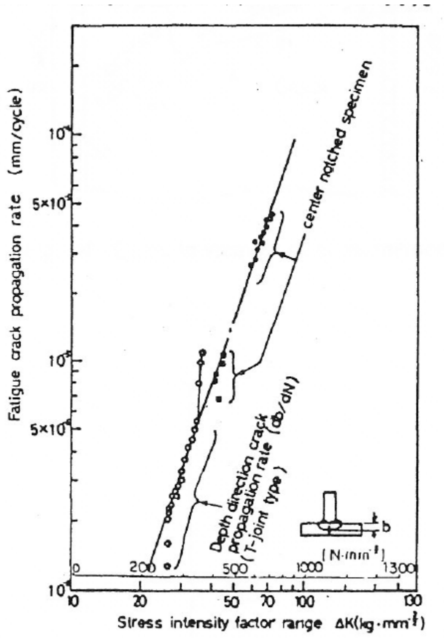


図 4.9 ウエブから進入した表面き裂の伝播速度と板厚貫通き裂の伝播速度の比較（表面き裂の K 値は(1.16)式による）

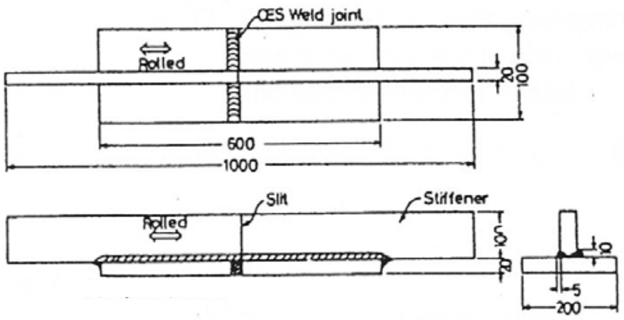


図 4.10 ウエブから平板突合せ継手ボンド部に表面き裂状に挿入させるための T 型試験片

図 4.9 は図 4.10 に示す T 継手試験片のウエブ端部を油圧チャックに装着し、繰返し負荷を与えてウエブの切り込み部より疲労き裂を導入し、(4.16)式による K 値範囲 ΔK と板厚方向き裂伝播速度との関係を調査した結果である [31]。図中には同一材料（軟鋼 KAS 鋼、板厚 20mm）の CES 突合せ溶接継手ボンド部に沿って伝播させた板厚貫通き裂の疲労き裂の疲労き裂伝播試験結果も記載されている。なお両者とも応力比は 0.05 というほぼ完全片振の条件下で試験がなされている。図に見るように、両者のデータは同一直線上に位置しており、(4.16)式の K 値近似が妥当であることが分かる✤。

4.3.2 表面き裂貫通後にウェブに入るき裂

4.3.1 項とは逆に面材を伝播する表面き裂が板材を貫通し、ウェブに入ったき裂を考える。このき裂の K 値については、1.7 節の結果から、表面き裂が板裏面に達した時点の K 値、K_ℓ をまず求めなけれ

✤ Paris の伝播則は変動荷重下や微小き裂領域では成立しないが、同じ応力比下における一定荷重振幅が作用する場合には、$\Delta K \sim da/dN$ 関係が両対数座標上で一本の直線上にのることが実験的に確認されている。したがって、図 4.9 のように K 値が明確に分かっている中央貫通き裂付き帯板に応力比を 0.05 とした一定荷重振幅を与えた場合の $\Delta K \sim da/dN$ 関係の直線上に、図 4.10 の試験片に応力比 0.05 で一定荷重振幅を与えたき裂伝播速度の計測値がのるということで、図 4.10 の試験片の K 値推定が妥当になされているとの検証になる。

ばならない。板厚の 8 割以上深くなった表面き裂の K 値は、1.7.1 項で示したように求められていない。しかし 6.1 節でのアスペクト比変化式は、き裂が板裏面に達するまで成立している。

板厚の 8 割に達した時点のき裂深さを a^*、き裂半長を b^* とする。このき裂が均衡成長した結果のものである場合には、き裂貫通時のき裂半長 b_p は、(6.2))式より

$$b_p = \frac{t}{\tilde{A}-\tilde{B}} = \frac{t}{0.92-0.87\beta} \tag{4.17}$$

ここで、β ：曲げ応力比（(6.1)式）

$$\tilde{A} = 0.98 + 0.07\beta$$

$$\tilde{B} = 0.06 + 0.94\beta$$

$Y_0 < \tilde{A} - \tilde{B} \cdot X_0$ （ただし、$Y_0 = a^*/b^*$、$X_0 = a^*/t$ ）の場合、(6.3),(6.4)式より、

$$b_p = \frac{\left\{X_0^n Y_0^n \left(\tilde{A}-\tilde{B}X_0\right)^n + \left(\tilde{A}-\tilde{B}\right)^n \left(\tilde{A}-\tilde{B}X_0\right)^n - Y_0^n \left(\tilde{A}-\tilde{B}\right)^n\right\}^{1/n}}{X_0 Y_0 \left(\tilde{A}-\tilde{B}\right)\left(\tilde{A}-\tilde{B}X_0\right)} \cdot t \tag{4.18}$$

$Y_0 > \tilde{A} - \tilde{B} \cdot X_0$ の場合は、(6.5)式より

$$b_p = \frac{\left\{\left(\tilde{A}-\tilde{B}\right)^n (1-\xi)^n + 1\right\}^{1/n}}{1-\xi} \cdot t \tag{4.19}$$

ただし、$\xi = X_0 - \dfrac{1}{\left\{Y_0^n - \left(\tilde{A}-\tilde{B}\cdot X_0\right)^n\right\}^{1/n}}$

となる。この時点でのき裂形状は図 4.11 中の桃色点線で示す $A_pB_pC_p$ なる半楕円となる。

A_p 点の K 値は、き裂前縁線が湾曲している板厚貫通き裂に対して Neale が与えた結果 [11] より、2 次元板厚貫通き裂の K 値に、

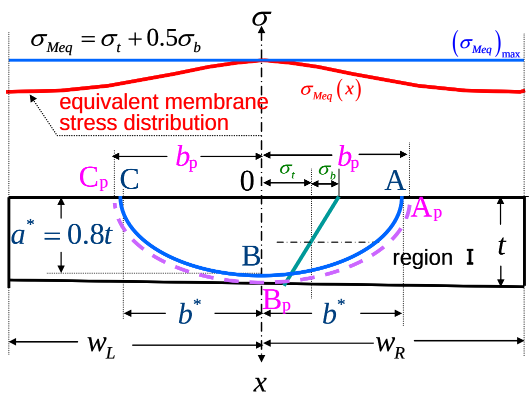


図 4.11　面材に入った表面き裂

$$\frac{\sqrt{b_M}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{t}{\overset{\frown}{A_pB_p}} \tag{4.20}$$

ここで　b_M ：右側の平均き裂長さ

$\overset{\frown}{A_pB_p}$ ：楕円の A_p から B_p に至る弧長

を乗じたものとなる。したがって、

$$b_M = \frac{1}{4}\pi b_p \tag{4.21-1}$$

$$\widehat{A_{\mathrm{p}}B_{\mathrm{p}}} = b_p \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{b_p^2+t^2}{2}} \tag{4.21-2}$$

ただし、$k = a/b_p (= t/b_p)$ または b_p/t （$k<1$ の分岐をとる）

より、 A_{p} 点の *K* 値は、(1.49)式を用いて

$$K_A \approx \frac{\sqrt{2}t}{\pi \sqrt{b_p\left(b_p^2+t^2\right)}} \int_{-b_p}^{b_p} \sigma_{Meq}(y) \sqrt{\frac{b_p+y}{b_p-y}} dy \cdot M_R \tag{4.22}$$

ここで、$\sigma_{Meq}(y)$ は、面外曲げ応力の *K* 値寄与分を、メンブレン応力のそれの 1/2 となる結果[13]より

$$\sigma_{Meq}(y) = \sigma_t(y) + 0.5\sigma_b(y) \tag{4.23}$$

ただし、

$\sigma_t(y)$ ：面内応力（メンブレン応力）分布

$\sigma_b(y)$ ：面外曲げ応力分布

同様にして C_{p} 点の *K* 値は(1.49)式より

$$K_C \approx \frac{\sqrt{2}t}{\pi \sqrt{b_p\left(b_p^2+t^2\right)}} \int_{-b_p}^{b_p} \sigma_{Meq}(y) \sqrt{\frac{b_p-y}{b_p+y}} dy \cdot M_L \tag{4.24}$$

となる。

　ところで、表面き裂を挿入した平板（9%Ni 鋼）に引張荷重と 4 点曲げ荷重を同期させた sin 荷重波を与え、曲げ荷重比 β を一定に保った疲労試験での疲労き裂伝播速度を整理した結果[29]によると、き裂貫通後の表面でのき裂伝播速度と、裏面におけるき裂前縁線の法線方向伝播速度の比は、等価引張応力による *K* 値範囲と、面外曲げが働かず引張応力（膜応力）だけが働く場合の *K* 値範囲で予測される Paris の伝播速度比となっている。すなわち、図 4.12 に示すように、き裂貫通後のき裂前縁線は、板表面を長軸とする楕円の一部であるとし、板の表裏面におけるこの楕円の法線方向き裂伝播速度が調査されている。板表面の E 点（F 点）の *K* 値は Erdogan[32]より、

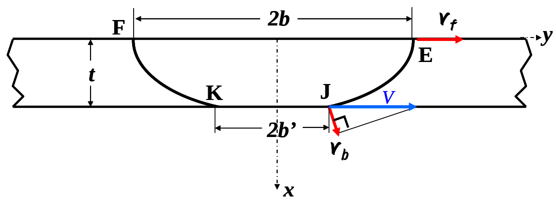


図 4.12　表面き裂が板裏面に貫通した直後の板厚貫通き裂

$$\left(K_{Meq}\right)_{\mathrm{E}} = \left(\sigma_t + \sigma_{b_{eff}}\right)\sqrt{\pi b} \cdot F = \left(\sigma_t + 0.5\sigma_b\right)\sqrt{\pi b} \cdot F \tag{4.25}$$

ここで　　*F* ：有限板とき裂前縁線の湾曲度に関する修正係数

そして、板裏面 J 点（K 点）の *K* 値は、き裂前縁線における法線方向が板面外となり、定義できない

が見掛け上(4.25)式より

$$\left(K_{Meq}\right)_{J} = \left(\sigma_t - \bar{\xi}\sigma_{b_{eff}}\right)\sqrt{\pi b}\cdot F \tag{4.26}$$

とおいて $\bar{\xi}$ の値を調べたところ図 4.13 に示すように $\bar{\xi}=0$ となったことが示されている[33]（図中、裏面でのき裂前縁線法線方向き裂伝播速度 V_b と $\Delta K_{M_{eq}}$ の関係を示した白抜きの記号は $\bar{\xi}=0$ として(4.26)式より求めた $\Delta K_{M_{eq}}$ が用いられている。）。

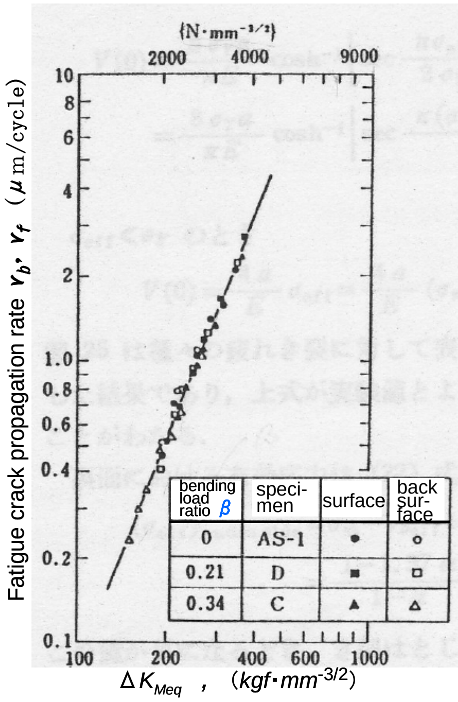


図 4.13 表裏面での板厚貫通き裂の疲労き裂伝播速度の整理結果

したがって、表面き裂が板を貫通した瞬間の裏面の点（図 4.11 の B_p 点）に対する見掛け上の K 値（K_ℓ）は、

$$K_\ell \approx \frac{t}{\pi\sqrt{2b_p\left(b_p^2+t^2\right)}}\left\{\int_{-b_p}^{b_p}\sigma_t(y)\sqrt{\frac{b_p+y}{b_p-y}}dy\cdot M_R + \int_{-b_p}^{b_p}\sigma_t(y)\sqrt{\frac{b_p-y}{b_p+y}}dy\cdot M_L\right\} \tag{4.27}$$

と近似できる。(4.12)、(4.13)式により、a_ℓ 以上のき裂に対する K 値を集中荷重で代表することが出来る。再記すれば、

$$p_{a\ell} = \frac{\sqrt{\pi a_\ell}\sqrt{1-\beta_1^2}}{2\left(1.297-0.297\beta_1^{5/4}\right)K_\ell} \tag{4.28}$$

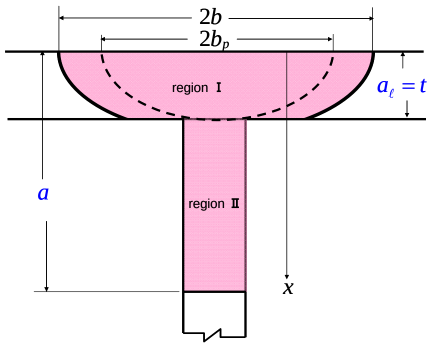


図 4.14 領域Ⅰの表面き裂が貫通した後に領域Ⅱ（ウェブ）に入った板厚貫通き裂

ここで、β_1 は、領域Ⅰに働いている（図 4.14 参照）公称膜応力（平均引張応力）σ_t と公称面外曲げ応力 σ_b から、得られる γ

$$\gamma = \frac{2\sigma_b}{\sigma_t+\sigma_b} \tag{4.29}$$

を(4.13)式あるいは(4.14)式に代入して得られる。したがって領域Ⅱにおけるき裂の K 値は、

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\left[\frac{2p_{a\ell}}{\sqrt{1-\left(\beta_1\alpha\right)^2}}\left\{1.297-0.297\left(\beta_1\alpha\right)^{5/4}\right\} + \int_{a_\ell}^{a}\frac{\sigma_{\mathrm{II}}(x)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\left\{1.297-0.297\left(\frac{x}{a}\right)^{5/4}\right\}dx\right] \tag{4.30}$$

で与えられる。

なお、き裂結合力に対する K 値は(4.24)式で$\sigma_{Meq}\left(y\right)=\lambda_\sigma\sigma_Y$、(1.25)式で$\left(\sigma_t+0.5\sigma_b\right)\rightarrow\lambda_\sigma\sigma_Y$などとすれば良い。

4.4　埋没楕円き裂から板厚貫通後までのき裂成長

4.4.1　埋没欠陥からのき裂成長過程における形態変化とその *K* 値近似

埋没き裂から疲労き裂が成長していく過程を図 4.15 に模式的に示す。埋没欠陥としては溶接割れや引け巣などがあり、欠陥の前縁は一般的にはギザギザしている。しかし、これら欠陥から疲労き裂が発生・成長すると図 4.15(a)に示すような楕円形状($A_0B_0C_0D_0$:ここでの記号は前後の関係を示すため、1.7 節とは異なっている)になる。ギザギザのへこんだところは、でばったところより応力集中が大きくなり、き裂成長が速くなるためである。また、欠陥前縁の切欠先端半径が大きな箇所には、その箇所からき裂が発生する前に、他の箇所における切欠先端半径の小さな鋭い前縁部から発生したき裂が回りこんで、最終的には $A_0B_0C_0D_0$ と示すような楕円状き裂となる。

1.7.2 項~1.7.3 項に示した幅方向に一様でない応力が作用した場合の取扱いから分かるように、楕円き裂の各頂点における *K* 値は一般的にはそれぞれが異なるため、負荷サイクルに対するき裂進展量は

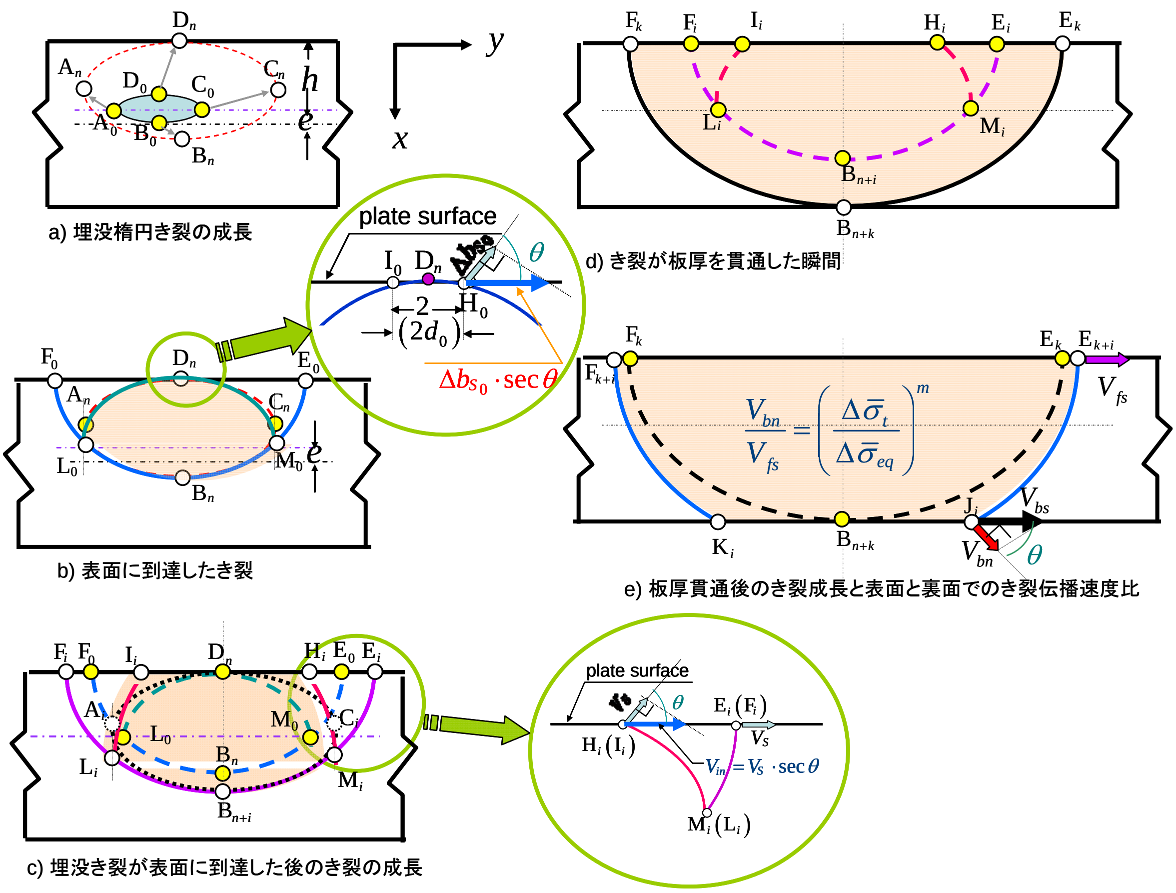


図 4.15　埋没欠陥からのき裂成長過程と、成長計算上の仮定

各頂点で異なる。各頂点からの楕円軸に沿うき裂増分を加えて、成長後のき裂の長さと高さを軸長とする楕円形のき裂になると考えると、図 4.16 に示すように、過去のき裂を包含しないようになるという矛盾が生じる。すなわち、図 4.16 では黒色太実線が過去の楕円き裂、赤色実線がき裂成長後の楕円き裂である。極微小なき裂増分なら、このような矛盾は生じないが、進展に従い初期からのき裂増分の総和が大きくなると、過去のき裂を包含しないようになる。楕円き裂に対しては 1.7.2 項に示したように K 値が与えられ、多項式による近似式が公表されているが、図 4.16 の青色実線で示す楕円が変形したような形のき裂に対する K 値は殆ど解析されておらず、系統的になされたものは皆無である。

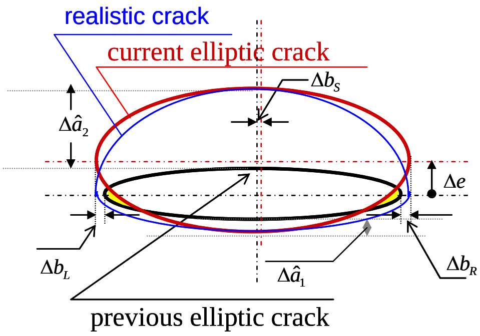


図 4.16　楕円き裂の計算上の成長と実際のき裂形状

実働荷重を受ける埋没欠陥や表面欠陥の中央断面の COD を推定するためには、埋没き裂に対しては図 4.15 の B 点に対してき裂成長に伴う K 値変化を、*EDS* に変換して *EDS* 下でき裂結合力モデルを作成し、それを解く必要がある。また、表面き裂に対しても、図 4.15(c)からのき裂成長をシミュレートすることになり、表面き裂進展に伴うき裂最深部の K 値振幅変化を *EDS* に変換することになる。B 点の K 値は、A 点、C 点が板厚方向に多少変化しても、殆ど変化しないと期待される。

したがって、埋没き裂の状態において図 4.16 に示すような矛盾が生じることを少なくするために、図 4.15(a)の B 点の K 値と D 点の K 値の大きい側において、初期リガメントの ε %づつの増分（ε としては 5 程度でアスペクト比変化は収束すると考えられる）を与えて、他の頂点のき裂増分を Paris 則に従って与え、得られた B 点と D 点のき裂増分を $\overline{\mathrm{BD}}$ に加えた長さが x 方向の軸長、A 点と C 点のき裂増分を $\overline{\mathrm{AC}}$ に加えた長さを y 方向の軸長とする楕円になると近似できると仮定されている。

ところで、1.7.2 項に示したように一様引張と一様面外曲げを受ける楕円き裂の K 値は、楕円き裂の y 方向軸から表面までの間隔（h ：図 1.27 参照）の 80%の大きさまでについては 0.5%以下の精度を有しているが、それ以上の大きさの楕円き裂に対する K 値の精度は保証されていない。

埋没き裂が成長して、丁度表面に接した時点の楕円き裂最深部（図 4.17 の水色で塗りつぶした楕円の B 点。図 4.15(b)では楕円 $A_nB_nC_nD_n$ の B_n 点）の K 値は、これを包含するき裂の最深部（図 4.17 では赤色の B 点。図 4.15(b)では半楕円表面き裂 $F_0L_0B_nM_0E_0$ の B_n 点）の K 値より大きくなることはない。図 4.17 において、大きい楕円の x 軸が小さい楕円の x 軸の 2 倍である場合に、小さい楕円を大きい楕円が包含する最小の楕円という観点から、大きい楕円を作図上で求め

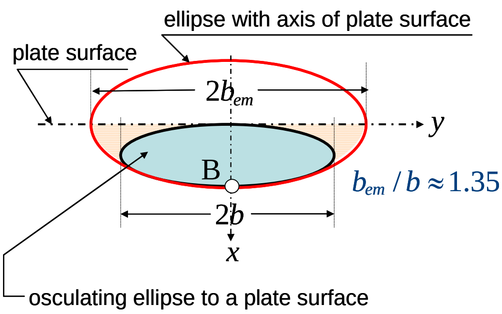
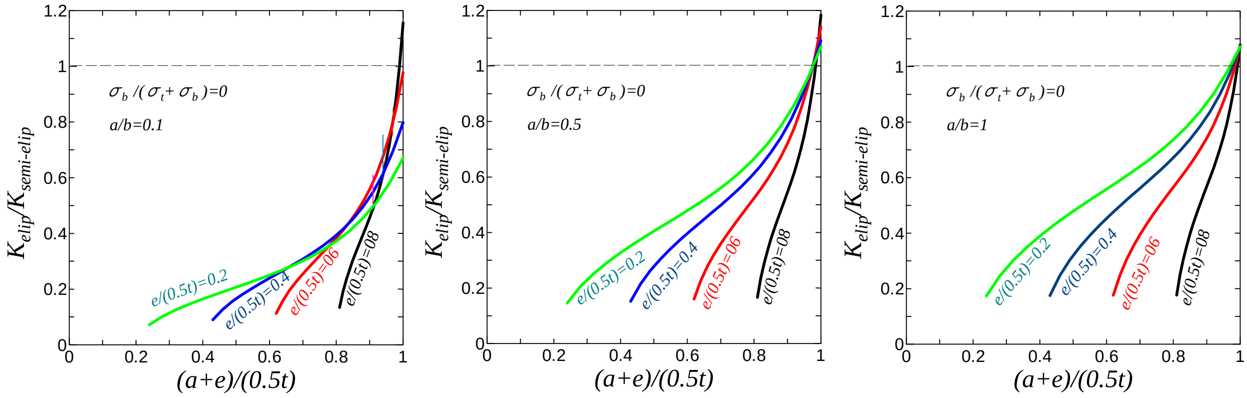


図 4.17 表面に接する楕円き裂を包含する半楕円表面き裂

ると、小さい楕円の y 方向の軸長の 1.35 倍であれば良いということが分かる。

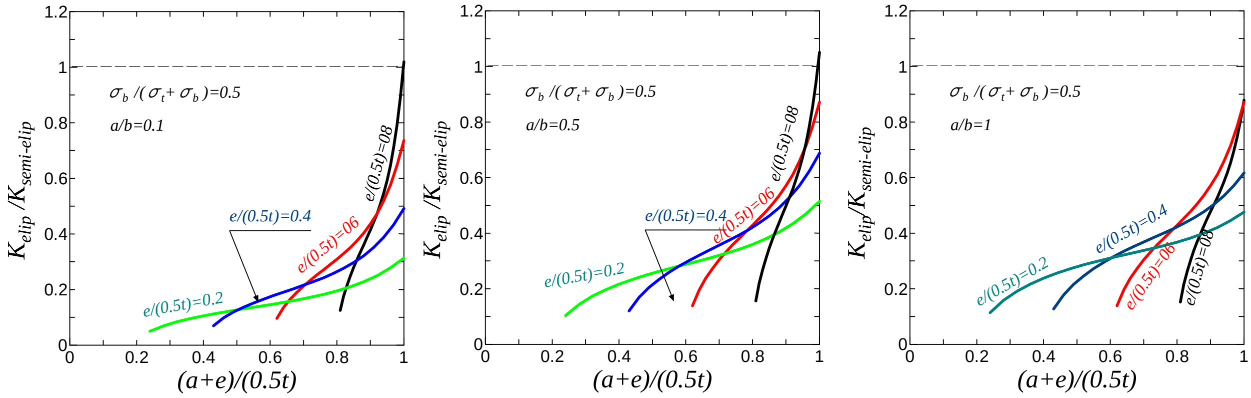
そこで図 1.27 の埋没楕円き裂につき、板厚中心線から e だけ偏芯した位置に $a/h=0.05$ のき裂があり、き裂のアスペクト比を保ったまま大きくなる（実際にはアスペクト比はき裂の成長につれて変化する）状態に対してき裂最深部 B_n 点（図 4.15 では B_n 点）の K 値（K_{elip}）が(1.85)、(1.86)式によって求められている。一方、図 4.17 に示すようにこの相似的に大きくなったき裂が表面に達した時のき裂の y 軸方向の軸長の 1.35 倍を有する表面半楕円き裂（以下、単に包含半楕円表面き裂と称す）のき裂最深部 B_n の K 値（$K_{semi-elip}$）が(1.81)〜(1.83)式によって求められている。このようにして、埋没き裂の頂点（図 4.15(b)では D 点）位置と $K_{elip}/K_{semi-elip}$ との関係が調査された。計算 case は、荷重については曲げ荷重比（$=\sigma_b/(\sigma_t+\sigma_b)$）を 0、0.5 ならびに 1.0 の 3case、初期き裂位置については $e/(0.5t)$ を 0.2、0.4、0.6、0.8 の 4case、そしてアスペクト比は 0.1、0.5、1.0 の 3case である。得られた結果が図 4.18 に示されている。

1.7.2 項で示した埋没楕円き裂の K 値を用いると、一様引張応力のみが作用する場合には、図



a）アスペクト比　0.1　　b）アスペクト比　0.5　　c）アスペクト比　1

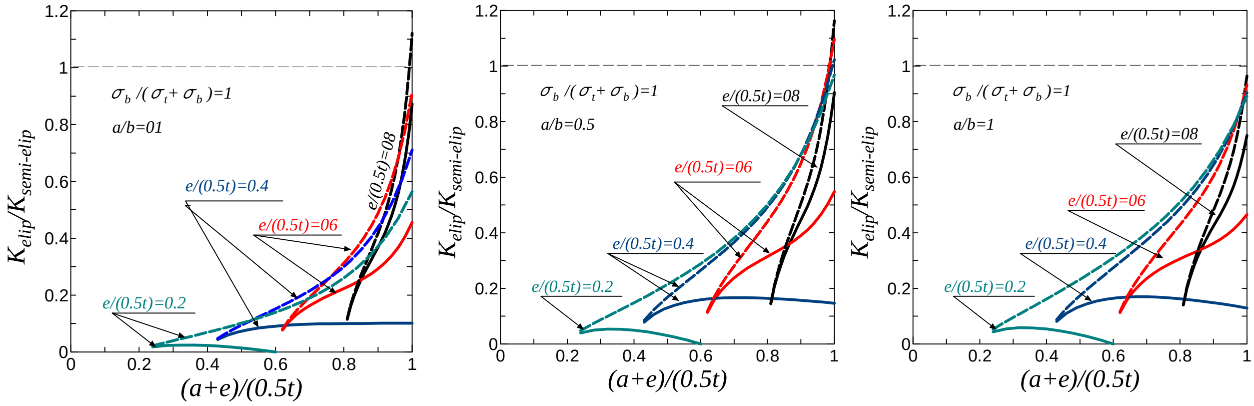
A）一様引張応力のみが働く場合



a）アスペクト比　0.1　　b）アスペクト比　0.5　　c）アスペクト比　1

B）曲げ応力比が 0.5 の場合

図 4.18(その 1)　包含表面き裂最深部の応力で無時限化した楕円き裂最深部の K 値



a）アスペクト比 0.1　　b）アスペクト比 0.5　　c）アスペクト比 1

C）面外曲げ応力のみが働く場合

図 4.18（その 2）　包含表面き裂最深部の応力で無時限化した楕円き裂最深部の K 値

4.18(A)に示すように埋没楕円き裂の位置が表面近くになると、その最深部（裏面側の楕円の頂点）の K 値が包含半楕円表面き裂の最深部の K 値よりも大きくなるという結果が得られる。表面き裂の最深部の K 値はこれまでの研究結果から実用上十分な精度を有していることから、(1.85)式および(1.86)式による K 値はき裂が表面に近づくと、引張応力下では大きくなりすぎることが分かる。しかし、(1.86)式に含まれる $\tilde{\lambda}$ が 0.9 までは（具体的には、$e/(0.5t)$（図 4.18 の横軸）が 0.2 では横軸で 0.92、0.4 では 0.94、0.6 では 0.94、0.8 では 0.96）、(1.85)～(1.86)式による埋没楕円き裂の最深部の K 値は包含半楕円表面き裂の最深部の K 値より小さいことが分かる。

面外曲げ応力のみが作用する図 4.18(C)では、裏面側頂点（き裂最深部）の K 値が実線で、表面側頂点の K 値が点線で示されている。この場合、き裂が板厚中央近くに存在する場合、き裂最深部（裏面側頂点）の K 値はき裂が大きくなると負側に変化している。一方、表面側（曲げ応力が正となる側）は点線で示すようにき裂が大きくなると K 値も大きくなっている。このことは、純曲げが働く場合には、き裂が深さ方向（圧縮応力が働く側）、すなわち裏面側に進展しにくくなるとともに、表面側には非常に早く成長して表面き裂になってから、深さ方向（裏面方向）にき裂が進展する傾向にあることを意味しており、これまでの実験結果とも定性的には良い対応を示している。

また、面外曲げと引張応力が重畳して作用する場合は両者の中間的な挙動が現れることを図 4.18 は示唆している。き裂成長を安全側に推定することを考えると、K 値は実際より少し大きめに設定することが望ましい。したがって、埋没表面き裂の K 値を表 4.1 に示す取扱いにより求めれば良いことになる。

埋没楕円き裂が表面に達する（図 1.15(b)で $A_nB_nC_nD_n$ なる楕円）と、その後の表面のき裂成長は著しく速くなる。この楕円を包含する半楕円表面き裂の表面き裂長さ $\overline{F_0E_0}$ は、図 4.17 での結果より、$1.35 \cdot \overline{A_nC_n}$ となる。埋没楕円き裂の y 方向（幅方向）の軸は、き裂進展とともに計算上は表面に近づ

表 4.1　埋没楕円き裂最深部の K 値の与え方

<table>
<tr><td>$\tilde{\lambda}(=a/h)$ の範囲</td><td colspan="2">適用式他</td></tr>
<tr><td>$\tilde{\lambda} \le 0.9$</td><td colspan="2">第 2 編(1.85)～(1.86)式による。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$0.9 < \tilde{\lambda} \le 1$</td><td>$K_{\tilde{\lambda}=1} < K_{semi-elip}$ の場合[注)]</td><td>第 2 編(1.85)～(1.86)式による。</td></tr>
<tr><td>$K_{\tilde{\lambda}=1} \ge K_{semi-elip}$ の場合</td><td>$K = \left(\tilde{\lambda} - 0.9\right)\left\{K_{semi-elip} - K_{\tilde{\lambda}=0.9}\right\} + K_{\tilde{\lambda}=0.9}$</td></tr>
</table>

注)　$K_{\tilde{\lambda}=\alpha}$ ：第 2 編(1.86)式の $\tilde{\lambda}$ に α を代入して得られる図 1.15(a)の B 点の K 値
$K_{semi-elip}$ ：包含半楕円表面き裂最深部の K 値（第 2 編(1.81)～(1.84)式による。この場合の表面でのき裂半長は、埋没き裂が表面に達した時のき裂半長の 1.35 倍

くが、実際にはそれほど x 方向には移動しないと考えられる。そこで、A_n 点ならびに C_n 点を y 座標位置を変えないで包含半楕円表面き裂 $F_0B_nE_0$ 上に投影し、その点をそれぞれ L_0 点ならびに M_0 点とし、$B_nM_0D_nL_0$ が表面に埋没き裂が達した瞬間のき裂形状であると仮想されている。

埋没楕円き裂が表面に到達した瞬間の最深部 B 点（B_n 点）の K 値は表 4.1 より、(1.85)～(1.86)式を用いて得られる $K_{\tilde{\lambda}=1}$ か、(1.81)～(1.84)式を用いて得られる半楕円表面き裂の最深部 B 点（B_n 点）の $K_{semi-elip}$ のうちの小さい方の値をとることになる。表面に到達した瞬間に $K_{semi-elip}$ となる場合には、表面におけるき裂の長さ $\overline{\mathrm{IH}}$ の大きさが多少異なっても B 点の K 値に大きな影響は与えないと考えられるが、$K_{\tilde{\lambda}=1}$ となる場合には $\overline{\mathrm{IH}}$ の大きさに依存して B 点の K 値が変化するものと考えられる。図 4.19 はその状況を模式的に表したものである。図 4.15(c)の拡大図から分かるように、$\overline{\mathrm{IH}}$ は $\overline{\mathrm{LM}}$ の長さにまですぐに到達する。そしてこの状態では表面のき裂長さが $\overline{\mathrm{FE}}$ となっていなくてもこのき裂の最深部の K 値は、半楕円表面き裂の最深部の K 値と同じになっているものと考えられる。したがって、表面にき裂が達してからの最深部の K 値は図 4.19 に示すように与えられている。ここで、K 値が $\overline{\mathrm{IH}}$ に対して線形に変化しないで、表面でのき裂が短い区間で K 値が大きく変化するとしているのは、表面におけるき裂が長くなると最もき裂長さが長くなっている板内部の変位が、表面で拘束されにくくなると考えられることと、K 値を大きく与えることはき裂成長を速めに評価することになり、安全側という判断からである。この変化の簡単な評価式として、この状態での K 値は、

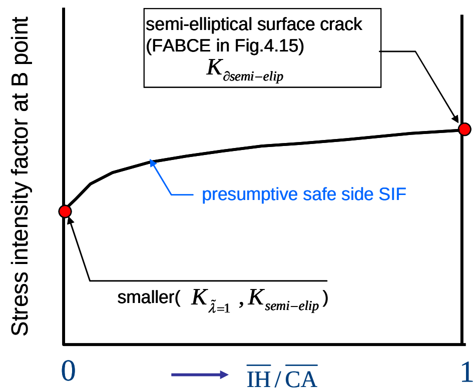


図 4.19　埋没き裂が表面に達した直後の最深部の K 値変化

$$K = \left(K_{semi-elip} - K_{\tilde{\lambda}=1}\right)\sqrt{\overline{\mathrm{IH}}/\overline{\mathrm{LM}}} + K_{\tilde{\lambda}=1} \tag{4.31}$$

のように近似的に与えられている。

包含半楕円表面き裂 $F_0B_nE_0$ が生じて後、裏面にき裂が達するまでは、6.1 節のアスペクト比変化式が利用できる。すなわち、一様引張応力振幅＋面外一様曲げ応力振幅が作用する場合には 6.1 節の結果をそのまま使用して表面き裂のアスペクト比変化を求めることができる。曲げ応力比が板幅方向で変化する場合（板厚に沿う応力分布が直線でない場合）にはき裂の成長に応じてき裂存在域の平均曲げ応力比を求め、平均曲げ応力比と(6.1)式の曲げ応力比がアスペクト比変化に対して同じ働きをすると仮定して、微小き裂増分後の (X,Y) 点を逐次 (X_0,Y_0) 点と置換えて、(X_0,Y_0) 点からのアスペクト比変化を求める。これによって、B 点でのき裂増分と、E 点ならびに F 点におけるき裂増分の比が得られる。

ところで、埋没欠陥から成長したき裂が板の片面に顔を出し、板幅方向に進展するき裂の計算アルゴリズムを検討し、実験結果と比較検討した研究資料は残念ながら見当たらない。しかし、4.3.2 項の図 4.13 において説明したように表面切欠付帯板に一様引張＋面外一様曲げ荷重を同期させた繰返し負荷を与えた実験が行われている。き裂が裏面に達してからの裏面でのき裂法線方向のき裂伝播速度と表面での幅方向き裂伝播速度の比は、裏面では曲げ応力が働かず引張応力だけが見掛け上働いている場合の K 値範囲と表面で（引張応力＋曲げ応力の 1/2）という Erdgan による等価引張応力 [13)] が働いているとした K 値範囲で得られる Paris 則よるき裂伝播速度の比と等しいことが、実験的に確かめられている [14)]。

そこで、$\overline{L_0M_0}$ を軸とする楕円の一部 $M_0D_nL_0$ が、埋没き裂が丁度表面に達した時点のき裂形状であると考える（図 4.15(b)参照）。しかしこの場合 D_n 点の法線は x 方向となるため、その表面方向のき裂増分は不定となる。上記実験を裏面で観察した結果では、薄い線らしきものが現れた後 2mm 程度のき裂が突然現れている。タイミングを逃すとすぐに 5mm 程度の長さのき裂になっているのが現状である。従って表面でのき裂の法線方向が x 軸方向とならないように、D_n 点を仮想的に表面より上に設定し、表面でのき裂長さ $\overline{I_0H_0}=2mm$ （図 4.15(b)図には I_0 点および H_0 点は記入していない）として I_0 点および H_0 点の弧 $M_0H_0I_0L_0$ の法線方向速度を求め、その $\sec\theta$ が I_0 点および H_0 点の表面方向速度になると仮定されている。なお、この法線方向速度と半楕円表面き裂の表面でのき裂伝播速度を等しいと仮定されている（図 4.15(c)の拡大図を参照）。したがって、H 点（あるいは I 点）のき裂増分は E 点（あるいは F 点）のき裂増分の $\sec\theta$ 倍になる。

表面き裂となってから（図 4.15(c)参照）は、き裂最深部が板厚の 8 割になるまでは上記の手法を繰返してき裂成長に伴う B_{n+i} 点の K 値を求める。そして、き裂深さが $0.8t$ 以上になるといっきにき裂深さを裏面にまで拡大させ、表面と裏面のき裂増分比を、図 4.15(c)での取扱いと同様に与え、板厚貫通き裂としての K 値を与えることになる。

x 方向、ならびに y 方向の応力分布が一様でない場合には、き裂の中心がき裂の成長とともに変化し、最深部がき裂の中心と一致しなくなるが、K 値に及ぼす影響はないと仮定されている。

4.4.2 埋没き裂から長い板厚貫通き裂に至るき裂の *K* 値定式化

検出された埋没欠陥の弾塑性 COD をまともに解くには弾塑性 FEM などの離散化手法を適用するしかない。そして図 1.25 で示したように、CTOD は、き裂前方に形成される塑性域内のき裂先端位置におけるき裂線垂直方向塑性ひずみを積分した固有変位に、結合力に相当する弾性応力を作用させたときの長さ（活固有変位）を求め、それを CTOD とすれば良い。

この欠陥が進展しないということが確かであれば、 1 case だけの計算で良いので、多少時間はかかっても、弾塑性 FEM 解析を行なって検出された欠陥の無害さを検証することも可能であろう。

しかし、繰返し荷重が作用する場合には、き裂は成長するので、検出された欠陥だけの CTOD を求めるだけでは、安全性は担保されない。この場合即座に補修するか、供用されることによるき裂の成長も見込んで設計寿命を全うするまでは安全に機能することを確認するかのいづれかを選択しなければならない。後者の場合、計算 case はかなり多くなり、き裂の成長段階毎に構造モデルを作成し弾塑性 FEM 解析するのが正攻法と考えられるが、それには膨大な時間を必要とし、実務に適用することは現実的ではない。

EDS 概念により、３次元問題を２次元問題に変換することができる。そして、*K* 値は重ね合せの原理から、き裂が存在しない状態で働く応力をき裂面に内圧として働かせて求められる。すなわち、*EDS* を無限板平板中の直線き裂に内圧として作用させれば、３次元問題を２次元問題に変換できる。したがって、*EDS* 上でき裂結合力モデルを作成すれば、３次元問題の弾塑性状態を近似的に与えることになる。ここでは、埋没欠陥に対してのき裂結合力モデルを作成するための前準備として必要なき裂長さ（(4.17) 式参照）～K_i 関係を与える手順を図 4.20 に示す。そして図 4.20 に沿ってその具体的な定式化を行う。ただし、図 1.20 では細かい過程は省略しているので、以下には図 1.20 に示していない項目も記述している。

(ｉ) 板材に働く等価応力分布 $\sigma_{Meq}(y)$

図 4.15 等に示したように、板材の板厚方向を x 軸、幅方向を y 軸にとる。 y＝一定の板断面に働く y 軸上の公称引張応力を $\sigma_t(y)$ 、公称面外曲げ応力を $\sigma_b(y)$ とする。ここで、板材が直方体ならば、$\sigma_b(y)=6M(y)/t^2$ （$M(y)$: Z 方向の単位厚さあたりに働く y 軸周りの曲げモーメント）となる。

公称引張応力と面外曲げ応力が重畳して働く場合の応力拡大係数は、板厚 2~3mm の薄板曲げの Dugdale モデル（き裂結合力モデル）から Erdogan が与えており [32]、面外曲げ応力の 1/2 が引張応力と等価であると報告している。また金沢らは、板内部に形成される圧縮塑性域部分に引張塑性域における応力を充当して等価な引張塑性域を求め、等価引張応力を定義し、板厚 12mm の貫通き裂付き試験材に引張と曲げ荷重を重畳して負荷した脆性破壊試験ならびに疲労き裂伝播試験を実施し、定義された等価引張応力で両試験結果を定量的に評価できることを示した [34]。金沢らの結果は、曲げ荷

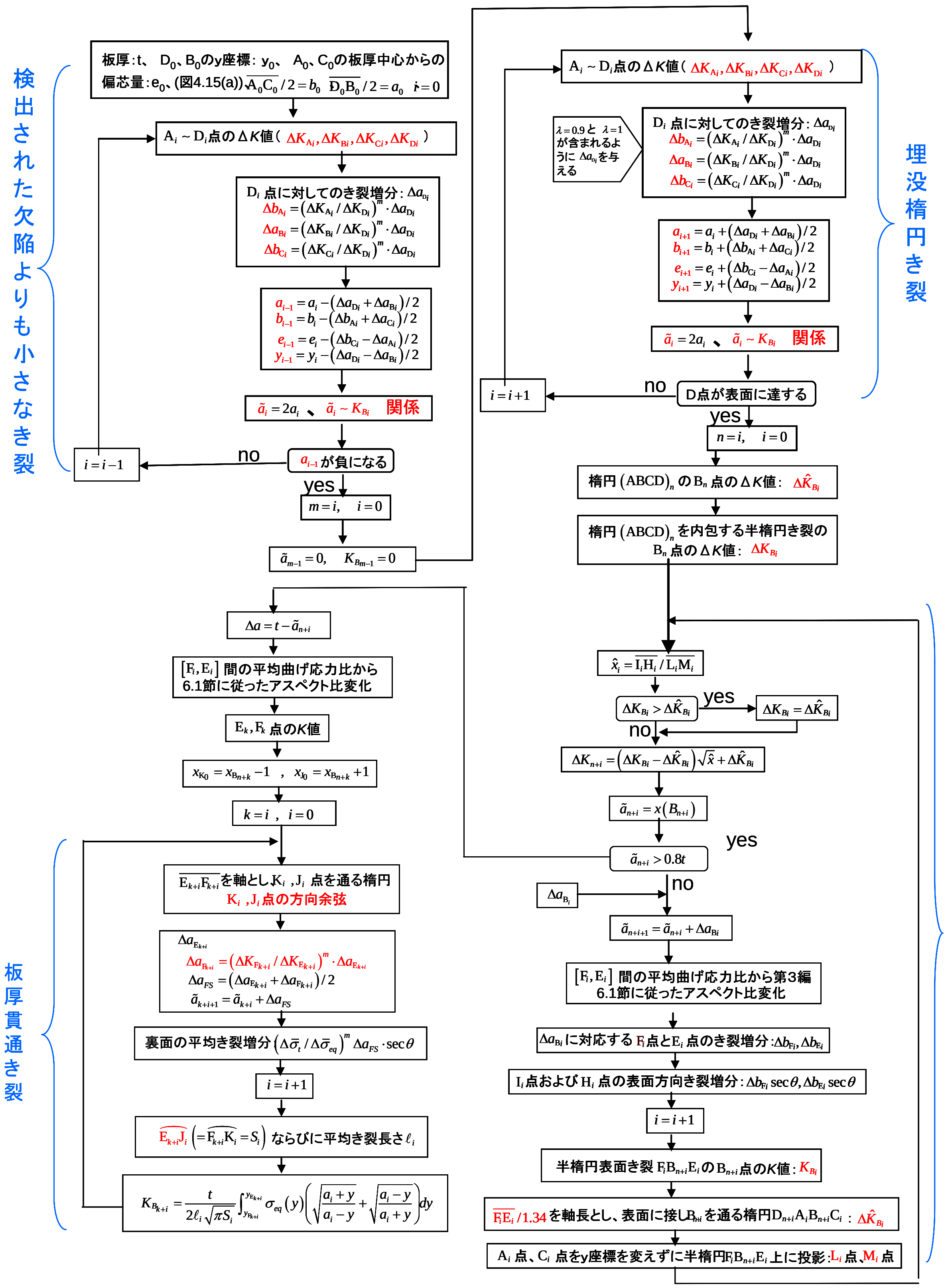


図 4.20 検出された埋没き裂形状を通過点とする、き裂なしの状態からのき裂成長に伴う形状変化と K 値関係を得るための計算フロー

重比が 0.8 以上になると、Erdogan の結果より等価引張応力は大きくなるが、0.8 以下では Erdogan の結果とほぼ一致している。実構造で曲げ荷重比が 0.8 以上になる部位は殆どなく、存在しても他の箇所からのき裂進展が速くなるので、この箇所の寿命評価は殆ど必要がない。

したがって実用上は、

$$\sigma_{Meq}\left(y\right)=\sigma_t\left(y\right)+0.5\sigma_b\left(y\right) \tag{4.32}$$

ここで　$\sigma_{Meq}\left(y\right)$：等価膜応力分布
$\sigma_t\left(y\right)$：公称膜応力分布
$\sigma_b\left(y\right)$：公称面外曲げ応力分布

とし、$\sigma_{Meq}\left(y\right)$ が膜応力（板厚方向で一様な引張（圧縮）応力）として働いているとした取扱いを行えば良い。なお、初期き裂の D_0 点、B_0 点を $y=0$ としている。

（ⅱ）埋没楕円き裂の頂点の $\boldsymbol{K}$ 値

1.7.2 項には、一様引張＋一様曲げが作用する場合の、埋没楕円き裂各頂点の K 値が与えられている。これを任意応力分布が作用する場合のものに(1.87)～(1.101)式の結果を用いて拡張すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta K_{\mathrm{A}i}&=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)F_{t\mathrm{A}}+\Delta\sigma_b\left(0\right)F_{b\mathrm{A}}\right\}\sqrt{\pi a_i}\,\frac{M_R}{K_M}\\&=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)+\left(1-\frac{2h}{t}\right)\Delta\sigma_b\left(0\right)\right\}\frac{M_{\mathrm{A}}\cdot M_R\sqrt{\pi a_i}}{b_i\Phi\sigma_{Meq}\left(0\right)}\int_{-b_i}^{b_i}\sigma_{Meq}\left(y+b_{\mathrm{S}i}\right)\sqrt{\frac{b_i+y}{b_i-y}}dy\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\Delta K_{\mathrm{C}i}&=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)F_{t\mathrm{A}}+\Delta\sigma_b\left(0\right)F_{b\mathrm{A}}\right\}\sqrt{\pi a_i}\,\frac{M_L}{K_M}\\&=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)+\left(1-\frac{2h}{t}\right)\Delta\sigma_b\left(0\right)\right\}\frac{M_{\mathrm{A}}\cdot M_L\sqrt{\pi a_i}}{b_i\Phi\sigma_{Meq}\left(0\right)}\int_{-b_i}^{b_i}\sigma_{Meq}\left(y+b_{\mathrm{S}i}\right)\sqrt{\frac{b_i-y}{b_i+y}}dy\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\Delta K_{\mathrm{B}i}&=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)F_{t\mathrm{B}}+\Delta\sigma_b\left(0\right)F_{b\mathrm{B}}\right\}\sqrt{\pi a_i}\,\frac{K_R+K_L}{2K_M}\\&=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)+\left(1-\frac{2h}{t}+\frac{a_i}{t}\right)\Delta\sigma_b\left(\pi 0\right)\right\}\frac{M_{\mathrm{B}}\sqrt{\pi a_i}}{2\Phi\sigma_{Meq}\left(0\right)}\\&\quad\times\left\{M_R\int_{-b_i}^{b_i}\sigma_{Meq}\left(y+b_{\mathrm{S}i}\right)\sqrt{\frac{b_i+y}{b_i-y}}dy+M_L\int_{-b_i}^{b_i}\sigma_{Meq}\left(y+b_{\mathrm{S}i}\right)\sqrt{\frac{b_i-y}{b_i+y}}dy\right\}\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\Delta K_{\mathrm{D}i}=\left\{\Delta\sigma_t\left(0\right)F_{t\mathrm{D}}+\Delta\sigma_b\left(0\right)F_{b\mathrm{D}}\right\}\sqrt{\pi a_i}\,\frac{K_R+K_L}{2K_M}$$

$$=\left\{\Delta\sigma_t(0)+\left(1-\frac{2h}{t}-\frac{a_i}{t}\right)\Delta\sigma_b(0)\right\}\frac{M_{\mathrm{D}}\sqrt{\pi a_i}}{2\Phi\sigma_{Meq}(0)}$$

$$\times\left\{M_R\int_{-b_i}^{b_i}\sigma_{Meq}(y+b_{Si})\sqrt{\frac{b_i+y}{b_i-y}}dy+M_L\int_{-b_i}^{b_i}\sigma_{Meq}(y+b_{Si})\sqrt{\frac{b_i-y}{b_i+y}}dy\right\} \quad (4.36)$$

(iii)　埋没き裂が表面に顔を出すまでのき裂増分ならびに参照き裂長さと参照応力拡大係数

引張応力と面外曲げ応力が重畳して作用する場合には、面外曲げ応力が負側（裏面）となる側に初期き裂の中心軸がある場合（図 4.15(a)で$e<0$）でも、D 点の K値は B 点の K値より通常大きくなり、き裂は最初表面側（D 側）に到達する。面外曲げが作用しない場合には偏芯している側（図 4.15(a)では D 側）で埋没き裂からのき裂が最初に顔を出す。

き裂成長に伴う K 値変化に不連続が生じると、荷重振幅に不連続変化が生じていなくても、き裂成長の加速や減速現象を起こす原因となるので、参照き裂長さと参照 K 値関係は出来るだけ滑らかになるようにする必要がある。したがって、き裂開閉口を考慮する代表点が連続的に進行するよう、非貫通き裂状態に対しては参照 K値の点を B 点、参照き裂長さを X として、埋没き裂は$2a$を採用し、表面き裂と滑らかに接続（表面き裂に対しては X は Aとなる）できるように計画すべきである。

き裂増分は D 点側の初期き裂のリガメント（$=h-a$）のα倍（$0<\alpha\le 0.1$）とし、き裂が表面に顔を出す瞬間（1.7.2 項で$\tilde{\lambda}=1$）と$\tilde{\lambda}=0.9$の場合を必ず計算し、$\tilde{\lambda}=0.9$から$\tilde{\lambda}=1$は 1 ステップで計算するようにすれば、前項の取扱いをそのまま踏襲できる。

D 点のき裂増分を$\Delta a_{\mathrm{D}i}$とすると、A 点、B 点ならびに C 点のき裂増分はそれぞれ

$$\Delta a_{\mathrm{A}i}=\left(\Delta K_{\mathrm{A}i}/\Delta K_{\mathrm{D}i}\right)^m\Delta a_{\mathrm{D}i} \quad (4.37\text{-}1)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta a_{\mathrm{B}i}&=\left(\Delta K_{\mathrm{B}i}/\Delta K_{\mathrm{D}i}\right)^m\Delta a_{\mathrm{D}i}\\ \Delta a_{\mathrm{C}i}&=\left(\Delta K_{\mathrm{C}i}/\Delta K_{\mathrm{D}i}\right)^m\Delta a_{\mathrm{D}i}\end{aligned}\right\} \quad (4.37\text{-}2)$$

となり、新しいき裂の大きさは

$$\left.\begin{aligned}a_i&=a_{i-1}+\left(\Delta a_{\mathrm{D}i}+\Delta a_{\mathrm{B}i}\right)/2\\ b_i&=b_{i-1}+\left(\Delta b_{\mathrm{C}i}+\Delta b_{\mathrm{A}i}\right)/2\end{aligned}\right\} \quad (4.38)$$

となる。なお、埋没き裂の y 方向中心軸b_{Si}は、

$$b_{Si}=b_{Si-1}+\left(\Delta b_{\mathrm{C}i}-\Delta b_{\mathrm{A}i}\right)/2 \quad (4.39)$$

x 方向中心軸e_iは

$$\left.\begin{aligned}e_i&=e_{i-1}+\left(\Delta a_{\mathrm{D}i}-\Delta a_{\mathrm{B}i}\right)/2\\ h_i&=0.5t-e_i\end{aligned}\right\} \quad (4.40)$$

となる。そして、参照き裂長さ X_i は

$$X_i = 2a_i \tag{4.41}$$

であり、これに対応する参照 K 値は、(4.35)式となる。

(ⅳ) 表面に接する埋没楕円き裂を包含する半楕円表面き裂ならびにこれらのき裂増分比

図 4.21 は表面に接する楕円とそれを包含する表面半楕円き裂（以後単に包含半楕円表面き裂と呼ぶ）の関係、さらには半楕円表面き裂最深部と表面でのき裂増分、ならびに表面に顔を出したき裂の表面でのき裂増分の関係を示したものである。これらの増分比は y 方向の位置に関係ないので、き裂の中心軸を x 軸に一致させた方程式で定式化されている。

表面（$x = 0$）に接する楕円の方程式は、

$$\frac{x^2}{(A/2)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.42}$$

ただし　$A = 2a$

この楕円を包含し、y 軸を軸とする最も小さな楕円は、

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{4.43}$$

ただし　$B = 1.35b$

となる。このき裂存在域での平均引張応力振幅 $\Delta\bar{\sigma}_t$、平均面外曲げ応力 $\Delta\bar{\sigma}_b$ は、

$$\left.\begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}_t &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} \Delta\sigma_t\left(y - b_{Si}\right)dy \\ \Delta\bar{\sigma}_b &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} \Delta\sigma_b\left(y - b_{Si}\right)dy \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

ただし　b_{Si} ：(4.39)式

この平均引張応力振幅、平均面外曲げ応力を(1.85)式の $\Delta\sigma_t$、$\Delta\sigma_b$ に代入しこの領域の曲げ荷重比 β を求め、$A \to a_0$、$B \to b_0$ と置き直し、(6.2)～(6.4)式により、ΔA 進めた後のアスペクト比 Y（$= (A + \Delta A)/(B + \Delta B)$）が得られる。

したがって、包含半楕円き裂を深さ方向に ΔA 進展させると、表面では

$$\Delta B = \left(A + \Delta A - BY\right)/Y \tag{4.45}$$

の 2 倍だけき裂長さが長くなる。

表面 E_i 点、F_i 点（図 4.21 参照）のき裂増分比は、

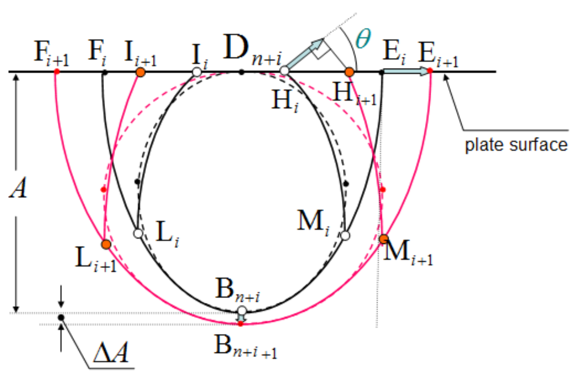


図 4.21　埋没き裂が表面に顔を出し、半楕円表面き裂に成長するまでの各点のき裂増分関係

(1.49)式より

$$\frac{\Delta B_{\mathrm{E}i}}{\Delta B_{\mathrm{F}i}}=\hat{\varsigma}=\left\{\frac{\int_{-B}^{B}\sigma_{Meq}\left(y+b_{Si}\right)\sqrt{\dfrac{B+y}{B-y}}dy}{\int_{-B}^{B}\sigma_{Meq}\left(y+b_{Si}\right)\sqrt{\dfrac{B-y}{B+y}}dy}\right\}^{m} \tag{4.46}$$

となるので、$2\Delta B$ を表面 E_i 点、F_i 点に振り分ける。したがって、

$$\left.\begin{aligned}\Delta B_{\mathrm{E}i}&=\frac{2\Delta B}{1+\hat{\varsigma}}\\ \Delta B_{\mathrm{F}i}&=\frac{2\hat{\varsigma}\cdot\Delta B}{1+\hat{\varsigma}}\end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

となり、ΔB 進展後の半楕円表面き裂の中心軸位置は、

$$b_{Si}=b_{Si-1}+\left(\Delta B_{\mathrm{E}i}-\Delta B_{\mathrm{F}i}\right)/2 \tag{4.48}$$

に変化する。

L 点（M 点）と表面までの距離は、(1.43)式で $y=b$ と代入することにより、

$$x=0.6718A \tag{1.49}$$

$\overline{\mathrm{LM}}=2b$ を軸とし、表面での長さが $2c$（図 4.19 参照）となる楕円の方程式は、

$$\frac{\left(x-0.6718A\right)^2}{\left(\dfrac{0.6718Ab}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.50}$$

したがって H 点（I 点）（図 4.21 参照）における(4.50)式の法線方向は、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=c}}=\frac{c^2-b^2}{0.6718c} \tag{4.51}$$

E 点（F 点）で　ΔB のき裂増分があると、H 点（I 点）でのき裂増分 Δc は、

$$\Delta c=\sec\left\{\tan^{-1}\frac{\mp\left(b^2-c^2\right)}{0.6718c}\right\}\Delta B \tag{4.52}$$

となる。

$\left(\overline{\mathrm{IH}}\right)_{i+1}\geq\left(\overline{\mathrm{LM}}\right)_{i+1}$（図 4.15(c)もしくは図 4.21 参照）になるまでは、上記半楕円き裂に内包され、表面に接する埋没楕円　$\mathrm{A}_{n+i}\mathrm{B}_{n+i}\mathrm{C}_{n+i}\mathrm{D}_{n+i}$ の B_{n+i} 点の　K 値振幅（$\Delta K_{\tilde{\lambda}=1}$）を求めることが必要である。楕円 $\mathrm{A}_{n+i}\mathrm{B}_{n+i}\mathrm{C}_{n+i}\mathrm{D}_{n+i}$ の y 方向の軸半長 b_e ならびに x 方向軸の半長 a_e は、

$$\left.\begin{aligned} b_e &= b_{Si}/1.35 \\ a_e &= \left(A+\Delta A\right)/2 \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

であり、y 方向の中心位置は(4.39)式の b_{Si} となる。したがって、B_{n+i} 点の K 値振幅（$\Delta K_{\tilde{\lambda}=1}$）は、(1.81)、(1.90)～(1.96)式より、

$$\Delta K_{\lambda=1} = \Delta K_{\mathrm{D}} \frac{K_R + K_L}{2K_M} \tag{4.54}$$

ただし、(1.86)式において $M_1{}'$ 、$M_2{}'$ に対する λ は、

$$\lambda = a_e / \left(t - a_e\right)$$

(1.85)~(1.86)式、(1.91)～(1.95)式では

$$a \to a_e$$

$$b \to b_e$$

$$b_S \to b_{Si}$$

と置換えれば良い。

一方、半楕円表面き裂最深部の K 値振幅 ΔK_{semi} は、(1.81)式に $\left(K_R + K_L\right)/2K_M$ を乗じたもので与えられる。ただし、(1.81)～(1.84)式において以下の置き換えをすることになる。

$$K \to \Delta K_{semi}$$

$$\sigma_t \to \Delta\bar{\sigma}_t$$

$$\sigma_b \to \Delta\bar{\sigma}_b$$

$$a \to A$$

$$b \to B$$

$$\phi = \pi/2$$

そして、き裂 ILBMH の最深部の K 値範囲は、

$$\Delta K = \left(\Delta K_{semi} - \Delta K_{\tilde{\lambda}=1}\right)\sqrt{c/b} + \Delta K_{\tilde{\lambda}=1} \tag{4.55}$$

（v）半楕円表面き裂が裏面に達し板厚貫通き裂となってからのき裂成長

半楕円表面き裂のき裂深さ A が $0.8t$ になったときの F 点の座標を $\left(0, b_{\mathrm{F}}\right)$、E 点のそれを $\left(0, b_{\mathrm{E}}\right)$ とする。また、この時点の b_{Si} （(1.91)式参照）を $b_{0.8t}$ とする。$\left[b_{\mathrm{F}}, b_{\mathrm{E}}\right]$ 間の平均引張応力振幅と平均面外曲げ応力振幅は、

$$\Delta\bar{\sigma}_t = \frac{1}{\left(b_{\mathrm{E}} - b_{\mathrm{F}}\right)} \int_{b_{\mathrm{F}}}^{b_{\mathrm{E}}} \Delta\sigma_{\mathrm{t}}\left(y\right) dy \tag{4.56-1}$$

$$\Delta\bar{\sigma}_b = \frac{1}{\left(b_{\mathrm{E}} - b_{\mathrm{F}}\right)} \int_{b_{\mathrm{F}}}^{b_{\mathrm{E}}} \Delta\sigma_b\left(y\right) dy \tag{4.56-2}$$

したがって$\left[b_{\mathrm{F}}, b_{\mathrm{E}}\right]$間の曲げ応力比は、

$$\beta=\frac{\Delta\bar{\sigma}_b}{\Delta\bar{\sigma}_t+\Delta\bar{\sigma}_b} \tag{4.57}$$

となる。そこで、

$$0.8t \to a_0$$

$$\left(b_{\mathrm{E}}-b_{\mathrm{F}}\right)/2 \to b_0$$

と置き、(6.1)～(6.6)式に従い、板厚貫通時のアスペクト比Yを求め(4.45)式より表面でのき裂増分$2\Delta B$を求める。そして、(4.46)～(4.48)式にしたがって E 点、F 点でのき裂増分ならびにき裂増分後の中心軸の位置が得られる。また、裏面のき裂増分に関しては(4.50)～(4.52)式と同様の取扱いにより推定できる。

すなわち、表面長さ（$\overline{\mathrm{FE}}$）が$2a$、裏面長さ（$\overline{\mathrm{KJ}}$）が$2c$で$\overline{\mathrm{FE}}$を長軸とする楕円は（常に裏面のき裂の中央と表面の中央の y 座標は等しいと理想化されている）、

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{\left(a^2-c^2\right)x^2}{a^2t^2}=1 \tag{4.58}$$

(4.58)式より、

$$f'(x)=\frac{-\left(a^2-c^2\right)x}{t\sqrt{a^2t^2-\left(a^2-c^2\right)x^2}} \tag{4.59}$$

き裂前縁線に対する裏面位置での法線方向の増分Δhは、

$$\Delta h=\left\{\frac{\int_{-a}^{a}\sigma_{eq}\left(y+b_s\right)\left(\sqrt{\frac{a+y}{a-y}}+\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}\right)dy}{\int_{-a}^{a}\sigma_t\left(y+b_s\right)\left(\sqrt{\frac{a+y}{a-y}}+\sqrt{\frac{a-y}{a+y}}\right)dy}\right\}^m\cdot\Delta a \tag{4.60}$$

したがって、裏面でのき裂増分Δcは、

$$\Delta c=\Delta h\cdot\sec\left\{\tan^{-1}f'(x)_{x-t}\right\}=\Delta h\cdot\sec\left\{\tan^{-1}\frac{\left(a^2-c^2\right)}{at}\right\} \tag{4.61}$$

ここで、表面き裂が裏面に達した瞬間は、(ⅳ)と同様$c=2mm$とすれば良い。また線分$\widehat{\mathrm{JE}}$（＝$\widehat{\mathrm{KF}}$）の長さ$\widehat{S}$は、

$$\widehat{S}=\int_0^t\sqrt{1+\left\{f'(x)\right\}^2}dx \tag{4.62}$$

したがって、E 点側のK値は(1.94)、(1.95)式を参照して、

$$K_{\mathrm{E}} = \frac{t \cdot M_R}{\widehat{S}\sqrt{\pi a}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} \int_{-a}^{a} \sigma_{eq}\left(y + b_s\right) \sqrt{\frac{a+y}{a-y}} dy \tag{4.63}$$

ここで、$\overline{a}$ は板厚内の平均き裂長さであり、

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \frac{1}{t}\int_0^t y dx = \frac{1}{t^2}\int_0^t \sqrt{a^2 t^2 - \left(a^2 - c^2\right) x^2} dx \\ &= \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - c^2}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \end{aligned} \tag{4.64}$$

また、F 点側の K 値は、

$$K_{\mathrm{F}} = \frac{t \cdot M_L}{\widehat{S}\sqrt{\pi a}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} \int_{-a}^{a} \sigma_{eq}\left(y + b_s\right) \sqrt{\frac{a-y}{a+y}} dy \tag{4.65}$$

で与えられる。

$$\Delta c = \Delta h \cdot \sec\left\{\tan^{-1} f'\left(x\right)_{x-t}\right\} = \Delta h \cdot \sec\left\{\tan^{-1} \frac{\left(a^2 - c^2\right)}{at}\right\} \tag{4.66}$$

ここで、表面き裂が裏面に達した瞬間は、(ⅳ)と同様 $c = 2mm$ とすれば良い。また線分 $\overset{\frown}{\mathrm{JE}}$ （＝$\overset{\frown}{\mathrm{KF}}$）の長さ $\widehat{S}$ は、

$$\widehat{S} = \int_0^t \sqrt{1 + \left\{f'\left(x\right)\right\}^2} dx \tag{4.67}$$

したがって、E 点側の K 値は(1.93)、(1.94)式を参照して、

$$K_{\mathrm{E}} = \frac{t \cdot M_R}{\widehat{S}\sqrt{\pi a}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} \int_{-a}^{a} \sigma_{eq}\left(y + b_s\right) \sqrt{\frac{a+y}{a-y}} dy \tag{4.68}$$

ここで、$\overline{a}$ は板厚内の平均き裂長さであり、

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \frac{1}{t}\int_0^t y dx = \frac{1}{t^2}\int_0^t \sqrt{a^2 t^2 - \left(a^2 - c^2\right) x^2} dx \\ &= \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - c^2}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \end{aligned} \tag{4.69}$$

また、F 点側の K 値は、

$$K_{\mathrm{F}} = \frac{t \cdot M_L}{\widehat{S}\sqrt{\pi a}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} \int_{-a}^{a} \sigma_{eq}\left(y + b_s\right) \sqrt{\frac{a-y}{a+y}} dy \tag{4.70}$$

で与えられる。

　なお、き裂結合力による K 値は 4.1~4.3 と同様に降伏点レベルの応力がき裂面に一様に働くとして

求めれば良い。

5.　ADSTIC の計算流れの概要

ADSTIC では汎用 FEM により大きな応力振幅が働く点を探し、その点を含んだ最も応力振幅勾配が小さい曲面（クリティカル・カッティング面）を探し出し、この面の法線方向応力振幅が最も大きな方向とその直角方向の法線方向応力振幅分布を求め、それに対応した表面き裂のアスペクト比変化（仮想単独表面き裂から合体完了後の単一表面き裂について：6.4 節参照）を設定できる機能を有することが望ましい。さらに表面き裂が板厚を貫通した後は、板厚貫通き裂の進展経路を求める必要がある。そして、外力振幅に対応する $a \sim \Delta K$ 関係、最大荷重時の $a \sim K$ 関係、残留応力に対する $a \sim K$ 関係、引張側き裂結合力分布の上限（引張降伏点と塑性拘束係数の積）がき裂内面に働く場合の $a \sim K$ 関係、さらには圧縮側き裂結合力分布の下限（圧縮降伏点と塑性拘束係数の積）がき裂内面に働く場合の $a \sim K$ 関係を求めなければならない。き裂結合力分布が働く場合の $a \sim K$ 関係は、FEM にき裂を挿入するだけでは求められず、き裂内面にき裂結合力分布の上下限に相当する内圧を働かさなければならない（単位内圧が作用する場合の $a \sim K$ 関係から得る a の位置で K 値に、a の位置のき裂結合力を乗じたものとなる）。しかし、4.2 節～4.4 節のような近似的取扱いで求めることが出来る。どのような初期状態から、疲労き裂の発生ならびに脆性破壊を考えるのかは、部材毎に異なるので、考える構造毎にき裂発生からき裂が拡大し、き裂成長に伴って脆性破壊防止のための要求 CTOD 値がどのように変化するのかを考えたストーリ毎の計算をすることになる。

したがって、FEM による弾性応力解析結果を受けて、各種条件下の $a \sim K$ 関係を与える必要がある。対象機種が決まれば部位毎にストーリを描き、アスペクト比変化等が設定出来、各種条件下の $a \sim K$ 関係を求めることが可能になるので、これらを CRT 上で選択して、自動的に中核部の計算に導いて、き裂成長に伴う寿命ならびに要求 CTOD 値が出力できるようになる。この全体のシステムを ADSTIC と称している。

健全な応力集中部（切欠）からの疲労き裂発生をシミュレートする場合、最初はせん断き裂が発生することになる。せん断き裂の成長は、長いき裂の ΔK_{RP} と繰返し塑性域寸法との関係がせん断き裂に対しても成立するとして、さらには実き裂部でも引張荷重を分担すると仮定して、最初の結晶粒界に達した時点の半円状表面き裂に対する繰返し塑性域寸法を求め、これより等価 ΔK_{RP} を定義している。そのため、せん断き裂状態では荷重履歴の影響を受けないことになる。しかし、3.1.2 に示したようにせん断き裂が最初の結晶粒界に達した時点の最小荷重時の固有変位分布は、荷重履歴の影響を受ける。

引張塑性域が仮想き裂を超えて成長する場合は実き裂部は完全に開口した状態になっている。一方、圧縮塑性域が仮想き裂を超えて形成される場合には、実き裂部分も完全に圧縮降伏した状態で仮想き裂が進展する。また、仮想き裂が形成された塑性域と逆符号の塑性域で仮想き裂が成長する場合には、

完全に静的降伏点に回復した後であるので、そのことを考慮した計算流れとなっている。

き裂進展箇所で固有変位が取り込まれることを考慮して、最小荷重時にはまずき裂が進展しない状態の COD : $\hat{V}(x)$ を求め、固有変位が正の場合には完全にき裂が開口した状態で Δc だけ進展させた場合の COD: $\tilde{V}(x)$ との差の定数倍だけ Δc 部で変化した状態で改めて最小荷重時の COD を求めている。しかし、圧縮固有変位場では、実き裂部が圧縮降伏している場合には、Δc き裂を進めても COD は変化しないので、安全側という観点からき裂成長を速くなるように $\tilde{V}(x)=0$ として Δc に取り込まれる固有変位を与えている。この取扱いに関しては、未だ実験結果との対比がなされておらず、今後の課題である。

なお未だ汎用 ADSTIC は完成しておらず、今後種々の問題を解く段階で改良が計られていき、汎用のものが開発されるものと期待している。

第４編参考文献

1) G.M.Boyd: Fracture Design Practices for Ship Structures , Fracture, H.Liebowitzed., (1969), Academic Press,p.383-470

2) 例えば　岡村：線形破壊力学入門、培風館、(1976)

3) (社)日本鉄鋼協会「高強度鋼板の疲労強度向上研究部会」報告書：溶接用鋼の疲労強度向上に関する基礎検討、(1995)

4) 村田：構造材料の損傷と破壊、㈱日刊工業新聞社、(1995)p.112

5) M.Hück, P.Heuler, J.Bergmann：Gemeinschaftsarbeit Pkw-Industrie-IABG, Relative Miner-Regel. Teil , Ergebnisse der Bauteilversuche, IABG-Bericht,TF2904,(1991)

6) F.M.Burdekin and M.G.Dawes: Practical Use of Linear Elastic and Yielding Fracture Mechanics with Particular Reference to Pressure Vessel, I.I.W. Doc.,X-641-71,(1971)

7) BSI BS 7910: Guide on Methods for Assessing the Acceptability of Flaws in Metallic Structures,(1999)

8) WES2805: Method for Assessing Defects in Welded Joints Causing Brittle Fracture Development and Fatigue Crack Growth,The Japan Welding Engineering Society,(2007)

9) D.S.Dugdale:Yielding of Steel Sheets Containing Slits,Journal of Mech.Phys. Solids, Vol.8,(1960),p.100-104

10) A.A.Wells,Proc. Crack Propagation, Sympo. Cranfield, Sept. (1962)

11) B.K.Neale：An investigation into the effect of thickness on the fracture behavior of compact tension specimen , Int. Jour. of Fracture,14,2,(1978),p.203

12) H.Tada, P.C.Paris, G.R.Irwin: The Stress Analysis of Cracks Handbook, Professional Engineering Publishing, (2000)

13) T.Ingham, G.R.Egan, D.Elliott and T.C.Harrison：The Effect of Geometry on the Interpretation of COD Test Data, Instn Wech. Engineers, C54,(1971),p.200

14) British Standard BS 7448-1: Fracture Mechanics Thoughness Test-Part 1: Determination of K_{IC} ,Critical CTOD and Critical J values of Metallic Materials, (1991)

15) 日本溶接協会規格　WES1108：き裂先端開口変位(CTOD)試験方法,(1996)

16) 例えば R.Hill：*Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press(Oxford),(1950) (鷲津、山田、工藤訳、塑性学、1954, 倍風館)

17) S.Suresh：*Fatigue of Materials*, Cambridge Univ. Press,(1998)

18) K.Hashiguchi：Constitutive equations of elastoplastic materials with anisotropic hardening and elastic-plastic transition, Journal of Applied Mechanics, ASME,48,(1981),pp.297-301

19) K.Hashiguchi ： *Elastoplasticity Theory*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Vol.42, Springer,(2009)

20) 堤、矢嶋、村上、後藤、豊貞：損傷を考慮した繰返し弾塑性モデル－巨視的弾性条件下における疲労き裂発生－、応用力学論文集, 10, 437-444 ,(2007)

21) S.Tsutsumi, M.Toyosada, D.Yajima, K.Gotho,K.Hashiguchi: Mechanical Fatigue Simulation by Unconventional Plasticity Model, Pro. of OMAE2006, 25th Int. Conf. on Offshore Mechanics and arctic Engineering, June 4-9, Hamburg, Germany, OMAE2006-92017

22) FLARP 研究会：FLARP 研究会総合報告書、豊貞監修＆編集、(2009)

23) 豊貞、後藤、村上、中山、渡辺：Dugdale model における仮想き裂の物理的意味に関する一考察、西部造船会会報、Vol.105，(2003),p.249-255

24) E.Haibach：The influence of cyclic material propaties onfatigue life prediction by amplitude transformation, International Journal of Fatigue, ISSN 0142-1123,vol.1,(1979),p.7-16

25) K.Reppermurd ： Ein Konzept Zur Berechnung der Zuvelessigkeit bei Ermudungsbean-spruchung, Stahlbau,(1984)

26) 平川：ドイツ高速鉄道 ICE－3・ケルン脱線事故―鉄道用車軸の金属疲労はなぜ起こったか、慧文社 (2009/10,) ISBN-10: 486330034, および https://www.tetras.uitec.jeed.or.jp/document/GinouGijutu/200402/20040201/20040201_index.html

27) 後藤：溶接継手の疲労強度の基礎、溶接接合教室第 3 章溶接構造の力学と設計、溶接学会誌、78-7,(2009),p.45-49

28) S.J.Maddox ： Application of Fracture Mechanics to the Priblem of Fatigue in Welded Structures, Elsevier B.V.(2004)

29) 石田：き裂の弾性解析と応力拡大係数、培風館、(1976)

30) 豊貞、冨田、八木：亀裂破壊の安全性評価、船舶・海洋構造物の損傷に関するシンポジューム、日本造船学会,(mar.1983),p.119-174

31) F.Erdogan : A Comprative Study of Crack Propagation in Plates under Extension and Bending, Proc. 1st Int. Conf. Fracture,Sendai,(1975),p.764

32) 豊貞：破壊力学の疲労き裂伝ぱへの応用(2)、機械の研究、VOl.31,No.10,(1979),p.1145-1152

33) 金沢、町田、峰久、永井、豊貞、岡本、田中：曲げと引張を受ける疲労き裂伝播速度と脆性破壊発生について、日本造船学会論文集、Vol.136,(1974),p.191－205

録４A　片側貫通き裂の COD を評価できる EDS の初期検討

図 4A-1 の片側半円切欠帯板モデル（x 軸は対称軸）に図に示すように一様外力を作用させた弾塑性 FEM 解析が汎用非線形コード FINAS[1]を用いてなされている [2]。解析は平面応力状態で行われており、材料の構成関係は、ヤング率（E）：2.06×10^5 MPa、ポアソン比：0.3、降伏点（σ_Y）：294 MPa、2 次硬化係数（H）：2060 MPa なるバイ・リニアな応力～ひずみ曲線で降伏判定はミーゼス条件が採用されている。外荷重として σ_{net}/σ_Y が 0.39、0.50 および 0.75 の 3case についてなされている。$\sigma_{net}/\sigma_Y = 0.75$ の場合について塑性ひずみのコンターを図 4A-2(1)に、切欠底から適当にある距離離れた切欠線に垂直な線（x ＝一定）に沿う y 方向塑性ひずみ（荷重軸方向塑性ひずみ：ε_y^p）の解析結果が図 4A-2(2)に示す。 当然のことながら、切欠底に近くなるほど塑性ひずみは大きくなり、その存在範囲も y 方向に広がっている。

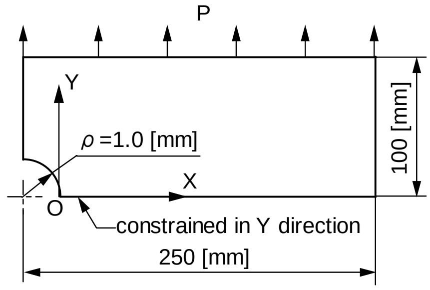
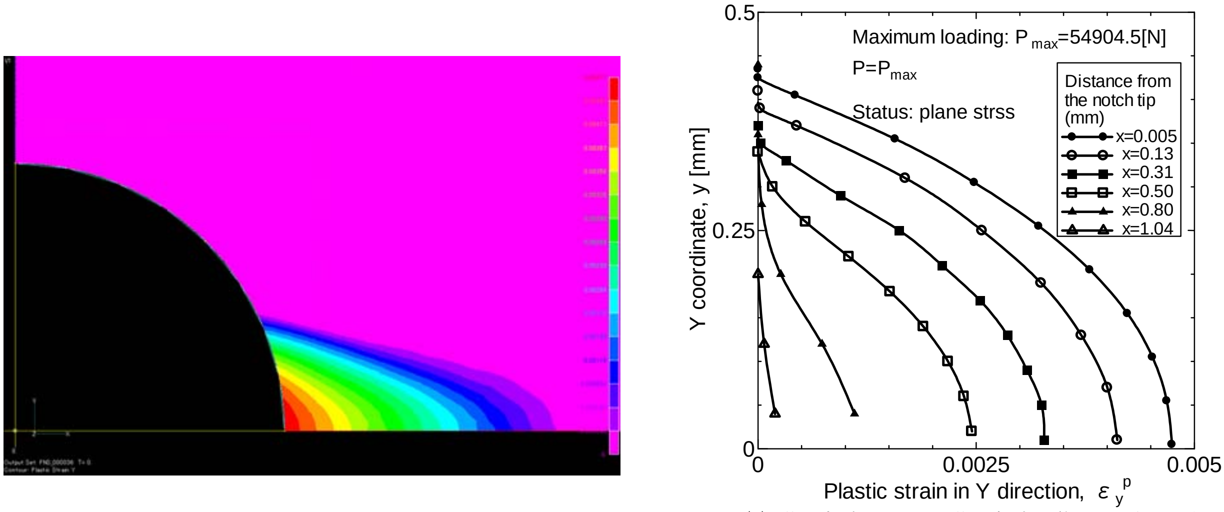


図 4A-1 一様引張を受ける片側切欠付き帯板

き裂は存在しないが、引張塑性域を仮想き裂とみなし、等価分布応力下におけるき裂結合力モデル



(2) 荷重軸方向に沿う荷重軸方向塑性ひずみ分布

図 4A-2 片側切欠帯板底に形成される塑性ひずみの解析例

を適用して、仮想き裂の COD が求められている。すなわち、図 4A-1（ただし幅を無限大）の半円切欠（切欠半径：b）底にき裂（き裂長：a）が存在する場合の K 値 [3]、

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}\left(3.439 - 6.465s + 2.22s^2 + 15.828s^3 - 24.401s^4 + 10.495s^5\right) \qquad (4A\text{-}1)$$

ただし、

$$s = \frac{a}{a+b}$$

より得た $a \sim K$ 関係を用いて、第 3 編 7 章に示した方法で等価分布応力を求め、この応力下でのき裂結合力モデルを解いている。その結果は図 4A-3 のようになっている。図中には 3 負荷段階（σ_{net}/σ_Y ＝0.39、0.50、0.75）における COD を、3 つの塑性拘束係数（λ ＝1.09、1.11、1.13）を仮定して求めた結果が、それぞれ短点線、実線ならびに点線で示されている。一方、図 4A-3(2)に示した y 方向塑性ひずみの積分値が黒丸印で示されている。このように妥当な塑性拘束係数を使用すれば、応力集中場に生じる塑性域の固有変位を全体的には、等価分布応力下におけるき裂結合力モデルで表現できていることが分かる。しかし、マウス部（切欠底）での固有変位は、結合力モデルで得る仮想 COD よりも大きくなっている。

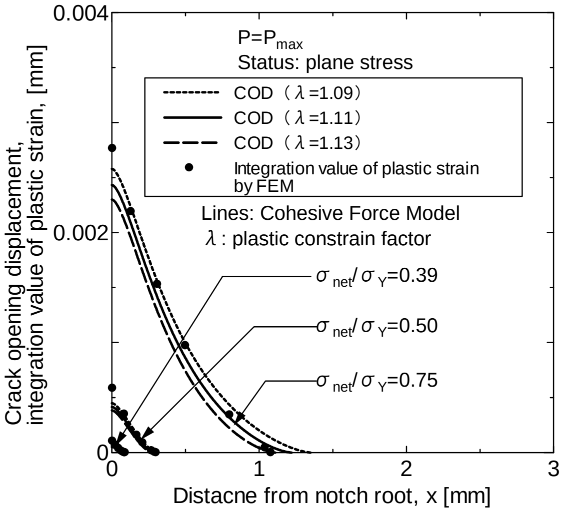


図 4A-3 固有変位と EDS によるき裂結合力モデルから得られる仮想 COD との比較

この原因として、対象とする構造での $a \sim K$ 関係を無限板中の直線き裂に再現する分布応力と定義した、等価分布応力（*EDS*）を用いたためである可能性がある。すなわち、構造物でのき裂長さと *EDS* でのき裂長さを同じとすると、マウス部は無限板中の直線き裂上ではき裂中心となり、対称条件から常に $x = 0$ での COD の勾配が 0 となってしまうためではないかと考えられた。対象とする構造のき裂長さと、*EDS* におけるき裂長さを同じとする必要はなく、対象とする構造におけるき裂変化量と K 値関係が両者で同じであれば、*EDS* が定義できる。$a \sim K$ 関係を半無限板上の端部き裂で再現する応力分布を *EDS* と定義すれば、マウス部近傍で直線的な COD を得ることが出来るが、その場合には COD を解析的に求めることが出来なくなる。すなわち、き裂面の任意位置に集中荷重が作用する場合の任意位置の COD 解析解が得られているのは、無限板中の直線き裂だけである。

そこで、*EDS* は原点から離れた領域で定義することにして片側切欠底でのマウス部近傍における COD を妥当に評価できるか否かが検討されている。すなわち、$[-x_0, x_0]$ 間には応力を作用させないで、$|x| \geq x_0$ に原点に対して対称な分布応力を作用させて、$x = x_0$ における COD の勾配を 0 にしないことで、片側端部き裂のマウス部近傍における COD 形状を直線的なものに出来るか否かが、下記のように検討された。

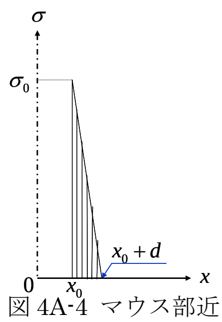


図 4A-4 マウス部近傍の COD を与える集中的荷重

$x \to x_0$ とした場合に COD が直線的に大きくなる *EDS* として、図 4A-4

のように$\left[\left|x_0\right|,\left|x_0+d\right|\right]$（$d$ ：十分小さな値）間に、直線的な応力を与えた場合が検討されている。この応力を、

$$\sigma\left(x\right)=\frac{\sigma_0}{d}\left\{-x+\left(x_0+d\right)\right\} \tag{4A-2}$$

と置き、き裂長さをa（$>\left(x_0+d\right)$）とすると、(4A-2)式による$x=b$点における COD（$V\left(b\right)$）は、(1.51)式より

$$V\left(b\right)=\frac{8}{\pi E'}\left[\int_{x_0}^{b}\frac{\sigma_0}{d}\left\{-x+\left(x_0+d\right)\right\}\coth^{-1}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}}dx\right.$$
$$\left.+\int_{b}^{x_0+d}\frac{\sigma_0}{d}\left\{-x+\left(x_0+d\right)\right\}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}}dx\right] \tag{4A-3}$$

したがって、$x=x_0$における COD は

$$V\left(x_0\right)=-\frac{8\sigma_0}{\pi E'd}\left[\frac{2dx_0+d^2}{4}\ln\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}+\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}}{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}+\frac{1}{2}\left(a^2-x_0^2\right)\right]$$
$$+\frac{8\sigma_0\left(x_0+d\right)}{\pi E'd}\left[\sqrt{a^2-x_0^2}\sin^{-1}\frac{x_0+d}{a}+\frac{d}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}+\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}}{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}}\right.$$
$$+\frac{x_0}{2}\ln\frac{a^2+x_0\left(x_0+d\right)+\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}}{a^2+x_0\left(x_0+d\right)-\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}}$$
$$\left.-\sqrt{a^2-x_0^2}\sin^{-1}\frac{x_0}{a}-\frac{x_0}{2}\ln\frac{a^2}{x_0^2}\right] \tag{4A-4}$$

また、$x=b$（$x_0<b\le x_0+d$）における COD は

$$V\left(b\right)=-\frac{8\sigma_0}{\pi E'd}\left[-\frac{x_0^2-b^2}{4}\ln\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-x_0^2}\right.$$

$$+\frac{(x_0+d)^2-b^2}{4}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}{\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}\Bigg]$$

$$+\frac{8\sigma_0(x_0+d)}{\pi E'd}\Bigg[-\sqrt{a^2-b^2}\sin^{-1}\frac{x_0}{a}-\frac{x_0-b}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$-\frac{b}{2}\ln\frac{a^2+bx_0+\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+bx_0-\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a^2-b^2}\sin^{-1}\frac{x_0+d}{a}$$

$$+\frac{x_0+d-b}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}{\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}$$

$$+\frac{b}{2}\ln\frac{a^2+b(x_0+d)+\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}{a^2+b(x_0+d)-\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}\Bigg] \tag{4A-5}$$

したがって、 $x=x_0+\delta$ （ただし $0\le\delta\le d$ ）における COD は、

$$V(x_0+\delta)=-\frac{8\sigma_0}{\pi E'd}\Bigg[-\frac{x_0^2-(x_0+\delta)^2}{4}\ln\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}+\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}}{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}\sqrt{a^2-x_0^2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}$$

$$+\frac{(x_0+d)^2-(x_0+\delta)^2}{4}\ln\frac{\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}+\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}{\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}-\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}\Bigg]$$

$$+\frac{8\sigma_0(x_0+d)}{\pi E'd}\Bigg[-\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}\sin^{-1}\frac{x_0}{a}-\frac{\delta}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}+\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}}{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}}$$

$$-\frac{(x_0+\delta)}{2}\ln\frac{a^2+(x_0+\delta)x_0+\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}}{a^2+(x_0+\delta)x_0-\sqrt{a^2-x_0^2}\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}}$$

$$+\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}\sin^{-1}\frac{x_0+d}{a}+\frac{d-\delta}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}+\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}{\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}-\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}$$

$$+\frac{x_0+\delta}{2}\ln\frac{a^2+(x_0+\delta)(x_0+d)+\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}{a^2+(x_0+\delta)(x_0+d)-\sqrt{a^2-(x_0+\delta)^2}\sqrt{a^2-(x_0+d)^2}}\Bigg] \tag{4A-6}$$

ここで、$V\left(x_0+\delta\right)$ と $V\left(x_0\right)$ の差を考え、$\left(x_0+\delta\right)<\left(x_0+d\right)\ll a$ ならびに $\delta\ll d$ と考え、

$$\sqrt{1-\frac{\left(x_0+d\right)^2}{a^2}}\cong 1-\frac{\left(x_0+d\right)^2}{2a^2} \tag{4A-7}$$

の関係を用い、

$$\frac{x_0^2}{2a^2}\frac{\left(x_0+d\right)^2}{2a^2}$$

などの高次の項を無視すると、

$$\begin{aligned}
V\left(x_0+\delta\right)-V\left(x_0\right)=\frac{8\sigma}{\pi E'd}\Bigg[\!\!\Bigg[&\left\{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-\left(x_0+\delta\right)^2}\right\}\\
&\times\left[\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}\right\}-\left(x_0+d\right)\left(\sin^{-1}\frac{x_0+d}{a}-\sin^{-1}\frac{x_0}{a}\right)\right]\\
&+\frac{-d^2+2d\delta-\delta^2}{4}\ln\left(2x_0d+d^2-2x_0\delta-\delta^2\right)\\
&+\frac{\delta\left(\delta-2d\right)}{4}\ln\left(2x_0\delta+\delta^2\right)+\frac{d^2}{4}\ln\left(2x_0d+d^2\right)\\
&+\frac{x_0\left(x_0+d\right)}{2}\ln\frac{\left\{2\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)+1+\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)^2\right\}\left\{2\left(1+\frac{d}{x_0}\right)+1+\left(1+\frac{d}{x_0}\right)^2\right\}}{4\left\{2\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)\left(1+\frac{d}{x_0}\right)+\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)^2+\left(1+\frac{d}{x_0}\right)^2\right\}}\\
&+\frac{\delta\left(x_0+d\right)}{2}\ln\frac{2\left(1+\frac{d}{x_0}\right)+1+\left(1+\frac{d}{x_0}\right)^2}{2\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)\left(1+\frac{d}{x_0}\right)+\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)^2+\left(1+\frac{d}{x_0}\right)^2}\Bigg]\!\!\Bigg]
\end{aligned} \tag{4A-8}$$

さらに、

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+\frac{d}{x_0}\right)^2\cong 1+\frac{2d}{x_0}\\
&\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)\left(1+\frac{d}{x_0}\right)\cong 1+\frac{\delta}{x_0}+\frac{d}{x_0}
\end{aligned}\right\} \tag{4A-9}$$

の関係式と $\delta\ll d$ であるということを考慮すると、

$$V\left(x_0+\delta\right)-V\left(x_0\right)=\frac{8\sigma}{\pi E'd}\Bigg[\!\!\Bigg[\left\{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-\left(x_0+\delta\right)^2}\right\}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2-x_0^2}-\sqrt{a^2-\left(x_0+d\right)^2}\right\}-\left(x_0+d\right)\left(\sin^{-1}\frac{x_0+d}{a}-\sin^{-1}\frac{x_0}{a}\right)\right]$$
$$+\frac{-d^2+2d\delta-\delta^2}{4}\ln\left(2x_0d+d^2-2x_0\delta-\delta^2\right)$$
$$+\frac{\delta\left(\delta-2d\right)}{4}\ln\left(2x_0\delta+\delta^2\right)+\frac{d^2}{4}\ln\left(2x_0d+d^2\right)$$
$$+\frac{x_0\left(x_0+d\right)}{2}\ln\frac{\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)\left(1+\frac{d}{x_0}\right)}{1+\frac{\delta}{x_0}+\frac{d}{x_0}}+\frac{\delta\left(x_0+d\right)}{2}\ln\frac{1+\frac{\delta}{x_0}}{1+\frac{\delta}{x_0}+\frac{d}{x_0}}\Bigg]\Bigg]$$
$$\cong\frac{8\sigma}{\pi E'd}\left\{\frac{\delta\left(\delta-2d\right)}{4}\ln\left(2x_0\delta+\delta^2\right)\right\}$$
$$\cong\frac{8\sigma}{\pi E'd}\left\{\frac{-d\delta}{2}\ln\left(2x_0\delta\right)\right\}$$
$$\cong\frac{8\sigma}{\pi E'd}\left\{\frac{d\delta}{2}\ln\frac{1}{2x_0\delta}\right\}>0 \qquad \text{(4A-10)}$$

したがって、図 4A-4 のような集中的な荷重を与えても、負荷した箇所$\left[x_0,x_0+d\right]$間の下界のx_0の位置で COD が最大とならないことが分かる。図 4A-5 は(4A-3)式を用いて図 4A-4 の負荷を$a=22mm$のき裂面の$\left[2,5\right]$mm 間に直線分布応力（$x_0=2mm$の位置に$\sigma_0=300MPa$、$x_0=5mm$の位置で 0 応力）を作用させた場合の COD を求めた結果である。本図から分かるように、この場合は COD が最大となるのは、$x=2.3mm$付近である。このように、端部き裂のマウス部近傍の COD を、無限板中の直線き裂で表現するには、$-a\sim a$間のき裂内面に$x=0$で最も大きくなる左右対称の内圧を与えて$x=0$で最大の COD が生じる保障をすると同時に、$x=0$で無限大となる EDS が必要になると考えられる。

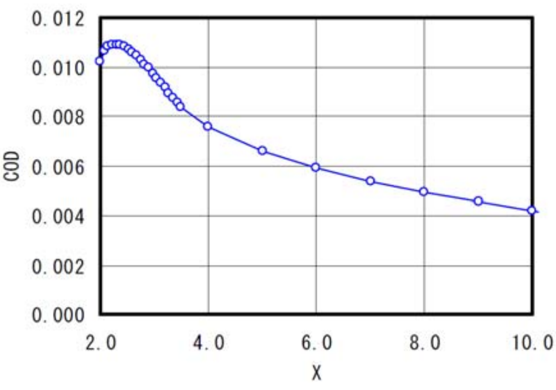


図 4A-5 COD の計算例（$a=22mm,x_0=2mm,x_0+d=5mm$,$\sigma_0=300MPa$）

付録４B　EDS 下のき裂結合力モデルにおける仮想き裂先端での応力連続性

以下は JIP テクノサイエンス(株)の巻幡氏が証明したものである。彼は無限板中の直線き裂の線上に x 軸をとり、き裂中央を原点とし任意の左右対称な応力場（すなわち $\sigma(x)=\sigma(-x)$ なる作用応力）における仮想き裂先端位置で応力が連続であることを以下のように証明した。

1.　問題

任意応力分布を受ける無限板中の貫通き裂において、仮想き裂先端では応力は連続である（仮想き裂先端の実き裂側と反対側とで応力が等しい)。

無限板中の貫通き裂の中心を原点とし、貫通き裂が x 軸上にあるように座標系を定める。$[-a,a]$ を実き裂、$[-a_0,-a]$ および $[a,a_0]$ を仮想き裂とする．このとき，貫通き裂を有する無限板中の応力分布は，以下の(a)，(b)，(c)の応力分布の重ね合わせにより表される。ここで、無限板中の応力分布は y 軸対称とした。

(a)　x 軸上の応力分布が y 軸対称である無限板（無き裂）

x 軸上の応力分布 $\sigma(\xi)$ は、仮想き裂先端 a_0 で（両側）連続、y 軸対称な関数であるとし、実き裂および仮想き裂 $[0,a_0]$ 上有界かつ可積分と仮定する。

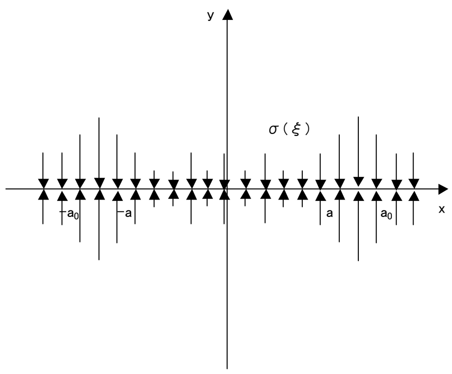
このとき、Westergaad の応力関数 $Z_I^{(a)}(z)$ を用いる[5)]と、ξ を x 軸上の点としたとき

$$\sigma(\xi)=\mathrm{Re}\,Z_I^{(a)}(\xi) \tag{4B-1}$$

と表せる。また、き裂が存在しないため、K 値は

$$K_I^{(a)}=0 \tag{4B-2}$$

となる。



(b)　実き裂と仮想き裂内面に内圧を受ける無限板中のき裂

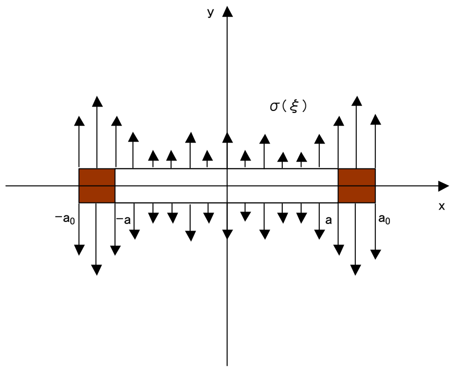
実き裂と仮想き裂内面に受ける内圧 $\sigma(\xi)$ は y 軸対称であることから、Westergaad の応力関数は以

下のように表される。

$$Z_I^{(b)}(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_0} \frac{\sigma(\xi) z\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}{(z^2 - \xi^2)\sqrt{z^2 - a_0^2}} d\xi \tag{4B-3}$$

また、K 値は以下のように表される。

$$K_I^{(b)} = \frac{2\sqrt{a_0}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a_0} \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}} d\xi \tag{4B-4}$$



(c)　仮想き裂内面に y 軸対称な負圧を受ける無限板中のき裂

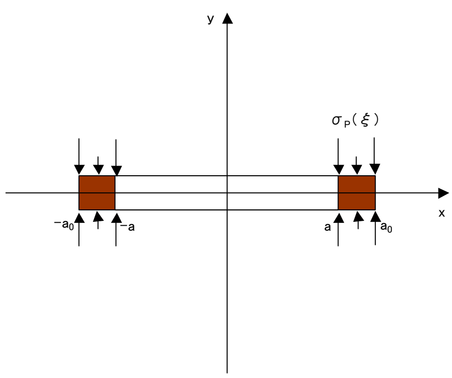
仮想き裂内面に受ける負圧 $\sigma_P(\xi)$ は、仮想き裂 $[-a_0, -a]$ および $[a, a_0]$ 上定義され、仮想き裂先端 a_0 で左側連続、y 軸対称な関数であるとし、仮想き裂 $[a, a_0]$ 上有界かつ可積分と仮定する。

仮想き裂内面に受ける負圧 $\sigma_P(\xi)$ は y 軸対称であることから、Westergaad の応力関数は以下のように表される。

$$Z_I^{(c)}(z) = -\frac{2}{\pi}\int_a^{a_0} \frac{\sigma_P(\xi) z\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}{(z^2 - \xi^2)\sqrt{z^2 - a_0^2}} d\xi \tag{4B-5}$$

また、K 値は以下のように表される。

$$K_I^{(c)} = -\frac{2\sqrt{a_0}}{\sqrt{\pi}}\int_a^{a_0} \frac{\sigma_P(\xi)}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}} d\xi \tag{4B-6}$$



このとき、貫通き裂を有する無限板に関する Westergaad の応力関数 $Z_I(z)$ は、以下のように表される。

$$Z_I(z) = Z_I^{(a)}(z) + Z_I^{(b)}(z) + Z_I^{(c)}(z) \tag{4B-7}$$

また、x 軸上における y 方向直応力 $\sigma_y(x)$ は、, 以下のように表される。

$$\sigma_y(x) = \mathrm{Re}\, Z_I(x) \tag{4B-8}$$

このとき，仮想き裂先端の実き裂側と反対側とで応力が等しいこと，すなわち，以下の等式を証明する．

$$\lim_{x \to a_0 + 0} \sigma_y(x) = \sigma_P(a_0) \tag{4B-9}$$

２．（4B-9）式の証明

①　(b)，(c)における Westergaad の応力関数を，以下のように，仮想き裂先端 a_0 で発散する項と，発散しない項に分解する．

$$Z_I^{(b)}(z) = \frac{2}{\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2 - a_0^2}}\int_0^{a_0}\frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi - \frac{2}{\pi}\int_0^{a_0}\frac{\sigma(\xi) z\sqrt{z^2 - a_0^2}}{\left(z^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi \tag{4B-10}$$

$$Z_I^{(c)}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2 - a_0^2}}\int_a^{a_0}\frac{\sigma_P(\xi)}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi + \frac{2}{\pi}\int_a^{a_0}\frac{\sigma_P(\xi) z\sqrt{z^2 - a_0^2}}{\left(z^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi \tag{4B-11}$$

②　仮想き裂先端では応力拡大係数は 0 であることから，

$$K_I^{(a)} + K_I^{(b)} + K_I^{(c)} = 0 \tag{4B-12}$$

である。したがって、

$$\int_0^{a_0}\frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi - \int_a^{a_0}\frac{\sigma_P(\xi)}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi = 0 \tag{4B-13}$$

が成り立つ．

③　（4B-7）式に，(4B-10)式および（4B-11)式を代入し，（4B-13）式を用いると，Westergaad の応力関数は以下のように表される．

$$Z_I(z) = Z_I^{(a)}(z) - \frac{2}{\pi}\int_0^{a_0}\frac{\sigma(\xi) z\sqrt{z^2 - a_0^2}}{\left(z^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi + \frac{2}{\pi}\int_a^{a_0}\frac{\sigma_P(\xi) z\sqrt{z^2 - a_0^2}}{\left(z^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}d\xi \tag{4B-14}$$

④　以下の等式を用いる．（第３章で証明する．）

b を負でない実数，x を実数として，$x > a_0$ のとき，以下が成り立つ．

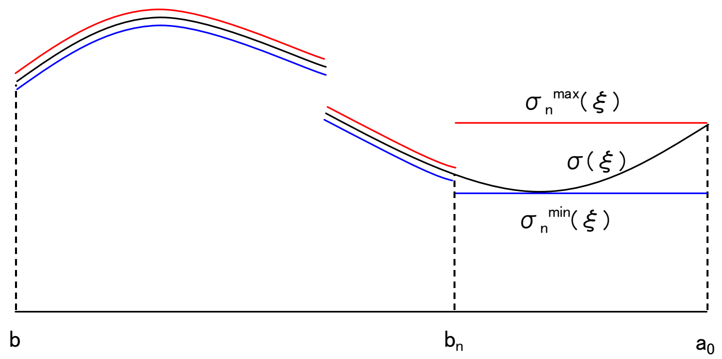
$$\lim_{x \to a_0+0} \frac{2}{\pi} \int_b^{a_0} \frac{\sigma(\xi) x \sqrt{x^2 - a_0^2}}{\left(x^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}} d\xi = \sigma(a_0) \tag{4B-15}$$

⑤　応力の連続性が示される。

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a_0+0} \sigma_y(x) &= \lim_{x \to a_0+0} \mathrm{Re}\, Z_I(x) \\ &= \lim_{x \to a_0+0} \sigma(x) - \lim_{x \to a_0+0} \frac{2}{\pi} \int_0^{a_0} \frac{\sigma(\xi) x \sqrt{x^2 - a_0^2}}{\left(x^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}} d\xi + \lim_{x \to a_0+0} \frac{2}{\pi} \int_a^{a_0} \frac{\sigma_P(\xi) x \sqrt{x^2 - a_0^2}}{\left(x^2 - \xi^2\right)\sqrt{a_0^2 - \xi^2}} d\xi \\ &= \sigma(a_0) - \sigma(a_0) + \sigma_P(a_0) \\ &= \sigma_P(a_0) \end{aligned} \tag{4B-16}$$

３．(4B-15)式の証明

①　$\sigma(\xi)$は，仮想き裂先端a_0で左側連続であることにより，以下のような，a_0の近傍で定数とした関数列$\sigma_n^{\min}(\xi)$と$\sigma_n^{\max}(\xi)$の極限として表せる．



$$\sigma_n^{\min}(\xi) = \begin{cases} \sigma(\xi) & (b \le \xi < b_n) \\ \inf\limits_{b_n \le \eta \le a_0} \sigma(\eta) & (b_n \le \xi \le a_0) \end{cases} \tag{4B-17}$$

$$\sigma_n^{\max}(\xi) = \begin{cases} \sigma(\xi) & (b \le \xi < b_n) \\ \sup\limits_{b_n \le \eta \le a_0} \sigma(\eta) & (b_n \le \xi \le a_0) \end{cases} \tag{4B-18}$$

ここで、

$b_n = b + \dfrac{n-1}{n}(a_0 - b)$とおいた。

このとき、

$$\sigma_n^{\min}(a_0) \le \sigma(a_0) \le \sigma_n^{\max}(a_0) \tag{4B-19}$$

であり、$\sigma(\xi)$のa_0における連続性から、

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{\min}(a_0)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{\max}(a_0)=\sigma(a_0) \tag{4B-20}$$

が成り立つ。

② 以下のように、$A(z)$， $A_n^{\min}(z)$， $A_n^{\max}(z)$を定める。

$$A(z)=\frac{2}{\pi}\int_b^{a_0}\frac{\sigma(\xi)z\sqrt{z^2-a_0^2}}{(z^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi \tag{4B-21}$$

$$A_n^{\min}(z)=\frac{2}{\pi}\int_b^{a_0}\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)z\sqrt{z^2-a_0^2}}{(z^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi \tag{4B-22}$$

$$A_n^{\max}(z)=\frac{2}{\pi}\int_b^{a_0}\frac{\sigma_n^{\max}(\xi)z\sqrt{z^2-a_0^2}}{(z^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi \tag{4B-23}$$

このとき、xを実数として、$x>a_0$のとき、以下が成り立つ。

$$A_n^{\min}(x)\le A(x)\le A_n^{\max}(x) \tag{4B-24}$$

③ xを実数として，$x>a_0$のとき，$A(x)$は，$A_n^{\min}(x)$または$A_n^{\max}(x)$の極限として表せる．（第５章で証明する．）

$$\lim_{n\to\infty}A_n^{\min}(x)=\lim_{n\to\infty}A_n^{\max}(x)=A(x) \tag{4B-25}$$

④ 以下の極限の順序交換が可能である．（第５章で証明する．）

$$\lim_{x\to a_0+0}\lim_{n\to\infty}A_n^{\min}(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x) \tag{4B-26}$$

$$\lim_{x\to a_0+0}\lim_{n\to\infty}A_n^{\max}(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\max}(x) \tag{4B-27}$$

⑤ $\sigma_n^{\min}(\xi)$および$\sigma_n^{\max}(\xi)$は区間$[b_n,a_0]$で定数であることから、ての自然数nに対して、下が成り立つ（第４章で証明する)。

$$\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x)=\sigma_n^{\min}(a_0) \tag{4B-28}$$

$$\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\max}(x)=\sigma_n^{\max}(a_0) \tag{4B-29}$$

⑥ (4B-25)式、(4B-26) 式、(4B-27)式および (4B-20)式より、(4B-15)式が証明される。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a_0+0}A(x)&=\lim_{x\to a_0+0}\lim_{n\to\infty}A_n^{\min}(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{\min}(a_0)\\&=\sigma(a_0)\end{aligned} \tag{4B-30}$$

４．(4B-28)式および (4B-29)式の証明

① 以下の等式が成り立つ.

$$\lim_{x\to a_0+0}\frac{2}{\pi}\int_b^{b_n}\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)x\sqrt{x^2-a_0^2}}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi=\frac{2}{\pi}\int_b^{b_n}\lim_{x\to a_0+0}\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)x\sqrt{x^2-a_0^2}}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi \tag{4B-31}$$
$$=0$$

実際、積分と極限の順序交換は、$\dfrac{\sigma_n^{\min}(\xi)}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}$ が積分区間$[b,b_n]$において有界であること、すなわち、ある正の実数M が存在して、任意の実数ξ，$b\le\xi\le b_n$，任意の実数x，$x>a_0$に対して、

$$\left|\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}\right|\le M \tag{4B-32}$$

が成り立つことから示される。

② 以下の等式が成り立つ.

$$\lim_{x\to a_0+0}\frac{2}{\pi}\int_{b_n}^{a_0}\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)x\sqrt{x^2-a_0^2}}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi=\lim_{x\to a_0+0}\sigma_n^{\min}(a_0)\frac{2}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{b_n\sqrt{x^2-a_0^2}}{x\sqrt{a_0^2-b_n^2}}\right)$$
$$=\sigma_n^{\min}(a_0)\frac{2}{\pi}\cot^{-1}\left(\lim_{x\to a_0+0}\frac{b_n\sqrt{x^2-a_0^2}}{x\sqrt{a_0^2-b_n^2}}\right) \tag{4B-33}$$
$$=\sigma_n^{\min}(a_0)$$

③ (4B-31)式および (4B-33)式より、 (4B-28)式が証明される。

$$\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x)$$
$$=\lim_{x\to a_0+0}\frac{2}{\pi}\int_b^{b_n}\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)x\sqrt{x^2-a_0^2}}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi+\lim_{x\to a_0+0}\frac{2}{\pi}\int_{b_n}^{a_0}\frac{\sigma_n^{\min}(\xi)x\sqrt{x^2-a_0^2}}{(x^2-\xi^2)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi$$
$$=\sigma_n^{\min}(a_0) \tag{4B-34}$$

④ (4B-29)式も同様に証明できる.

５． (4B-25)式， (4B-16)式および (4B-27)式の証明

① $A_n^{\min}(x)$と$A_n^{\max}(x)$は、$x>a_0$において、一様に$A(x)$に収束する。

すなわち､任意の正の実数εに対して､xに依存しない自然数n_0が存在して､任意の自然数n，$n\ge n_0$，任意の実数x，$x>a_0$に対して

$$\left|A_n^{\min}(x)-A(x)\right|<\varepsilon \tag{4B-35}$$
$$\left|A_n^{\max}(x)-A(x)\right|<\varepsilon \tag{4B-36}$$

が成り立つ。

実際、(4B-20)式より、ある自然数n_0が存在して、任意の自然数n，$n\ge n_0$に対して

$$\left|\sigma_n^{\max}(a_0)-\sigma_n^{\min}(a_0)\right|<\varepsilon \tag{4B-37}$$

が成り立つ。次に、任意の自然数n，$n\geq n_0$，任意の実数x，$x>a_0$に対して

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{b_n}^{a_0}\frac{x\sqrt{x^2-a_0^2}}{\left(x^2-\xi^2\right)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi\right|=\left|\frac{2}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{b_n\sqrt{x^2-a_0^2}}{x\sqrt{a_0^2-b_n^2}}\right)\right| \tag{4B-38}$$
$$\leq 1$$

が成り立つ.

　したがって、(4B-25)式を用いると、任意の自然数n，$n\geq n_0$，任意の実数x，$x>a_0$に対して、

$$\begin{aligned}\left|A_n^{\min}(x)-A(x)\right| &\leq \left|A_n^{\max}(x)-A_n^{\min}(x)\right| \\ &\leq \left|\sigma_n^{\max}(a_0)-\sigma_n^{\min}(a_0)\right|\times\left|\frac{2}{\pi}\int_{b_n}^{a_0}\frac{x\sqrt{x^2-a_0^2}}{\left(x^2-\xi^2\right)\sqrt{a_0^2-\xi^2}}d\xi\right| \\ &\leq \left|\sigma_n^{\max}(a_0)-\sigma_n^{\min}(a_0)\right| \\ &<\varepsilon\end{aligned} \tag{4B-39}$$

が成り立つ。同様に、$\left|A_n^{\max}(x)-A(x)\right|<\varepsilon$も成り立つ.

② 　(4B-35)式および (4B-36)式より、(4B-25)が証明される。

③　式(4B-26)および式(4B-27)が証明される。

　実際、εを任意の実数としたとき、(4B-35)式の一様収束性より，$\dfrac{\varepsilon}{2}$に対して，xに依存しない自然数n_0が存在して、任意の自然数n，$n\geq n_0$，任意の実数x，$x>a_0$に対して

$$\left|A_n^{\min}(x)-A(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4B-40}$$

が成り立つ。極限をとると，以下が成り立つ。

$$\left|\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x)-\lim_{x\to a_0+0}A(x)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{4B-41}$$
$$<\varepsilon$$

これは,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x)=\lim_{x\to a_0+0}A(x) \tag{4B-42}$$

を表している。したがって、(4B-25)式および(4B-42)より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a_0+0}\lim_{n\to\infty}A_n^{\min}(x) &= \lim_{x\to a_0+0}A(x) \\ &=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_0+0}A_n^{\min}(x)\end{aligned} \tag{4B-43}$$

(4B-27)式の証明も同様である．したがって、(4B-13)式が成立しているもとでは、任意応力分布$\sigma(x)$

（残留応力も含む）が作用し、任意分布のき裂結合力 $\sigma_p(x)$ が作用しても仮想き裂先端位置 a_0 において、応力は連続することになる。

追補　Westergaad の応力関数

Airy の応力関数 Φ は，以下を満たすものとして定義される．

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{4B-44}$$

Westergaad の応力関数 Z_I（Mode I），Z_{II}（Mode II）は以下を満たすものとして定義される．

$$\Phi_I = \mathrm{Re}\left(\bar{\bar{Z}}_I\right) + y\,\mathrm{Im}\left(\bar{Z}_I\right) \tag{4B-45}$$

$$\Phi_{II} = -y\,\mathrm{Re}\left(\bar{Z}_{II}\right) \tag{4B-46}$$

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_{II} \tag{4B-47}$$

ここで，$\dfrac{d}{dz}\bar{Z}_I(z) = Z_I(z)$，$\dfrac{d}{dz}\bar{\bar{Z}}_I(z) = \bar{Z}_I(z)$，$\dfrac{d}{dz}\bar{Z}_{II}(z) = Z_{II}(z)$ である．

このとき，応力成分は以下のように表される．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}(Z_I) - y\,\mathrm{Im}(Z_I') \\ \mathrm{Re}(Z_I) + y\,\mathrm{Im}(Z_I') \\ -y\,\mathrm{Re}(Z_I') \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\,\mathrm{Im}(Z_{II}) + y\,\mathrm{Re}(Z_{II}') \\ -y\,\mathrm{Re}(Z_{II}') \\ \mathrm{Re}(Z_{II}) - y\,\mathrm{Im}(Z_{II}') \end{Bmatrix} \tag{4B-48}$$

付録 4C　三点曲げ COD 試験片のき裂結合力モデルのプログラム例

下記に、三点曲げ COD 試験片の COD を求めるための 3.1 節における定式をプログラム化した例を示す。記号など理解するのに必要な最低限の説明をしている。

```
      PROGRAM BCOD
C     ****  Cohesive horce model for bend COD specimen   ****
      DIMENSION XX(21),VV(21),U(10),W(10),SEE1(21),SEE2(21)
      COMMON G1,G2,G3,G4
      OPEN(UNIT=6,FILE='OUTPUT.DAT',STATUS='UNKNOWN')
      PAI=3.141592654          ・・・・・       π
      E=21000.                 ・ ・ ・ ・      ヤング率
      U(1)=-0.973906528517172
      U(2)=-0.865063366688985
      U(3)=-0.679409568299024                  ガウス積分の分点座標
      U(4)=-0.433395394129247                  （10 点公式）
      U(5)=-0.148874338981631
```

```
13           U(6)=-U(5)
14           U(7)=-U(4)￥              ガウス積分の分点座標
15           U(8)=-U(3)                （10 点公式）
16           U(9)=-U(2)
17           U(10)=-U(1)
18           W(1)=0.066671344308688
19           W(2)=0.149451349150581
20           W(3)=0.219086362515982
21           W(4)=0.269266719309996
22           W(5)=0.295524224714753
23           W(6)=W(5)                  ガウス積分の重み
24           W(7)=W(4)
25           W(8)=W(3)
26           W(9)=W(2)
27           W(10)=W(1)
28          READ(5,*)C,WID,SY00,SB   実き裂長、試験片高さ、処女材の $\lambda\sigma_Y$、$\sigma_b$
29           AEND=0.5*(C+WID)   リガメント中心
30           SY0=SY00
31             JJ=0
32     10    JJ=JJ+1       139 行から、仮想き裂の位置を 0.2 きざみでリガメント中心まで
33           A=0.2*(AEND-C)*JJ+C       $a$
34           ALF=A/WID          $a/w$
35           CALL GALF(ALF)      (3.2)式の $g_1(\alpha)$ ~ $g_4(\alpha)$
36           SEK1=0.
37              DO 250 J=1,10
38                XLOW=0.1*(A-C)*(J-1)+C        $[c,a]$ を 10 分割
39                XHIGH=0.1*(A-C)*J+C
40          DO 20 I=1,10
41           X=0.5*(XHIGH-XLOW)*U(I)+0.5*(XHIGH+XLOW)   各分割要素のガウス点
42           CAI=X/A          $\chi = x/a$
43           G=G1+CAI*G2+CAI**2*G3+CAI**3*G4      (3.2)式の第 1 式
44     20    SEK1=G*W(I)/((1-ALF)**1.5*SQRT(1-CAI*CAI))+SEK1   (3.4)式右辺分母の積分準備
45    250    CONTINUE
46          SEK1=0.5*(XHIGH-XLOW)*SEK1   (3.4)式右辺分母の積分値
47          SEK2=0.
48          DO 350 J=1,10
49           XLOW=0.1*A*(J-1)                 $[0,a]$ を 10 分割
50           XHIGH=0.1*A*J
51          DO 30 I=1,10
52          X=0.5*(XHIGH-XLOW)*U(I)+0.5*(XHIGH+XLOW)    各分割要素のガウス点
53          CAI=X/A         $\chi = x/a$
54          G=G1+CAI*G2+CAI**2*G3+CAI**3*G4   (3.2)式の第 1 式
55          SEK2=G*(-2.*SB*X/WID+SB)*W(I)/((1-ALF)**1.5*SQRT(1-CAI*CAI))
56         1 +SEK2     (3.4)式右辺分母の積分準備
57     30    CONTINUE
58    350    CONTINUE
```

```
      SEK2=0.5*(XHIGH-XLOW)*SEK2
```

(3.4)式右辺分母の積分値

```
C        write(6,*)"a=",A, "SEK1=",SEK1,"SEK2=",SEK2
   50  P=SY0*SEK1/SEK2
```

(3.4)式

```
       IF(II .GT. 11) GO TO 41
      DO 40 II=1,20
       X=0.1*(II-1)*C
      GO TO 42
   41  X=0.1*(II-11)*(A-C)+C
   42       XX(II)=X
       SEK3=0.
```

実き裂部を 10 分割、仮想き裂部を 10 分割した分点の座標

```
        DO 150 KK=1,10
        XLOW=0.1*(KK-1)*A
        XHIGH=0.1*KK*A
```

（仮想）き裂を 10 分割

```
       DO 60 K=1,10
        SEKIB=0.
        XJ=0.5*(XHIGH-XLOW)*U(K)+0.5*(XHIGH+XLOW)
```

$\int_0^a dx_i$ の分割要素のガウス点

```
        XW=XJ
       IF( X .GT. XJ) XW=X
       DO 160 JK=1,10
        ALOW=0.1*(JK-1)*(A-XW)+XW
        AHIGH=0.1*JK*(A-XW)+XW
       DO 70 J=1,10
        AK=0.5*(AHIGH-ALOW)*U(J)+0.5*(AHIGH+ALOW)
```

$\int_c^a da$ の分割要素のガウス点

```
        CAI=XJ/AK
        ALF=AK/WID
       CALL GALF(ALF)
        GG1=G1+CAI*G2+CAI**2*G3+CAI**3*G4
```

$G\left(x_i/a, a/w\right)$

```
        CAIJ=X/AK
        GG2=G1+CAIJ*G2+CAIJ**2*G3+CAIJ**3*G4
```

$G\left(x/a, a/w\right)$

```
        SEK31=GG1*GG2*(-2.*SB*XJ/WID+SB)*W(K)*W(J)
```

dx_i 方向と da 方向の $\int_x^a da$ の分割

```
        SEKA=SEK31/(AK*(1-AK/WID)**3*SQRT((1-CAI**2)*(1-CAIJ**2)))
        SEKIB=0.25*P*SEKA*(XHIGH-XLOW)*(AHIGH-ALOW)
        SEK3=SEK3+SEKIB
   70 CONTINUE
  160  CONTINUE
   60  CONTINUE
  150  CONTINUE
          SEE1(II)=8.*SEK3/(PAI*E)
          SEK4=0.
        DO 170 KK=1,10
          XLOW=0.1*(KK-1)*(A-C)+C
         XHIGH=0.1*KK*(A-C)+C
       DO 80 K=1,10
         XJ=0.5*(XHIGH-XLOW)*U(K)+0.5*(XHIGH+XLOW)
         XW=XJ
        IF( X .GT. XJ) XW=X
```

```
          DO 180 JK=1,10
            ALOW=0.1*(JK-1)*(A-XW)+XW
            AHIGH=0.1*JK*(A-XW)+XW
          DO 90 J=1,10
           AK=0.5*(AHIGH-ALOW)*U(J)+0.5*(AHIGH+ALOW)
           ALF=AK/WID
          CALL GALF(ALF)
           CAIJ=XJ/AK
           CAI=X/AK
           GG1=G1+CAI*G2+CAI**2*G3+CAI**3*G4
           GG2=G1+CAIJ*G2+CAIJ**2*G3+CAIJ**3*G4
           SEK41=GG1*GG2*W(K)*W(J)
           SEKA=SEK41/(AK*(1-AK/WID)**3*SQRT((1-CAI**2)*(1-CAIJ**2)))
           SEKIB=0.25*SEKA*(XHIGH-XLOW)*(AHIGH-ALOW)*SY0
           SEK4=SEK4+SEKIB
   90   CONTINUE
  180   CONTINUE
   80   CONTINUE
  170   CONTINUE
           SEE2(II)=8.*SEK4/(PAI*E)
           VV(II)=8.*(SEK3-SEK4)/(PAI*E)
   40   CONTINUE
          XX(21)=A
           VV(21)=0.
           SEE1(21)=0.
           SEE2(21)=0.
          WRITE (6,*)JJ, "    a=",A,"    P=",P
         DO 94 i=1,21
           XX(i)=XX(i)/WID
           VV(i)=VV(i)*E/(SY00*WID)
           SEE1(i)=SEE1(i)*E/(SY00*WID)        (3.8)式右辺括弧内第 2 式
           SEE2(i)=SEE2(i)*E/(SY00*WID)
               WRITE(6,*) XX(i),VV(i),SEE1(i),SEE2(i)
   94   CONTINUE
         IF(JJ .LE. 4) GO TO 10
         IF(SY0 .GT. 20.*SY00) GO TO 190
          JJ=JJ+1
          SY0=0.5*(JJ-5)*SY00+SY00
        GO TO 50
  190         CLOSE(UNITE=6)
        STOP
        END PROGRAM BCOD
C
        SUBROUTINE GALF(ALF)
         COMMON G1,G2,G3,G4
        G1=1.3-1.309*ALF+12.13*ALF**2-24.96*ALF**3+30.65*ALF**4
```

```
      1 -15.07*ALF**5
        G2=-136.4+71.42*ALF-9.105*ALF**2+82.82*ALF**3
      1 -116.1*ALF**4+82.49*ALF**5+136.3*SQRT(1-ALF)
        G3=165.3-90.90*ALF+24.17*ALF**2-153.9*ALF**3
      1 +209.1*ALF**4-130.1*ALF**5-165.5*SQRT(1-ALF)
        G4=-60.31+34.27*ALF-16.11*ALF**2+76.90*ALF**3
      1 -99.07*ALF**4+57.15*ALF**5+60.38*SQRT(1-ALF)
        RETURN
        END
```

付録 4D　せん断き裂が最初の結晶粒界を超えた瞬間の最小荷重時のき裂開口変位分布ならびに固有変位

3.1.2 項によって得られる $P_{\min_1}$ が負でなければ、仮想き裂は引張塑性ひずみで形成されたものとなる。$P_{\min_1}$ が負の場合、(3.29)式を解いて得られる $\tilde{a}_c$ と(3.14)式を解いて得られる $\tilde{a}_t$ を比較して、大きい方が、仮想き裂先端位置となる。もし、両者が同じ値となるならば、両者の出現順序が遅くなる方による仮想き裂が残る。すならち、$\tilde{a}_t$ によるものならば、仮想き裂は引張塑性ひずみにより形成されたもの、$\tilde{a}_c$ によるものならば、圧縮塑性ひずみにより形成されたものが、き裂開口モード出現時に残ることになる。

疲労が問題となるのは、仮想き裂が $\tilde{a}_t$ によるものが大半であるので、ここでは $\tilde{a}_t$ によって仮想き裂が形成される場合の解法について説明する。$\tilde{a}_c$ による場合は下記と同様の解法となる。

(3.14)式を解いて得られる $\tilde{a}_t$ を $\tilde{a}$ とし、$P_{\max_1}$ と $P_{\min_1}$ の対で得られる ΔK_S（結晶粒径を深さとする半楕円き裂の ΔK 値）を用いて(3.1)式より得る $\tilde{\omega}_S$ を用いて、(4.22)式より仮想き裂内で圧縮塑性域となる領域先端位置 $\hat{x}_1$ は

$$\hat{x}_1 = d_0 + \omega_S \qquad \text{(4D-1)}$$

となる。$P_{\max_1}$ と $P_{\min_1}$ の対によって、$P_{\min_1}$ 時に $\hat{x}_1$ まで圧縮塑性域が形成されることになる。

鉄鋼材料は一定荷重振幅下で繰返し負荷を受けると、初期段階では巨視的に全荷重区間で弾性状態にあったとしても、ヒステリシスループを描くようになり、ひずみループにある幅、すなわち塑性ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^p$ が観察され、繰り返しが進行するとある大きさに漸近する（第 3 編 4.3 節参照）。この現象は見掛け上、降伏点が低下し、負荷とともにある大きさに漸近することになると考えて良い。繰返し負荷時の降伏点の漸近値を引張側と圧縮側に分離して独立に求めることは、現時点では困難である。通常は漸近した 1 サイクルにおける圧縮降伏点から引張降伏点にいたる応力範囲と静的圧縮降伏点から静的引張降伏点にいたる応力範囲との比が得られる。すなわち繰返し下の弾性応力範囲と静的条件下の弾性応力範囲の比が与えられることになる。したがって、繰返し負荷で漸近した状態の引張側降伏点を与えることは難しい。

繰返し下の引張降伏点 s_{YT_0} が小さくなると、仮想き裂長 $\tilde{a}$ が大きくなる。繰返し下の弾性応力範囲は材料が決まれば一定になると考えられるから、$\left|s_{YC_0}\right|$ は大きくなる。したがって、図 3.4 に示す h_1 は小さくなる。したがって、3.1.2 で得られる $P_{\max_1}$ 時と $P_{\min_1}$ 時の仮想き裂の COD を収束計算で求めることができる。すなわち図 3.7 の流れで収束計算できる。

この流れは 2 つの大きな流れに分割される。1 つは、$\tilde{a}_t$ を仮定して、最大荷重（$P_{\max_1}$）時の COD を求める図 3.7 の左側の流れと、最小荷重時の COD に関する方程式を解く図 3.7 の右側の上にのぼる流れである。前者の解は 1.1 節の図 1.4 にしたがって求めることができる。この計算過程で単位外力、残留応力ならびに単位一様圧力がき裂面に作用することによって生じる各 EDS の各係数の値が求められる（き裂結合力に対しての EDS は、単位一様圧力がき裂面に作用することによる $a \sim K$ 関係を EDS に変換したものに、x の位置の降伏点相当の結合力を乗じたものとなる。ここで降伏点相当とは降伏点に塑性拘束係数を乗じたものである。図 3.7 中の圧縮側き裂結合力による EDS は単位一様圧力による EDS に圧縮降伏点と塑性拘束係数を乗じたものとなる。）。この結果を受けて、仮定された $\tilde{a}_t$ に対して生じる固有変位が(3.21)式で得られる。

最小荷重時には(3.27)式が成立する。$\tilde{a}$ を仮定すると引張側の繰返し降伏点と静的降伏点の比 ς_{t_0} が決まるので、圧縮側の繰返し降伏点と静的降伏点の比 ς_{C_0} が決まる。$P_{\min_1}$ を未知として(3.27)式をガウス・ザイエル漸化式表示すると、

$$
\begin{aligned}
\sigma_{i1}^{(k+1)} = \Bigg[& P_{\min}^{*(k)} \cdot \hat{\Omega}^{(uP)}\left(x_{i1}, \tilde{a}\right) + \Omega^{(R)}\left(x_{i1}, \tilde{a}\right) - \varsigma_{C_0} \sigma_{Yc} \hat{\Xi}^{(Y)}\left(x_{i1}, 0, \hat{x}_1, \tilde{a}\right) \\
& + \frac{\left(x_{i3} - x_{i1}\right)\sigma_{i2}^{(k)} + \left(x_{i1} - x_{i2}\right)\sigma_{i3}^{(k)}}{\left(x_{i1} - x_{i2}\right)\left(x_{i2} - x_{i3}\right)\left(x_{i3} - x_{i1}\right)} G_2\left(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, x_{i1}, \tilde{a}\right) \\
& - \frac{\left(x_{i3}^2 - x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}^{(k)} + \left(x_{i1}^2 - x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}^{(k)}}{\left(x_{i1} - x_{i2}\right)\left(x_{i2} - x_{i3}\right)\left(x_{i3} - x_{i1}\right)} G_1\left(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, x_{i1}, \tilde{a}\right) \\
& - \frac{x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3} - x_{i1}\right)\sigma_{i2}^{(k)} + x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1} - x_{i2}\right)\sigma_{i3}^{(k)}}{\left(x_{i1} - x_{i2}\right)\left(x_{i2} - x_{i3}\right)\left(x_{i3} - x_{i1}\right)} G_0\left(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, x_{i1}, \tilde{a}\right) \\
& - \sum_{j=1}^{i-1} \Bigg\{ - \frac{\left(x_{j2} - x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k+1)} + \left(x_{j3} - x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k+1)} + \left(x_{j1} - x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1} - x_{j2}\right)\left(x_{j2} - x_{j3}\right)\left(x_{j3} - x_{j1}\right)} G_2\left(\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}, x_{i1}, \tilde{a}\right) \\
& + \frac{\left(x_{j2}^2 - x_{j3}^2\right)\sigma_{j1}^{(k+1)} + \left(x_{j3}^2 - x_{j1}^2\right)\sigma_{j2}^{(k+1)} + \left(x_{j1}^2 - x_{j2}^2\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1} - x_{j2}\right)\left(x_{j2} - x_{j3}\right)\left(x_{j3} - x_{j1}\right)} G_1\left(\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}, x_{i1}, \tilde{a}\right) \\
& + \frac{x_{j2}x_{j3}\left(x_{j2} - x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k+1)} + x_{j3}x_{j1}\left(x_{j3} - x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k+1)} + x_{j1}x_{j2}\left(x_{j1} - x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1} - x_{j2}\right)\left(x_{j2} - x_{j3}\right)\left(x_{j3} - x_{j1}\right)} \\
& \times G_0\left(\hat{x}_j, \hat{x}_{j+1}, x_{i1}, \tilde{a}\right) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=i+1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k)}+\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k)}+\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_2\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i1},\tilde{a}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\left(x_{j2}^2-x_{j3}^2\right)\sigma_{j1}^{(k)}+\left(x_{j3}^2-x_{j1}^2\right)\sigma_{j2}^{(k)}+\left(x_{j1}^2-x_{j2}^2\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_1\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i1},\tilde{a}\right)\\
&\quad+\frac{x_{j2}x_{j3}\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k)}+x_{j3}x_{j1}\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k)}+x_{j1}x_{j2}\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}\\
&\quad\left.\times G_0\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i1},\tilde{a}\right)\right\}-L\left(x_{i1}\right)\Bigg]\Bigg/\Bigg[\frac{L\left(x_{i1}\right)}{E'}+\frac{1}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}\\
&\qquad\times\Big\{-\left(x_{i2}-x_{i3}\right)G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i1},\tilde{a}\right)+\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i1},\tilde{a}\right)\\
&\qquad\qquad+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i1},\tilde{a}\right)\Big\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{4D-2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{i2}^{(k+1)}=&\Bigg[p_{\min}^{*(k)}\cdot\hat{\Omega}^{(uP)}\left(x_{i2},\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(x_{i2},\tilde{a}\right)-\varsigma_{C_0}\sigma_{Yc}\hat{\hat{\Xi}}^{(Y)}\left(x_{i2},0,\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\\
&+\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}^{(k)}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}^{(k)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\\
&-\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}^{(k)}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}^{(k)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\\
&-\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}^{(k)}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}^{(k)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\\
&-\sum_{j=1}^{i-1}\left\{-\frac{\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k+1)}+\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k+1)}+\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_2\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\left(x_{j2}^2-x_{j3}^2\right)\sigma_{j1}^{(k+1)}+\left(x_{j3}^2-x_{j1}^2\right)\sigma_{j2}^{(k+1)}+\left(x_{j1}^2-x_{j2}^2\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_1\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\\
&\quad+\frac{x_{j2}x_{j3}\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k+1)}+x_{j3}x_{j1}\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k+1)}+x_{j1}x_{j2}\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}\\
&\qquad\left.\times G_0\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\right\}\\
&-\sum_{j=i+1}^{4}\left\{-\frac{\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k)}+\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k)}+\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_2\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\left(x_{j2}^2-x_{j3}^2\right)\sigma_{j1}^{(k)}+\left(x_{j3}^2-x_{j1}^2\right)\sigma_{j2}^{(k)}+\left(x_{j1}^2-x_{j2}^2\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_1\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i2},\tilde{a}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{x_{j2}x_{j3}\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k)}+x_{j3}x_{j1}\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k)}+x_{j1}x_{j2}\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}\\
&\times G_0\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\Bigg\}-L\left(x_{i2}\right)\Bigg]\Bigg/\Bigg[\frac{L\left(x_{i2}\right)}{E'}+\frac{1}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}\\
&\times\Big\{-\left(x_{i3}-x_{i1}\right)G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i2},\tilde{a}\right)+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\\
&\qquad+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i2},\tilde{a}\right)\Big\}\Bigg] \qquad \text{(4D-3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{i3}^{(k+1)}=&\Bigg[p_{\min}^{*(k)}\cdot\hat{\Omega}^{(uP)}\left(x_{i3},\tilde{a}\right)+\Omega^{(R)}\left(x_{i3},\tilde{a}\right)-\varsigma_{C_0}\sigma_{Yc}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(x_{i3},0,\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\\
&+\frac{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i1}^{(k)}+\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i2}^{(k)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}^{(k)}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}^{(k)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i1}^{(k)}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}^{(k)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&-\sum_{j=1}^{i-1}\Bigg\{-\frac{\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k+1)}+\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k+1)}+\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_2\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&+\frac{\left(x_{j2}^2-x_{j3}^2\right)\sigma_{j1}^{(k+1)}+\left(x_{j3}^2-x_{j1}^2\right)\sigma_{j2}^{(k+1)}+\left(x_{j1}^2-x_{j2}^2\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_1\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&+\frac{x_{j2}x_{j3}\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k+1)}+x_{j3}x_{j1}\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k+1)}+x_{j1}x_{j2}\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k+1)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}\\
&\times G_0\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\Bigg\}\\
&-\sum_{j=i+1}^{4}\Bigg\{-\frac{\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k)}+\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k)}+\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_2\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&+\frac{\left(x_{j2}^2-x_{j3}^2\right)\sigma_{j1}^{(k)}+\left(x_{j3}^2-x_{j1}^2\right)\sigma_{j2}^{(k)}+\left(x_{j1}^2-x_{j2}^2\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}G_1\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\\
&+\frac{x_{j2}x_{j3}\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\sigma_{j1}^{(k)}+x_{j3}x_{j1}\left(x_{j3}-x_{j1}\right)\sigma_{j2}^{(k)}+x_{j1}x_{j2}\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\sigma_{j3}^{(k)}}{\left(x_{j1}-x_{j2}\right)\left(x_{j2}-x_{j3}\right)\left(x_{j3}-x_{j1}\right)}\\
&\times G_0\left(\hat{x}_j,\hat{x}_{j+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\Bigg\}-L\left(x_{i3}\right)\Bigg]\Bigg/\Bigg[\frac{L\left(x_{i3}\right)}{E'}+\frac{1}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}\\
&\times\Big\{-\left(x_{i1}-x_{i2}\right)G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i3},\tilde{a}\right)+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i3},\tilde{a}\right)
\end{aligned}
$$

$$+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},x_{i3},\tilde{a}\right)\Big\}\Bigg] \qquad \text{(4D-4)}$$

$$P_{\min}^{*(k+1)}=\Bigg[\varsigma_{C_0}\sigma_{Yc}\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,0,\hat{x}_1,\tilde{a}\right)-\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)+\left\{1+\frac{f_j\left(\hat{x}_1\right)}{E'}\right\}L\left(\hat{x}_1\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{4}\Bigg\{-\frac{\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}^{(k+1)}+\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}^{(k+1)}+\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}^{(k+1)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_2\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)$$
$$+\frac{\left(x_{i2}^2-x_{i3}^2\right)\sigma_{i1}^{(k+1)}+\left(x_{i3}^2-x_{i1}^2\right)\sigma_{i2}^{(k+1)}+\left(x_{i1}^2-x_{i2}^2\right)\sigma_{i3}^{(k+1)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}G_1\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)$$
$$+\frac{x_{i2}x_{i3}\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\sigma_{i1}^{(k+1)}+x_{i3}x_{i1}\left(x_{i3}-x_{i1}\right)\sigma_{i2}^{(k+1)}+x_{i1}x_{i2}\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\sigma_{i3}^{(k+1)}}{\left(x_{i1}-x_{i2}\right)\left(x_{i2}-x_{i3}\right)\left(x_{i3}-x_{i1}\right)}$$
$$\times G_0\left(\hat{x}_i,\hat{x}_{i+1},\hat{x}_1,\tilde{a}\right)\Big\}\Bigg]\Big/\Omega^{(P)}\left(\hat{x}_1,\tilde{a}\right) \qquad \text{(4D-5)}$$

ただし、$\hat{\Omega}^{(uP)}\left(b,\tilde{a}\right)$ ：(3.18)式

$\Omega^{(R)}\left(b,\tilde{a}\right)$ ：(3.19)式

$\hat{\Xi}^{(Y)}\left(b,x_S,x_L,\tilde{a}\right)$ ：(3.20)式

$G_j\left(\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i,b,\tilde{a}\right)$ ：(2.25)式

ここで

$x_S=0$ の場合は、$D=1$、$\bar{m}=2$、$\tilde{x}_1\to\tilde{x}_0$ とし、

$x_S\neq 0$ の場合は、$D=0$ とし、$\tilde{x}_{i-1}\le x_S<\tilde{x}_i$ なる i を $\bar{m}$ として $\tilde{x}_{\bar{m}-1}=x_S$ とする。

また $\tilde{x}_{i-1}<x_L\le\tilde{x}_i$ なる i を n として $\tilde{x}_n=x_L$ とする

上式右辺第 1 項のガウスルジャンドル積分の分点は

$$x_k=\frac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_0}{2}+\frac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_0}{2}X_k\text{、}\quad X_1=-0.7745967\text{、}X_2=0\text{、}X_3=0.7745967$$

w_k は重みで、

$w_1=5/9$、$w_2=8/9$、$w_3=5/9$

である。また

$$f_j\left(x\right)=\alpha_j^{(Yc)}x^3+\beta_j^{(Yc)}x^2+\gamma_j^{(Yc)}x+\delta_j^{(Yc)} \qquad \text{(4D-6)}$$

そして、除荷弾性域の 4 つの 2 次要素（図 3.6 中の $\left[\hat{x}_1,\hat{x}_2\right]$ 間の赤線で表した要素の $x_{11}(=\hat{x}_1)$ の応力は、

$$\sigma_{11}=\varsigma_{C_0}\sigma_{Yc}\left\{\hat{\alpha}_i^{(Y)}\hat{x}_1^3+\hat{\beta}_i^{(Y)}\hat{x}_1^2+\hat{\delta}_i^{(Y)}\hat{x}_1+\hat{\delta}_i^{(Y)}\right\} \qquad \text{(4D-7)}$$

ただし、i は $\tilde{x}_{i-1}\le\hat{x}_1(=x_{11})<\tilde{x}_i$ なる要素番号

で既知である。したがって、$\sigma_{11}^{(k)}=\sigma_{11}^{(k+1)}=\sigma_{11}$ と固定される。

収束計算ではまず、計算回数の k （記号の上添え字の括弧内の k 。例えば $\sigma_{i2}^{(k)}$ の k ）をまず 0 にセットし、(4D-3)式で $\sigma_{12}^{(1)}$ そして、(4D-4)式で $\sigma_{13}^{(1)}$ と要素 1 の応力を計算した後、(4D-2)式で $\sigma_{21}^{(1)}$ 、(4D-3)式で $\sigma_{22}^{(1)}$ 、(4D-4)式で $\sigma_{23}^{(1)}$ と要素 2 これを繰返し、要素 4 に関し(4D-4)式で $\sigma_{43}^{(1)}$ を計算後、(4D-5)式で

$P_{\min}^{*(1)}$を求め、1 回目（$k=1$）の計算が終了する。同様に$\sigma_{12}^{(2)} \to \sigma_{13}^{(2)} \to \sigma_{21}^{(2)} \to \sigma_{22}^{(2)}$・・・$\sigma_{43}^{(2)} \to P_{\min}^{*(2)}$と 2 回目と順次$k$を進めていき、収斂した結果を(1.25)式に代入することで、最小荷重時の COD が求められる。

(3.32)式の解法も同様である。

付録４E　(3.43)式の解法

(3.43)式もガウス・ザイエル法で解くことができる。ただ、(3.27)式と異なるのは、き裂が閉口しているか開口しているか、さらにはき裂閉口部で圧縮降伏しているか否かを判断しながら収束させていかなければならない。この場合、仮想き裂先端側から収束させていく方が、解の収束性を高めることが経験的に判明している。したがって、まず、2 次要素の要素 4 から定式化する方が良いみたいである。

ガウス・ザイエル漸化式作成にあたっては、付録 4D と同様の展開に加えて、実き裂内の要素での計算回数kは同一要素内では同じとすることと、各要素に関してk番目の計算が終了すれば、直ちに表 1.1 や(3.42)の判定をした後、次の要素に進むことが必要となる。また実き裂内の線形要素に関しては、表 3.1 の①の状態に対しての漸化式を作成すれば良い。そして、各要素の$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}^{(k+1)}$の計算直後に、$j=1$と$j=2$の$\underset{\sim}{\sigma}_{ij}^{(k+1)}$より表 4.1 の判定をして、$(k+1)$回目の$i$要素の$\rho_{\ell}(i)$（ただし$\ell$は表 3.1 の$\rho$の下添え字の 0~5 に対応）を決定し、次の要素に進めば良い。その後$\kappa^{(k+1)}$の計算後、$P^{(k+1)}$に進み、$k=0$の段の計算が終了する。上記を繰返すことで、き裂開閉口状態が決定される。

4 章付録参考文献

1) 汎用非線形構造解析システム FINAS 使用説明書、動力炉・核燃料開発事業団、(1995)

2) 小沼：き裂成長解析に基づく鋼製排水門の疲労損傷解析とその高度化に向けた基礎的研究、九州大学博士論文、(2007)

3) H.Nishitani: Elastic-Plastic Stress in a Semi-Infinite Plate Having an Elliptical Arc Notch with an Edge Crack under Tension or longitudinal Shear, Proceedings, 3rd International Conference on Fracture, Munchen,Vol.5,(1973),p.513,

4) H.M.Westergaard : Bearing Pressures and Cracks, Tranc. ASME, Journal of Applied Mechanics,Series A,vol.66,(1939),p.49